Una propuesta metodológica de introducción temprana del concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente vía el asistente matemático

Pedro Vicente Esteban Duarte (pesteban@eafit.edu.co)
Pedro Pérez Carreras (pperezc@mat.upv.es)

Universidad EAFIT, Medellín, Colombia
Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España

Resumen

El propósito de este artículo es exponer una metodología para enseñar el concepto de aproximación local en su manifestación de recta tangente a una curva plana en un punto, a partir de la visualización que se obtiene del haz de secantes, entendiéndolo como el conjunto de rectas que pasan todas por un punto fijo de la curva y por otros sobre la curva cada vez más cercanos al punto dado. El concepto de aproximación local es un tema central en el análisis matemático y su enseñanza en una edad temprana ayudará a que los alumnos adquieran un avanzado nivel de razonamiento. La visualización que se propone, se obtiene con la ayuda del asistente matemático *DERIVE®* y no requiere de manipulaciones algebraicas que entorpezcan el razonamiento que los alumnos deben desarrollar y exhibir a lo largo del proceso. El material que se expone, está diseñado para ser cubierto en una clase, en la cual el profesor sirva de orientador, formulando preguntas y respondiendo inquietudes en el momento oportuno.
Palabras y frases claves: Haz de secantes, proceso de aproximación local, visualización, niveles de razonamiento, pendiente, derivada.

Abstract

The proposal of this paper is the exposition of methodology for teaching local approximation concept by the existence of a tangent line to a curve at a point from visualization gotten of the secant rays, to be understood as the set of lines which pass through a fixed point of the curve and for another points close enough this one. The local approximation is a main topic in the mathematical analysis and its teaching in an early age will help the students to acquire an advanced mathematical thinking. About this concept, the visualization proposed is gotten from the mathematical assistance *DERIVE®* and it is not required of algebraically manipulations that may obstruct the reasoning which the student must develop and show through the process. The material exposed is designed to be covered through a class in which the teacher is a guide, making and answering questions opportunely.

Keywords: Secant rays, local approximation process, visualization, levels of reasoning, slope, derivative.

1. Introducción

El concepto de aproximación local es el tema central del Análisis Matemático y una de sus manifestaciones más primitivas en el contexto geométrico es el concepto de recta tangente a una curva plana en un punto.

La idea de qué es una recta tangente se aborda en la escuela elemental en relación a la circunferencia interpretada de forma estática y no como el producto final de un proceso indefinido de aproximaciones locales cada vez más ajustadas. Al finalizar la educación secundaria, y en relación al concepto de derivada de una función en un punto, vuelve a considerarse la recta tangente como una interpretación, por un lado, de su utilidad a la hora de computar la pendiente de esa recta tangente y, por otro, de ilustrar la definición abstracta de derivada, pero sin definir qué es la recta tangente, utilizando la idea intuitiva que el alumno tiene de ella (pero en relación a pedazos de curva que son esencialmente arcos de circunferencia).

Nuestro objetivo es discutir el concepto de recta tangente sin relación al concepto de derivada, evitando así la madurez algebraica necesaria y permitiendo una introducción temprana a la idea de aproximación local. Naturalmente, en este proceso el alumno acabará pidiendo una "definición" de recta tangente, al confrontarse con situaciones en donde la recta producto final de aproximaciones sucesivas ya no conforma con su idea estática previa de lo que debe ser, permitiendo así asignar rectas tangentes a curvas más complejas que las habituales. Utilizando el Asistente Matemático *DERIVE*®, la visualización propuesta se obtiene a partir de la construcción de un haz de secantes [1], que pasa por un punto fijo de una curva plana y por otros puntos sobre ella cada vez más cercanos al punto. Las preguntas y respuestas de alumnos que aparecen en la propuesta que sigue están sacadas de las que aparecieron habitualmente entrevistando a más de doscientos alumnos de Bachillerato y Universidad.

2. Elementos básicos de estudio

Antes de iniciar la construcción del haz de secantes, se requiere que el alumno reconozca los objetos básicos de estudio: punto, recta y curva visualmente [3], pero desde el punto de vista de cómo los matemáticos y físicos idealizan la realidad: el punto y la recta no tienen ningún grosor, la línea recta sólo tiene la dimensión de la longitud y que las curvas, unas pueden ser cerradas, otras abiertas y que la línea recta es un tipo especial de curva que se extiende indefinidamente en una sola dirección. Para sentar las bases de razonamientos posteriores, el profesor preguntará al alumno por la idea intuitiva que tiene acerca de los objetos de estudio. Al alumno que piense que el punto y la recta tienen algún grosor, el profesor le precisará el carácter ideal de estos objetos.

