El triángulo órtico en el *Court*

Francisco Javier García Capitán

4 de febrero de 2009

Resumen

Hacemos una lectura atenta de la sección THE ORTHIC TRIANGLE del libro *College Geometry, An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, de Nathan Altshiller-Court. En este caso, la lectura atenta consiste en la realización de algunas figuras que no vienen en el texto y en la resolución de los ejercicios propuestos.

1. Definición y propiedades

Definición. *El triángulo que tiene por vértices los pies de las alturas de un triángulo dado ABC se llama* triángulo órtico *del ABC.*

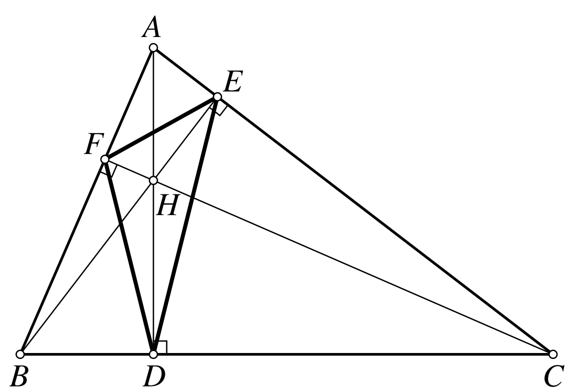

FIGURA 1

Propiedad 1. *Los triángulos AEF, DBF y DEC son semejantes al triángulo ABC*

Demostración. En efecto, por ser cíclico el cuadrilátero $BCEF$, los ángulos AEF y ABC son ambos complementarios del ángulo FEC, por lo que son iguales. De igual forma, $\angle AFE = \angle ABC$, así que los triángulos ABC y AEF son semejantes. Y lo mismo puede hacerse con los triángulos DBF y DEC.

Propiedad 2. *Si H es el ortocentro de un triángulo ABC y las alturas AH, BH, CH cortan a la circunferencia circunscrita a ABC en D', E', F', entonces se cumplen las igualdades: $HD = HD'$, $HE = HE'$, $HF = HF'$.*

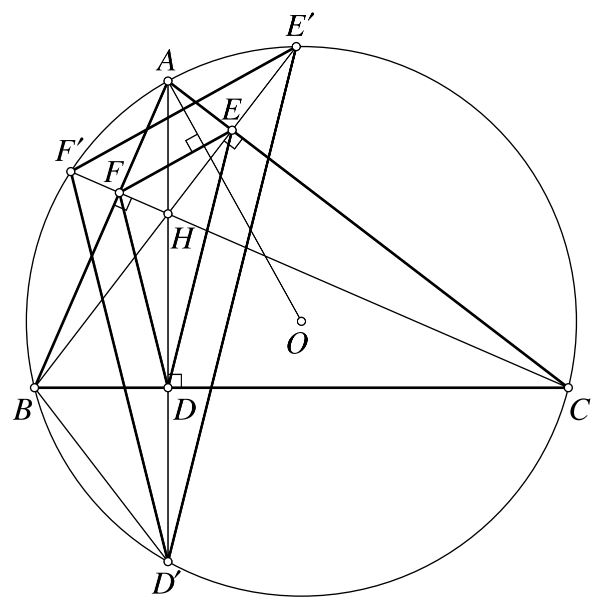

Figura 2

Demostración. Por ejemplo, en el triángulo BHD' tenemos

$$\angle BHD = \angle BFD = \angle C = \angle BCA = \angle BD'A = \angle BD'H.$$

En consecuencia, el triángulo BHD es isósceles, y su altura BD tambien es su mediana, por lo que $HD = HD'$.

Propiedad 3. *El triángulo $D'E'F'$ es el resultado de aplicar al triángulo DEF una homotecia de centro H y razón 2.*

Demostración. Por ser $HD = DD'$ es $HD' = 2 \cdot HD$ y lo mismo para los otros vértices.

Propiedad 4. *Cada vértice del triángulo ABC es el punto medio del arco determinado en la circunferencia circunscrita por las prolongaciones de las alturas trazadas desde los otros vértices.*

Demostración. Para obtener que A es el punto medio del arco $E'F'$ basta observar que por ser cíclico el cuadrilátero $BCEF$, tenemos

$$\angle ABE' = \angle FBE = \angle FCE = \angle F'CA.$$

Como consecuencia, obtenemos que la recta OA es perpendicular a la cuerda $E'F'$ y, por tanto, también es perpendicular al lado EF del triángulo órtico.