3. Relaciones entre los elementos básicos de estudio

Como en la propuesta metodológica que proponemos no se requieren los aspectos métricos del problema, no se requiere que las gráficas se dibujen con cuadrículas o con ejes coordenados y, así, desactivamos estas opciones en la ventana gráfica de *DERIVE.*

3.1 Relación punto–recta

Recordaremos al alumno que por dos puntos en el plano pasa una sola recta: en el editor de ecuaciones de *DERIVE*® introduciremos la expresión **[2, [-1, 2], [1, 2]]** y al representar, se obtiene en la pantalla la recta $y = 2$ y los puntos $(-1, 2)$ y $(1,2)$ resaltados. En este momento, preguntamos al alumno si es posible trazar otra línea recta que sea distinta de la que está dibujada y que pase por esos mismos dos puntos. La respuesta deseada es que no es posible. A aquellos alumnos que respondan afirmativamente se hace necesario recalcarles nuevamente las propiedades ideales de punto, recta y curva.

3.2 Relación punto-curva

Para una curva plana particular y un punto fijo sobre ella, el alumno debe percatarse que existen puntos sobre la curva cada vez más cercanos a éste, bien sea desde la derecha o desde la izquierda. Esta visualización se puede obtener mediante las siguientes ordenes en el editor de ecuaciones de *DERIVE*®:

F(x):=
PUNTOS(h, n):= VECTOR([b, F(b)], b, VECTOR(a + h/(1.2^m), m, VECTOR(i, i, 0, n-1)))
a:= a0
[a, F(a)]

F(x):= es la expresión analítica de la curva que se quiere representar. La función de *DERIVE*® **PUNTOS(h, n)** permite encontrar y representar puntos sobre la curva de expresión F(x), una vez elegida una F(x) concreta. El parámetro **h**, cuando **h** es positivo, define el valor x = a + h desde el cual se comienza el acercamiento al valor x = a desde la derecha. El parámetro **n** es el número de puntos (b, f(b)) que se quieren dibujar sobre la curva. El valor a = a0 define el punto (a0, f(a0)), el cual es el punto fijo de referencia sobre la curva.

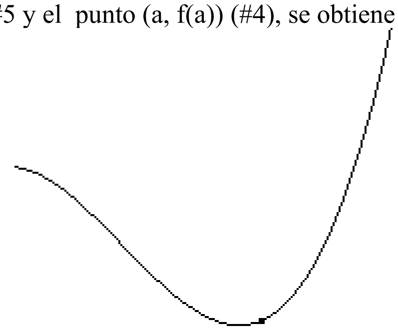
La función F(x): = 0.3(x –1)(x + 2)(x + 3) y para valores de x > -2.5 será escrita en el editor de ecuaciones como

F(x):= IF(x > -2.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))

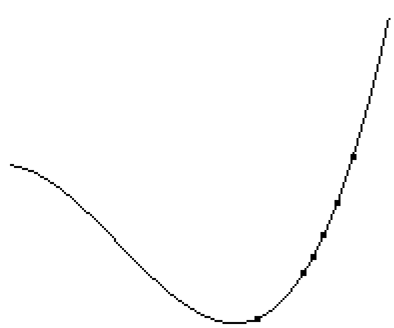
Al tomar un valor particular para **a**, digamos 0.1 y un **h** positivo igual a 1 y un **n** igual a 5, escribimos en el editor de *DERIVE*® las siguientes instrucciones:

#1 F(x):=
#2 PUNTOS(h, n):= VECTOR([b, F(b)], b, VECTOR(a + h/(1.2 ^ m), m, VECTOR(i, i, 0, n – 1)))
#3 a:= 0.1
#4 [a, F(a)]
#5 F(x):= IF(x > -2.5, 0.3(x - 1)(x + 2)(x + 3))
#6 PUNTOS(1, 5)

Al representar la ecuación #5 y el punto (a, f(a)) (#4), se obtiene la ilustración siguiente:



Al simplificar la expresión # 6 y representarla, se obtiene la siguiente ilustración:



En este momento, se le pregunta al alumno: *¿Cuántos puntos más se podrán trazar sobre la curva, de tal forma que se acerquen cada vez más al punto fijo dado?*. Se le motiva para que él mismo, con la instrucción **PUNTOS(h, n**) represente otros puntos sobre la curva, cada vez más cercanos al punto fijo. Para ello, debe mantener la **h** fija en 1 y la **n** variando de acuerdo con el número de puntos que quiere dibujar. Por ejemplo: Ejecutar las ordenes **PUNTOS(1, 10), PUNTOS(1, 20)**, etc., simplificando y representando en cada caso o bien viendo la progresión de más y más puntos con la instrucción

VECTOR(PUNTOS(1,n),n,[10,20,30,40])
Simplificar

El profesor, después de que el alumno haya hecho algunos ensayos, debe de repetir la pregunta anterior. Teniendo en cuenta el carácter ideal de los objetos geométricos, la respuesta deseada de los alumnos es: *"Se pueden trazar tantos puntos como se quiera cada vez más cercanos al punto fijo dado"*. Cabe anotar, que si el alumno manifiesta que solamente se puede dibujar un número finito de puntos, indica que su razonamiento está guiado más por el aspecto visual que por la abstracción. Es necesario insistirle que dibuje un número de puntos cada vez mayor con el propósito de que perciba el aspecto indefinido subyacente en este proceso.

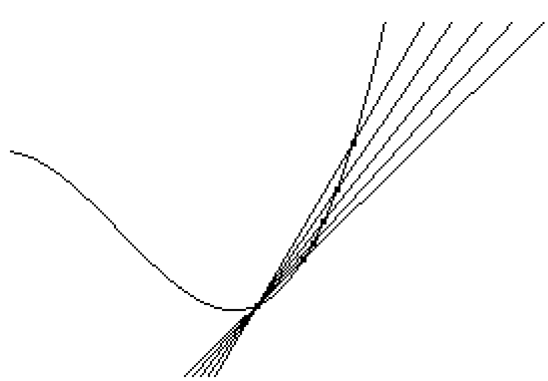
El proceso anterior, debe también ilustrarse partiendo desde la izquierda del punto mismo punto fijo dado. Para ello le damos un valor negativo a **h**, digamos –1, y si el número de puntos que queremos trazar es 10, ejecutamos la siguiente instrucción: **PUNTOS(-1, 10)**. Es importante hacerle notar a los alumnos que, para esta gráfica y para ese punto fijo, las conclusiones que se obtienen al efectuar el proceso de acercamiento por un lado o por el otro son las mismas. Luego, le pedimos que conjeture si sucede lo mismo para cualquier curva y cualquier punto sobre ella.

3.3 Relación recta-curva

La relación que interesa establecer entre las rectas y la curva es la de secante [4], para ello definimos la siguiente función de *DERIVE*®:

SECANTE(h, n):= VECTOR((F(a)-F(b))/(a-b)(x-a) + F(a), b, VECTOR(a + h/(1.2^m), m, VECTOR(i, i, 0, n –1)))

Los parámetros **a**, **h**, y **n** tienen el mismo sentido que los dados para la instrucción **PUNTOS(h, n)**, sólo que en este caso, la **n** significa el número de secantes que se quieren trazar. Todas estas secantes pasan por el punto (a, f(a)) y por los puntos móviles (b, f(b)), que se acercan cada vez más al punto fijo (a, f(a)). El valor **b** depende de **h** y **n**. Por ejemplo, si se quieren trazar cinco secantes que pasen todas por el punto fijo (0.1, f(0.1)) y por puntos (b, f(b)) cada vez más próximos al punto fijo, se da orden **SECANTE(1, 5)**, se simplifica y representa, obteniendo la siguiente ilustración:



Se le propone que trace otras secantes sobre la misma gráfica**: SECANTE(1, 20), SECANTE(1, 30)** y se le pregunta*: "Si continuamos con este proceso, ¿cuántas rectas secantes más se podrán trazar, de tal forma que pasen por el punto fijo y por puntos sobre la curva cada vez más cercanos a él?*. La respuesta deseada es que*: "De esta forma se pueden trazar un número indefinido (infinito) de secantes"*. De nuevo, el alumno que responda que sólo se pueden trazar un número finito de secantes, nos está indicando que su razonamiento está motivando únicamente por lo que ve y no está haciendo abstracción alguna. Se le motiva a que represente más secantes para conducirlo a admitir la infinitud del proceso.