Propiedad 5. *El ángulo que forma el lado de un triángulo con el lado correspondiente del triángulo órtico es igual a la diferencia de los lados del triángulo dado adyacentes al lado considerado.*

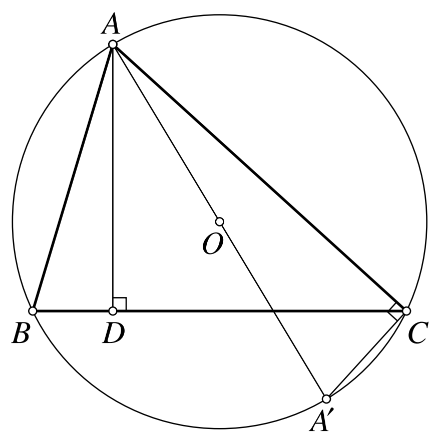

FIGURA 3

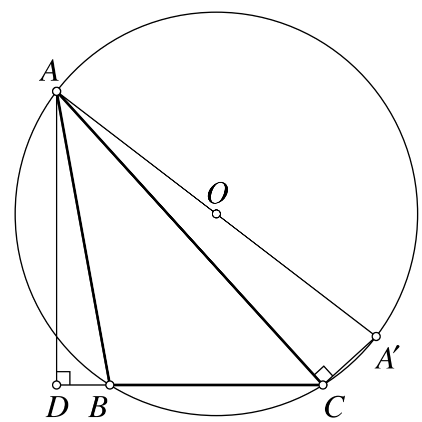

FIGURA 4

Demostración. En efecto, cuando el triángulo es acutángulo (ver Figura 3), el ángulo formado por el lado BC con el lado EF del triángulo órtico será el mismo que el formado por la altura AD (perpendicular a BC) con el diámetro AA' (perpendicular a EF). Por ser $\angle ABD = \angle ABC = \angle AA'C$, los triángulos rectángulos ABD y AKC son semejantes, y entonces

$$\angle DAA' = A - 2(90^\circ - B) = 180^\circ - (B + C) - 180^\circ + 2B = B - C.$$

En el caso de que, por ejemplo B sea obtusángulo, tenemos

$$\angle DAA' = A + 2\angle DAB = A + 2(B - 90^\circ) = (180^\circ - B - C) + 2B - 180^\circ = B - C.$$

Propiedad 6. *El triángulo tangencial y el triángulo órtico de un triángulo son homotéticos.*

Demostración. El triángulo tangencial es el triángulo formado por las rectas tangentes a la circunferencia circunscrita en los vértices del triángulo. Según hemos visto, los lados del triángulo órtico son perpendiculares a los correspondientes radios de la circunferencia circunscrita, y los lados del triángulo tangencial también lo son. De ahí, la propiedad.

Propiedad 7. *Las alturas de un triángulo bisecan los ángulos interiores del triángulo órtico.*

Demostración. En la Figura 2 vemos que la recta $D'A$ biseca el ángulo $E'D'F'$, y hemos visto que las rectas DE, DF son paralelas a $D'F'$, $D'E'$, así que la recta DA biseca el ángulo EDF. De otra forma, también podemos usar los cuadriláteros cíclicos $BDHF$, $BCEF$ y $CDHE$ para obtener

$$\angle HDF = \angle HBF = \angle EBF = \angle ECF = \angle ECH = \angle EDH.$$

Corolario. *Los lados del triángulo bisecan a los ángulos exteriores de su triángulo órtico.*

Demostración. Ya que los lados son perpendiculares a las alturas del triángulo, que son las bisectrices interiores del triángulo órtico.

Corolario. *Los vértices y el ortocentro de un triángulo son los centros tritangentes (incentro y excentros) de su triángulo órtico.*

Problema. *Construir un triángulo conociendo los puntos en que la prolongación de las alturas cortan a la circunferencia circunscrita.*

Solución. Aquí, Court dice que los puntos dados D', E', F' determinan la circunferencia circunscrita (O) del triángulo buscado ABC, cuyos vértices serán los puntos medios de los arcos $D'E'$, $E'F'$, $F'E'$, y también plantea la siguiente cuestión:

> ¿Cuántas soluciones puede tener el problema?

Para dar respuesta a esta cuestión vamos a considerar la Figura 5, que está construida como se explica a continuación.

Dado el triángulo acutángulo ABC con ortocentro H y circuncentro O, las alturas AH, BH y CH cortan a los lados BC, CA y AB, en los puntos

D, E y F, y a la circunferencia circunscrita en los puntos D', E' y F', respectivamente. Si aplicamos al triángulo ABC una homotecia de centro H y razón 2 obtendremos el triángulo $H_aH_bH_c$, siendo D', E', F' los pies de las alturas de este triangulo.

La circunferencia $D'E'F'$, siendo la circunferencia de los nueve puntos del triángulo $H_aH_bH_c$ contendrá a los puntos medios A', B', C' de los lados H_bH_c, H_cH_a y H_aH_b.

Observemos entonces que por ser $\angle AC'A' = \angle AD'A' = 90°$, la recta $C'A$ es perpendicular a $A'C'$ y por ello también perpendicular a H_cH_a y $B'H_a$, es decir, $B'H_a$ la altura del triángulo $AB'C'$ correspondiente al vértice B', y esta altura vuelve a cortar a la circunferencia circunscrita en E'. De igual forma, $C'H_a$ es la altura del triángulo $AB'C'$ correspondiente al vértice C', y esta altura vulve a cortar a la circunferencia circunscrita en F'.