Con esta última ilustración en la pantalla del ordenador, se le formula la siguiente pregunta: Si continuamos este proceso*, ¿qué tendencia se puede atribuir al haz de secantes?*. La respuesta deseada es que al continuar con el proceso, el haz de secantes tiene vocación de estabilizarse en una línea recta, que no es sobrepasada por ninguna de las secantes o respuestas equivalentes, entendiendo la estabilización como un "tope" no sobrepasable. También es posible que incorporen al haz (proceso) su estabilización, implícitamente aceptando que, aunque el proceso es indefinido, tiene un producto final, llegando incluso a identificar este producto final como la recta tangente a la curva en ese punto. Habrá que insistir en la infinitud del proceso a aquellos alumnos que perciben que la estabilización se puede alcanzar después de haber trazado un número finito de secantes, dando a entender claramente que su razonamiento está influenciado por lo que están viendo en la pantalla del ordenador (a no ser que partamos inicialmente de una recta).

Cabe resaltar que el alumno puede obtener las mismas conclusiones (estabilización en un mismo producto final) trazando secantes desde la izquierda del punto fijo. Se recomienda cambiar el color de las secantes, para poder estudiar la zona en la cual los dos haces *parecen* juntarse. El alumno debe inferir que la *supuesta* recta de estabilización separa los haces de secantes y es única.

4. Concepto-imagen de tangente

Independientemente de nuestro tratamiento anterior, es importante explorar lo que el alumno piensa acerca de qué es una recta tangente y en qué situaciones visualmente la identifica [5].

Pretendemos explorar, en la nomenclatura de Tall, cuál es su concepto-imagen: la estructura cognitiva asociada con un determinado concepto matemático incluye todas las imágenes mentales, representaciones visuales, experiencias e impresiones, así como propiedades y procesos asociados y ha ido emergiendo con el tiempo mediante experiencias de todos los tipos, cambiando a medida que el individuo recibe nuevos estímulos y madura e influyéndose por desviaciones, aparentemente triviales, de un entendimiento válido. A medida que este concepto-imagen se desarrolla, no resulta necesario que sea coherente en cada momento. Así, resulta posible que visiones conflictivas sean evocadas en tiempos diferentes, sin que el individuo sea consciente del conflicto, hasta que son evocadas simultáneamente. En lo que nos ocupa, el concepto-imagen que traiga el alumno a la experiencia educativa será previsiblemente con la situación estática de recta tangente a una circunferencia. Comenzamos nuestra exploración representando las gráficas de las siguientes funciones:

G(x):= IF(x<-0.5, 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3))
F(x):= 0.5·x – 2

La pregunta sobre cuál es la relación existente entre curva y recta producirá como respuesta previsible que la recta corta a la curva, o alguna otra expresión equivalente. Algunos alumnos responderán que la recta es tangente a la curva, y al pedirles matización, darán como respuesta que recta y curva tienen un solo punto de contacto. El profesor debe continuar la exposición, sin hacer ningún comentario al respecto, pues el objetivo que se persigue es que los alumnos, por si mismos, encuentren una manera de justificar sus respuestas.

Presentamos la siguiente gráfica:

G(x):= IF(-3.8<x<1.5, 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3))

F(x):= 0.5·x – 2.5

Y nuevamente se pregunta la relación entre curva y recta. La respuesta deseada es que entre curva y recta no existe ninguna relación, pero si la curva se prolonga, podrían cortarse en algún punto. Algunos alumnos dirán simplemente que curva y recta no tienen relación alguna y se negarán a admitir que la curva se pueda prolongar. A estos alumnos se les sugiere que representen el polinomio en un intervalo más amplio y se aseguren de esa posibilidad. Se les sugiere el intervalo (-5, 5).

Ahora, se le pide que represente

G(x):= 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3)
F(x):= 25x/82-73/41

para proceder con la pregunta de si piensa que la recta es tangente a la curva. La respuesta deseada es*: "En una parte de la curva seguro que no y en la otra puede que sea tangente*". Pero, la mayoría de los alumnos responderán que la recta es tangente a la curva en la parte derecha. Al pedirles una explicación, dirán "*la recta toca a la curva en un solo punto*" [5], por lo tanto, están respondiendo desde su concepto-imagen de tangente a una circunferencia. Estos alumnos todavía no perciben que la relación de tangencia es una propiedad local. Pero nuestro objetivo es que comprendan esta peculiaridad y logren reformular su concepto-imagen. Por lo tanto, se les pide que dibujen la curva por trozos, con las siguientes instrucciones:

G(x):= IF(-5 < x < -1, 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3))
F(x):= 25x/82-73/41
G(x):= IF(-1 < x < 5, 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3))
F(x):= 25x/82-73/41

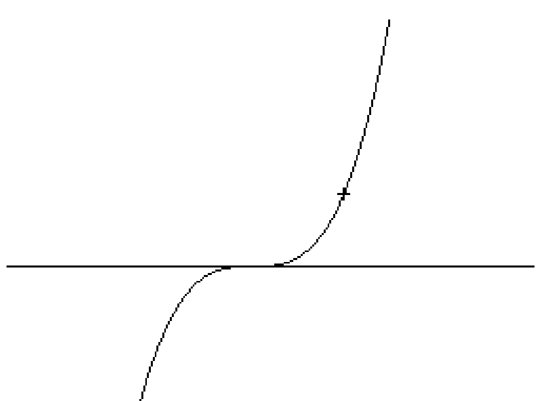
Y para cada caso se pregunta: ¿La recta es tangente a la curva?. La respuesta generalizada es: "La recta corta la curva en la primera situación y es tangente en la segunda". Es necesario señalarles que en cada caso, se están viendo trozos de la misma curva y la misma recta. Luego, el profesor preguntará: ¿Si la *recta fuera tangente* a la curva en alguno de sus puntos, se podría dar el caso que a la vez fuera tangente en algunos puntos y en otros secante?. Se finaliza la exploración del concepto-imagen con la siguiente pregunta: *¿Cómo podríamos estar siempre seguros de que una recta es tangente a una curva?*. El propósito de las preguntas anteriores es que el alumno comprenda el aspecto de la *localidad* de la tangencia.

5. Relación haz de secantes – tangente

Los objetivos que perseguimos son que el alumno:

a. Perciba que el concepto de recta tangente a una curva es más amplio que el de tangente a una circunferencia.
b. Entienda la necesidad del *proceso de aproximación* para asegurarse cuándo una recta es o no tangente a una curva en un punto dado.
c. Verbalice una definición adecuada (es decir, coincidente con lo que postula la teoría de la diferenciabilidad) de recta tangente, partiendo del mecanismo del haz de secantes.

Para que el alumno comience a reevaluar el concepto-imagen de tangente a una circunferencia se usa la gráfica que se obtiene con la instrucción **[x^3, 0, 0**]. El profesor comentará: *"Se observa una curva y una recta que tienen solamente un punto de corte"* [2].



y formula la siguiente pregunta: *¿Crees que la recta es tangente a la curva en el punto de corte?*. La respuesta deseada es afirmativa. Al ver la gráfica, el alumno que razona desde la parte visual, argumentará que la curva y la recta "coinciden" en un segmento (se les pediré que activen la instrucción **Zoom** centrada en el origen y se les volverá a preguntar), y por lo tanto, tienen más de un punto en común y la recta no puede ser tangente. Otros alumnos ven la curva dividida en dos partes, una por debajo de la recta y la otra por encima, manifestando que la recta es tangente a cada una de estas dos partes por separado, pero no a la curva en el punto señalado. Aquí, el profesor escucha los comentarios sin emitir ningún juicio. Antes de presentar la próxima gráfica, se le pregunta al alumno si puede describir un método que permita *determinar*, si una recta dada es o no tangente a una curva en un punto dado.