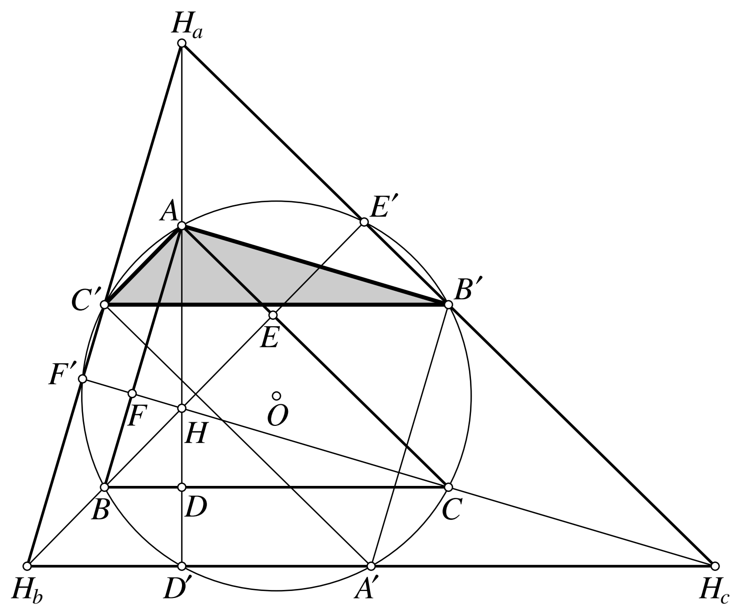

Figura 5

Resulta entonces claro que las alturas del triángulo $AB'C'$ vuelven a cortar a su circunferencia circunscrita en los mismos puntos en que lo hacen las alturas del triángulo ABC, por lo que los CUATRO triángulos ABC, $AB'C'$, $A'BC'$ y $A'B'C$ comparten los puntos D', E', F' de intersección de las alturas con la circunferencia circunscrita.

2. Ejercicios

1. Si O es el circuncentro y H es el ortocentro de un triángulo ABC, y AH, BH, CH cortan a la circunferencia circunscrita en D', E', F', demostrar que las paralelas por D', E', F' a OA, OB, OC, respectivamente, se cortan en un punto.

   Solución. La paralela por D' a OA será perpendicular a $E'F'$, es decir será una altura del triángulo $D'E'F'$. Por tanto, las paralelas por D', E', F' a OA, OB, OC, respectivamente, se cortarán en el ortocentro de $D'E'F'$.

2. Demostrar que (a) el producto de los segmentos en los que un lado de un triángulo queda dividido por el vértice correspondiente del triángulo órtico es igual al producto de los lados del triángulo órtico que pasan por el vértice considerado; (b) el producto de los seis segmentos en los que los lados de un triángulo quedan divididos por los pieds de las alturas es igual al cuadrado del producto de los tres lados del triángulo órtico.

   Solución. Para demostrar (a) usamos los triángulos semejantes DBF y DEC.

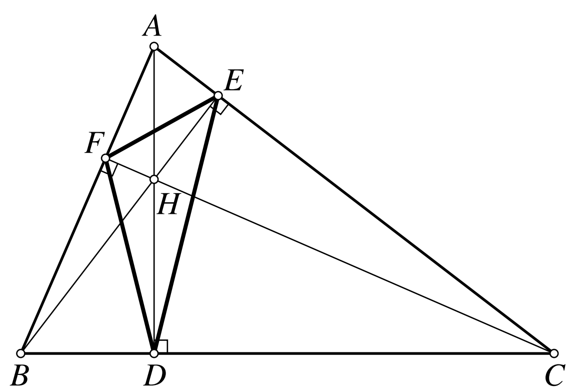

Figura 6

$$\frac{BD}{DF} = \frac{ED}{DC} \Rightarrow BD \cdot DC = DF \cdot ED.$$

Para demostrar (b) obtenemos expresiones similares para los otros vértices y las multiplicamos:

$$\begin{aligned} BD \cdot DC \cdot CE \cdot EA \cdot AF \cdot FB =& (DF \cdot ED) \cdot (ED \cdot FE) \cdot (FE \cdot DF) \\ =& (DF \cdot FE \cdot ED)^2. \end{aligned}$$

3. Si P, Q son los pies de las perpendiculares desde los vértices B, C del triangulo ABC sobre los lados DF, DE del triángulo órtico DEF, demostrar que $EQ = FP$.

   Solución. Con trigonometría tenemos:

$$\begin{aligned} EQ = CE \cdot \cos B =& (BC \cdot \cos C) \cdot \cos B \\ =& (BC \cdot \cos B) \cdot \cos C = FB \cdot \cos C = FP. \end{aligned}$$

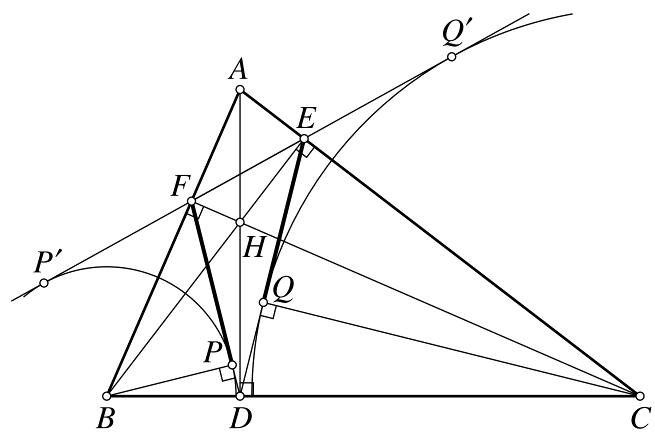

Figura 7

   De otra forma, B y C son excentros del triángulo DEF, y P y Q son puntos de contacto de las circunferencias exinscritas (B) y (C) al triángulo DEF y como es conocido, tenemos $EP' = FQ' = s$, siendo s el semiperímetro de DEF. Entonces, tenemos

$$FP = FP' = EP' - FE = s - FE = FQ' - FE = EQ' = EQ.$$

4. DP, DQ son las perpendiculares desde el pie D de la altura AD del triángulo ABC sobre los vértices AC, AB. Demostrar que los puntos B, C, P, Q son concíclicos y que $\angle DPB = \angle CQD$.