Las siguientes gráficas tienen como objetivo hacer que el alumno comience a relacionar el mecanismo del haz de secantes con la tangente. Se le pide que grafique las siguientes ecuaciones:

F(x):= IF(x > -2.5, 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3))
T(x):= (F(0.1) – F(0.25))/(0.1 – 0.25)(x – 0.1) + F(0.1)

El profesor hace la siguiente afirmación: *"La recta pasa por un punto de la curva"*. En lo que respecta al **concepto-definición** (la formulación convencional lingüistica que demarca precisamente las fronteras de aplicación del concepto [7]), esta afirmación es importante, como se comprobará cuando se dibujen haces de secantes que pasen por ese punto. El hecho de que una recta pase por un punto de una curva y tenga la "apariencia" de ser tangente, no garantiza la tangencia. Con estas gráficas en la pantalla del ordenador, se pregunta al alumno: *¿Crees que la recta es tangente a la curva?. ¿Por qué?*. La respuesta deseada es que: "*Partiendo solamente de lo que se ve en la gráfica no es posible determinarlo*", pero la mayoría de los alumnos responden afirmativamente dando como argumento que la recta pasa por un punto de la curva.

Independiente de las respuestas que se obtengan, se les pide que ejecuten las siguientes instrucciones: **SECANTE(1, 5), SECANTE(1, 10), SECANTE(1, 30),** etc... Para una mejor distinción entre la curva, la recta dada y las secantes, se utiliza el comando **Opciones** en la ventana gráfica que permite fijarle un color distinto a las secantes.

El hecho de dibujar los haces de secantes de forma progresiva le ayudará al alumno a entender que el proceso es indefinido y secuencial. Al ejecutar la última orden dada, se le pide que describa lo que observa, para luego preguntar *¿Qué significa el hecho de que la primera recta trazada esté dentro del haz de secantes?*. Es importante que al alumno le quede la *sensación* de que no se puede fiar de lo que ve, y que para poder emitir un juicio al respecto debe acudir al proceso del haz de secantes.

Con las siguientes expresiones, se obtiene la misma curva y dos rectas distintas que pasan por el mismo punto de ella.

F(x):= IF(x > -2.5, 0.3·(x - 1)·(x + 2)·(x + 3))
T(x):= ((F(0.1) – F(0.18))/(0.1 – 0.18)(x – 0.1) + F(0.1)
N(x):= 9·(305·x - 1007)/5000

Luego se formulan las siguientes preguntas: *¿Es posible que las dos rectas sean tangentes a la curva en el punto en cuestión?. ¿Es posible que ninguna lo sea?. En todo caso, ¿cómo se podrá salir de dudas?.* Tras esta bateria de las preguntas, muchos alumnos manifestarán que la forma de saber si las rectas son o no tangentes, es trazando un haz de secantes que pase por el punto en cuestión y por otros puntos sobre la curva cada vez más cercanos al punto dado y observando su evolución. Se les sugiere dar la orden **SECANTE(1, 20)** y que describan lo que ven en la pantalla. Las secantes dibujadas con esta orden superan la primera recta, pero no la segunda. Con esta ilustración, y a partir de la experiencia anterior, dirán que la primera recta es secante y se les pregunta *¿Cómo será posible salir de dudas acerca de la tangencia, o no, de la segunda recta?*. Se les sugiere que ejecuten las siguientes instrucciones: **SECANTE(1, 30), SECANTE(1, 50), SECANTE(1, 100)**, etc...

Para cada caso, se le solicita al alumno que describa el proceso que está haciendo y se le pregunta *¿Qué te sugiere el hecho que el haz de secantes parezca estabilizarse sobre la segunda recta?*. En este momento, el alumno debe de comprender que lo que realmente garantiza que una recta sea tangente a una curva en un punto es, además de tocar o cortar, ser el producto final del proceso indefinido del haz de secantes.

Es importante señalar que se pueden diferenciar dos tipos de razonamientos relacionados con la estabilización del haz de secantes: Los alumnos que razonan desde la parte visual, afirmarán que ese producto *final* se obtiene después de trazar un número finito de secantes, mientras que otros alumnos con un razonamiento más avanzado comprenderán el procucto *final* (la tangente) como la *estabilización* de un proceso indefinido (infinito).