Solución. Para razonar que los puntos B, C, P, Q son concíclicos tenemos en cuenta que B, C, E, F lo son. Entonces, usando potencias, $AF \cdot AB = AE \cdot AC$. Ahora, usando los triángulos semejantes AEF y APQ,

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AP \cdot AC = AQ \cdot AB,$$

es decir, B, C, P, Q son concíclicos. A partir de aquí,

$$\angle DPB = \angle CPB - 90^\circ = \angle CQB - 90^\circ = \angle CQB.$$

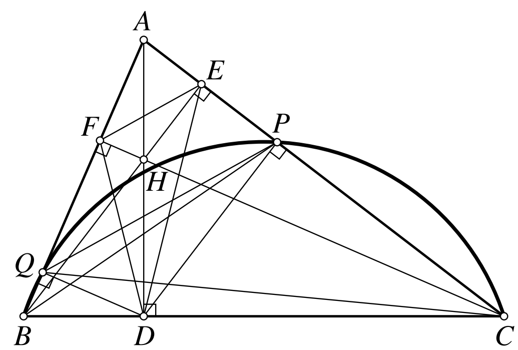

Figura 8

5. Demostrar que las cuatro proyecciones del pie de la altura sobre un lado de un triángulo sobre los otros dos lados y las otras dos alturas están alineados.

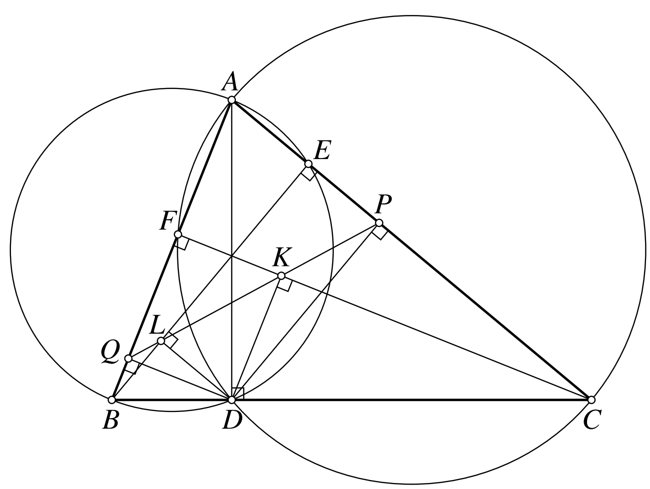

Figura 9

Solución. El pie D de la altura trazada por A es común a las circunferencias con diámetros AB y AC como diámetro. Los puntos L, P y Q son los pies de las perpendiculares trazadas por el punto D a los lados del triángulo ABE, por lo que están alineados (sobre la recta de Wallace-Simson del punto D respecto del triángulo ABE. De la misma forma, los puntos K, Q, P están alineados, ya que son los pies de las perpendiculares trazadas por el punto D sobre los lados CF, FA, AC del triángulo ACF. En consecuencia, los cuatro puntos K, L, P, Q están alineados.

6. Demostrar que el perímetro del triángulo órtico de un triángulo acutángulo ABC es menor que el doble de cualquier altura del triángulo ABC.

   Solución. Sea DEF el triángulo órtico de ABC y sean P, Q las proyecciones de D sobre las rectas CA y AB respectivamente. Llamemos R y S a los simétricos de D respecto de P, Q.

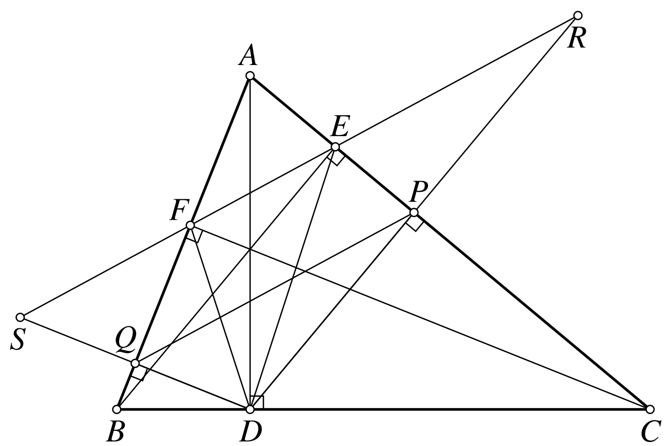

FIGURA 10

Por ser $\angle DEF = 2(90° - B)$ y $\angle DEC = B$, los puntos F, E, R están alineados, y lo mismo les ocurre a los puntos S, F, E. El perímetro p del triángulo órtico es

$$p = DF + FE + ED = SF + FE + ED = 2 \cdot QP < 2 \cdot AD$$

La desigualdad se debe a que, por ser $\angle DPA = 90° = \angle DQA$, el cuadrilátero $APDQ$ está inscrito en una circunferencia, de la que PQ es una cuerda y AD es un diámetro.

3. Algunas fórmulas interesantes

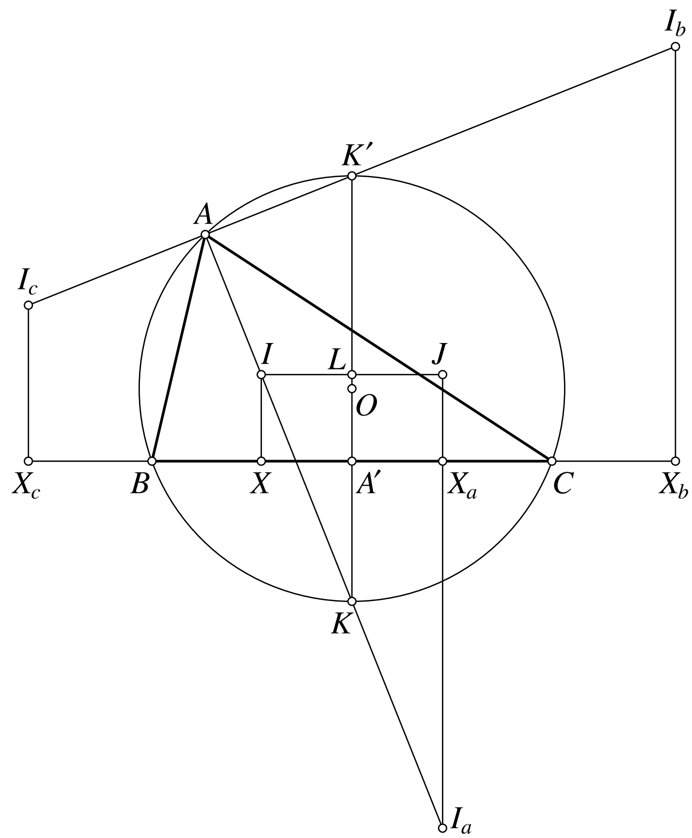

FIGURA 11

Sean A' el punto medio del lado BC (Figura 11), y sean X, X_a, X_b, X_c los puntos de contacto de la circunferencia inscrita y las circunferencias exinscritas. La recta paralela a BC por I corta al diámetro KK' en L y a la prolongación de I_aX_a en J.

El punto K es el punto medio del lado II_a del triángulo IJI_a, y entonces tenemos

$$KA' + r = KA' + A'L = KL = \tfrac{1}{2}I_aJ = \tfrac{1}{2}(I_aX_a + X_aJ) = \tfrac{1}{2}(r_a + r),$$

de donde

$$A'K = \tfrac{1}{2}(r_a - r). \tag{1}$$

Por otro lado, por ser $BXb = CXb = s$, K' es el punto medio del lado I_bI_c

del trapecio $I_bI_cX_cX_b$, resultando

$$A'K' = \frac{1}{2}(I_bX_b + I_cX_c) = \frac{1}{2}(r_b + r_c). \tag{2}$$

Sumando (1) y (2), $2R = KK' = KA' + A'K' = \frac{1}{2}(r_a - r) + \frac{1}{2}(r_b + r_c)$, es decir

$$4R = r_a + r_b + r_c - r. \tag{3}$$

Teorema de Carnot. *La suma de las distancias del circuncentro de un triángulo a los tres lados del triángulo es igual a la suma de los radios de las circunferencias circunscrita e inscrita.*

Demostración. En efecto, es $OA' = OK - A'K = R - \frac{1}{2}(r_a - r)$ y lo mismo para los otros vértices, $OB' = R - \frac{1}{2}(r_b - r)$ y $OC' = R - \frac{1}{2}(r_c - r)$. Sumando las tres cantidades,

$$\begin{aligned} OA' + OB' + OC' =& 3R - \frac{1}{2}\left(r_a + r_b + r_c - 3r\right) \\ =& 3R - \frac{1}{2}\left(4R + r - 3r\right) = R + r. \end{aligned}$$

4. Más propiedades del triángulo órtico

Propiedad 8. *La distancia de un lado de un triángulo al circuncentro es la mitad de la distancia del vértice opuesto al ortocentro.*

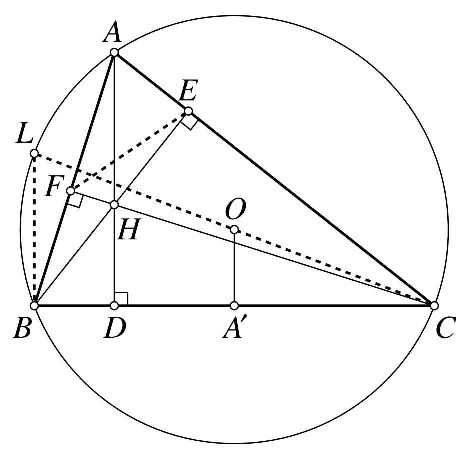

Figura 12

Demostración. Sea L el punto diametralmente opuesto al vértice C sobre la circunferencia circunscrita (Figura 12); el segmento OA' une los puntos medios de los lados del triángulo recto BCL, y de aquí $OA' = \frac{1}{2}BL$. Por otro lado, los lados opuestos del cuadrilátero $ALBH$ son respectivamente perpendiculares a las rectas AC, BC; por tanto $ALBH$ es un paralelogramo, y $BL = AH$, que es lo que se quería demostrar.

Propiedad 9. *En un triángulo las distancias de los vértices al ortocentro, incrementadas con los correspondientes exradios, son iguales.*

Demostración. Teniendo en cuenta (1) $A'K = \frac{1}{2}(r_a - r) \Rightarrow r_a - r = 2A'K = 2(OK - OA') = 2R - 2OA' = 2R - AH \Rightarrow AH + r_a = 2R + r.$

Propiedad 10. *La razón entre un lado de un triángulo y el correspondiente lado del triángulo órtico es igual la razón entre el radio de la circunferencia circunscrita y la distancia del lado considerado al circuncentro.*

Propiedad 11. *El segmento AH es el diámetro de la circunferencia circunscrita al triángulo AEF, y las rectas BC, EF son lados correspondientes en los triángulos semejantes ABC, AEF, de donde resulta*

$$BC : EF = 2R : AH = R : OA'.$$

Corolario. *Si DEF es el triángulo órtico de un triángulo acutángulo ABC y R, r son los radios de la circunferencia circunscrita e inscrita, respectivamente, entonces*

$$\frac{EF}{BC} + \frac{FD}{CA} + \frac{DE}{AB} = \frac{R + r}{r}.$$

Demostración. Usando la propiedad anterior y el teorema de Carnot,

$$\frac{EF}{BC} + \frac{FD}{CA} + \frac{DE}{AB} = \frac{OA'}{R} + \frac{OB'}{R} + \frac{OC'}{R} = \frac{R + r}{R}.$$

Propiedad 12. *El perímetro del triángulo órtico de un triángulo acutángulo es igual al doble del área del triángulo dividido por el radio de la circunferencia circunscrita.*

Demostración. Según la propiedad 11, llamando S al área del triángulo ABC,

$$EF + FD + DE = \frac{BC \cdot OA' + CA \cdot OB' + AB \cdot OC'}{R} = \frac{2S}{R}.$$

Problema. *Construir un triángulo dados en posición las trazas D, U, A' sobre la base del triángulo de la altura, la bisectriz interior y de la mediana trazadas desde el vértice opuesto, y la distancia d de ese vértice al ortocentro.*

Solución. Sobre la perpendicular a DUA' en A', levantamos $A'O = \frac{1}{2}d$ obteniendo el circuncentro O del triángulo buscado. El punto A estará sobre la perpendicular a DUA' trazada por D. Según vimos en la demostración de la Propiedad 5, la bisectriz del ángulo A también debe ser bisectriz del ángulo DAO, por lo que el punto A debe estar en la recta tangente desde O a la cirucnferencia con centro U que pasa por D. De esta manera, el vértice A queda determinado. La circunferencia con centro O y radio OA cortará a la recta DUA' en los dos vértices B y C del triángulo buscado.

5. Más ejercicios

7. En el triángulo ABC demostrar que: $AH^2 + BC^2 = 4OA^2$.

   Solución. Con la misma notación que antes,

   $$AH^2 + BC^2 = 4OA'^2 + 4BA'^2 = 4OB^2 = 4OA^2.$$

8. Construir un triángulo dados en posición un vértice, el punto medio del lado opuesto y el ortocentro.

   Solución. Como el segmento AH es el doble del segmento OA', trazamos por A' una paralela a AH y sobre ella marcamos el punto O cumpliendo $A'O = \frac{1}{2}HA$, lo cual determina el circuncentro O. Trazando la circunferencia con centro O y radio OA, y hallando su intersección con la perpendicular a AH por A' obtendremos los dos vertices restantes del triángulo buscado.

9. Construir un triángulo dados en posición la circunferencia circunscrita, el ortocentro y la longitud de un lado.

Solución. Suponemos conocido en posición la circunferencia circunscrita, con centro O y radio R, el ortocentro H y la longitud a del lado BC. Teniendo en cuenta la fórmula $AH^2 + BC^2 = 4OA^2$, es decir, $AH^2 + a^2 = 4R^2$, trazamos una cuerda cualquiera PQ de longitud a sobre la circunferencia y el diámetro PP'. Entonces, la longitud QP' será igual a AH. Esto permite localizar el vértice A, trazando una circunferencia de centro H y radio QP', que cortará en general en dos puntos a la circunferencia dada. Una vez hallado el vértice A, tenemos en cuenta que los segmentos AH y OA' son paralelos y uno el doble del otro, lo que permite determinar A', punto medio del lado BC. Por A' trazamos una perpendicular a la recta AH y tendremos la recta BC, que cortará a la circunferencia dada en los dos vértices restantes del triángulo buscado.

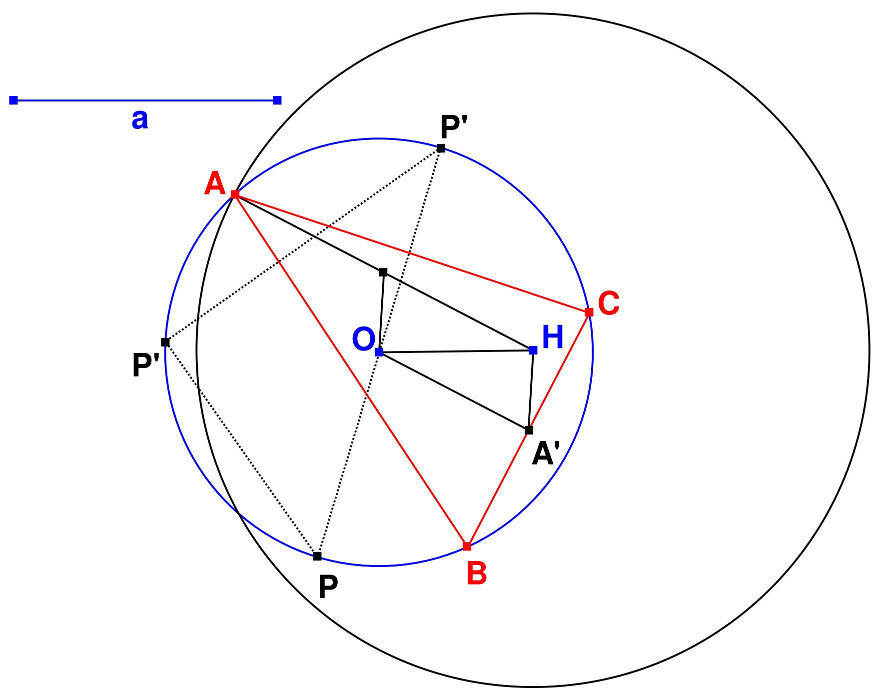

FIGURA 13

Discusión. Para que el problema tenga solución es necesario que la circunferencia dada y la circunferencia con centro H y radio QP' tengan puntos en común. Puede comprobarse que ello ocurre si y solo si se cumplen las condiciones siguientes:

$$OH \leqslant 3R, \quad |a^2 + OH^2 - 3R^2| \leqslant 2R \cdot OH.$$

10. Construir un triángulo dados el radio de la circunferencia circunscrita, la distancia de un vértice al ortocentro y la longitud de la mediana trazada desde ese vértice.

    Solución. Suponemos conocido el radio R de la circunferencia circunscrita, la distancia $2d$ del vértice A al ortocentro y la longitud m_a de la mediana trazada desde A. Sobre una recta cualquiera r, fijamos un punto A' que va a ser el punto medio del lado BC. Por A' levantamos una perpendicular $A'O$ a dicha recta, de longitud d, con lo que O será el circuncentro del triángulo buscado. Con centro O y radio R trazamos una circunferencia, que será la circunferencia circunscrita al mismo. Para determinar el vértice A tenemos en cuenta que $m_a = AA'$ es conocida, por lo que trazamos una circunferencia con centro A' y radio AA', que encuentra a la circunferencia (O) en las posibles posiciones del vértice A. Los vértices B y C se obtienen como intersección de la circunferencia (O) y la recta r.

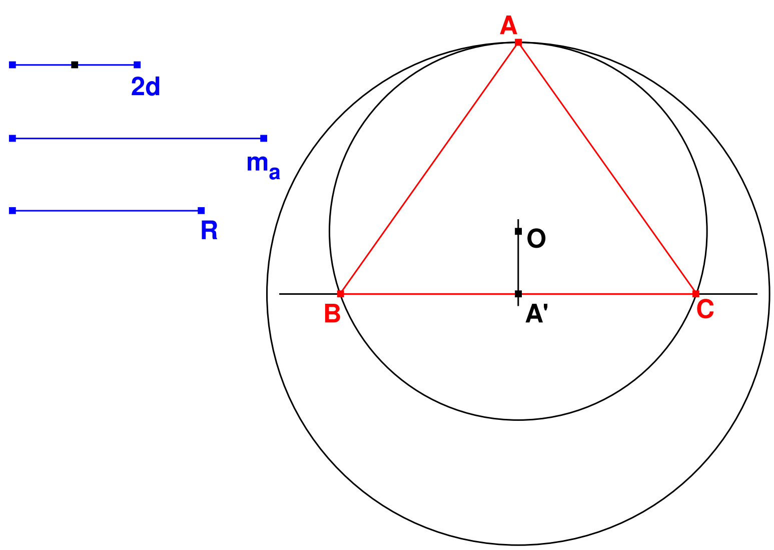

Figura 14

Discusión. Para que el problema tenga solución es necesario que las circunferencias (O) y (A') de la construcción tengan puntos comunes.

Ello ocurrirá si y solo si las longitudes d, m_a y R forman triángulo, aunque éste sea degenerado, es decir, aunque alguna de ellas sea la suma de las demás.

11. Construir un triángulo conociendo la base, la distancia del vértice opuesto al ortocentro y el radio de la circunferencia inscrita.

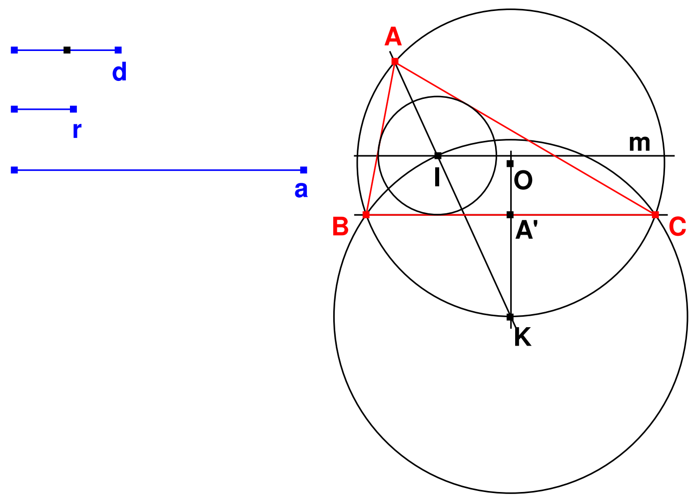

Figura 15

Solución. Suponemos conocida la longitud a de la base BC, la distancia $2d$ del vértice A al ortocentro H y el radio r de la circunferencia inscrita. Comenzamos por fijar sobre una recta cualquiera dos puntos B y C tales que $BC = a$. Hallamos el punto medio A' de BC y por el levantamos una perpendicular $A'O$ de longitud $\frac{1}{2}d$, de manera que O será el circuncentro del triángulo buscado. Con centro en O y radio OB podemos trazar la circunferencia circunscrita al triángulo buscado. Al prolongar el segmento OA' encontramos el punto K sobre esta circunferencia. Sabemos que K es centro de una circunferencia que pasa por los vértices B y C y por el incentro I. Como conocemos el radio r de la circunferencia inscrita podemos trazar una recta m a distancia r de la recta BC y por el lado contrario de ésta al que está el punto K. Esta recta cortará a la circunferencia (K) en el incentro I (en general aparecerán dos puntos simétricos respecto de la recta OA'). La recta KI cortará a la circunferencia (O) en el vértice A del triángulo buscado.

Discusión. Además de la condición evidente $a > 2r$, para que el problema tenga solución es necesario que la circunferencia (K) corte a la recta m, y esto ocurrirá siempre que sea

$$d \geqslant \frac{24a^2r^2 - a^4 - 16r^4}{8r(a^2 - 4r^2)}.$$

12. Una segmento variable de longitud constante tiene sus extremos en dos rectas secantes fijas. Demostrar que el lugar geométrico del ortocentro del triángulo variable formado por las tres rectas es una circunferencia.

    Solución. En el triángulo variable sean A el ángulo formado por las dos rectas y a el lado variable de longitud constante. Entonces, por ser $a = 2R \operatorname{sen} A$, el radio de la circunferencia circunscrita es constante, y usando la fórmula $AH^2 + BC^2 = 4 \cdot OA^2$, la distancia de A al ortocentro H también será constante, es decir H estará en una circunferencia de centro A.

13. La base BC y la circunferencia circunscrita (O) de un triángulo variable ABC son fijos. Hallar el lugar geométrico del ortocentro del triángulo que tiene por vértices las trazas sobre (O) de las bisectrices interiores de los ángulos de ABC.

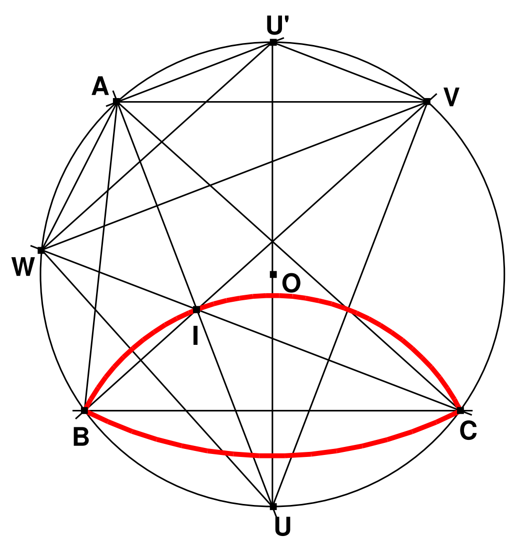

Figura 16

Solución. Supongamos que las bisectrices del ángulo ABC cortan a la circunferencia (O) en los puntos U, V, W. En la Figura 16 hemos trazado el diámetro UU' formando el ángulo recto UAU'. Entonces, siendo $\angle UAC = \frac{1}{2}A$ y $\angle CAV = \frac{1}{2}B$, resulta que

$$\angle VAU' = 90^\circ - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}C = \angle ACW = \angle AU'W,$$

la cuerda VW será paralela a la cuerda $U'A$, y por tanto perpendicular a la recta UA. Esto indica que UA es una altura del triángulo UVW. De la misma forma, VB y WC son también alturas, por lo que el ortocentro de UVW es el incentro I de ABC. Al variar A sobre la circunferencia sabemos que I describe arcos de circunferencia con centros en U y U', y pasando por B y C, y estos dos arcos son el lugar geométrico buscado.