La siguiente pregunta explora el progreso del lenguaje en el alumno a lo largo de la experiencia: *¿Es posible que en algún caso especial la tangente atraviese la curva en el punto de tangencia?*. La respuesta deseada es *afirmativa.* Además, algunos alumnos darán como ejemplo la gráfica **[x^3, 0, 0]**, estudiada anteriormente. Para confirmar este caso especial, se definen las siguientes fórmulas en el editor de *DERIVE®*:

a:= 0
F(x):= x^3
G(x):= 0

Y se comienza a efectuar el proceso de aproximación con las siguientes instrucciones: **SECANTE(1, 5), SECANTE(1, 20), SECANTE(1, 50)**, etc.

Al finalizar cada instrucción, se pregunta: *¿Cuál será la dirección de la recta en la cual se estabilizarán las secantes?*. El alumno que comprenda que la tangente es una recta de estabilización, aceptará sin mayor dificultad que ésta puede atravesar la curva en el punto de tangencia. Aquí, es necesario que el profesor haga un aporte de información confirmándole al alumno que la recta señalada es tangente a la curva en el punto dado. Es posible que la mayoría de alumnos, en este momento, puedan encontrar la dirección de la tangente, cuando esta exista, a una curva cualquiera en uno de sus puntos. Para confirmar esto, se propone que representen la siguiente función: **F(x):= x^2** y se pregunta: *Distinguiendo entre vertical, horizontal u oblicua, ¿cuál será la dirección de la tangente a la curva en el punto más bajo?*. La mayoría de los alumnos dirán que es horizontal. Luego, se les solicita justificación a su respuesta. Si han entendido el proceso, responderán: *"Porque al ubicarnos en el punto más bajo, tomar otro punto sobre la curva y efectuar el proceso del haz de secantes por puntos cada vez más próximos al punto elegido, el proceso indefinido (infinito) del haz de secantes se estabilizará en una recta horizontal"*. El alumno que no ha entendido el proceso y razona desde lo visual dirá: *"Que la tangente en el punto más bajo es horizontal, puesto que por ese punto es fácil trazar una recta que toque la curva en ese punto*". Esto significa que el alumno no ha superado el concepto-imagen de tangente a una circunferencia. Y menos aún, no ha comprendido que el mecanismo del haz de secantes es el proceso que permite saber con *certeza* (en este estadio de la propuesta metodológica) la dirección de la tangente a la curva en el punto señalado.

Mediante la instrucción **F(x):= If(x < 0, -(-x)^(1/3), x^(1/3))**, y la pregunta *¿Existe la recta tangente en el punto central de la curva?* y si la respuesta es afirmativa, el alumno debe determinar si la dirección es vertical, horizontal u oblicua. En todos los casos el alumno puede verificar su respuesta, ejecutando las instrucciones habituales: **SECANTE(1, 5), SECANTE(1, 20), SECANTE(1, 50)**, etc. Esto permitirá que el alumno observe nuevamente la tangente como el proceso de estabilización del haz de secantes. Esta es otra situación especial en la cual la tangente corta a la curva y su dirección es vertical. El alumno que continúe razonando desde su concepto-imagen de tangente a una circunferencia, manifiesta que la curva no tiene tangente en ese punto, argumentando que cualquier recta que pase por ese punto cortará la curva.

6. Definición de tangente

El lenguaje empleado por un alumno para referirse a un concepto matemático específico es uno de los indicadores del nivel de razonamiento en el cual se encuentra respecto del concepto estudiado (tal como postula, por ejemplo, el modelo educativo de los van Hiele). Es por ello, que la siguiente pregunta la formulamos sin referencia a ninguna gráfica en particular*: Supongamos que disponemos de un instrumento adecuado para trazar sucesivas secantes que pasen por un punto de una curva y* ***por puntos sobre la curva cada vez más cercanos a éste,*** *¿cuál será un método adecuado para trazar la tangente a la curva en ese punto?.* Algunos tipos de respuestas habituales se comentan a continuación.

6.1 Respuestas adecuadas

"Trazar secantes que pasen por el punto dado y por otros puntos sobre la curva cada vez más cercanos a él. La tangente es aquella recta a la cual se aproxima el haz de secantes cuando se estabiliza". Con esta respuesta, u otras equivalentes, el alumno manifiesta claramente que hace un uso riguroso del lenguaje y entiende que la tangente a una curva en un punto es el *final* de un proceso de aproximación indefinido (infinito). Con está respuesta, está manifestando que su razonamiento es avanzado respecto del concepto de tangente a una curva en un punto. El alumno ha hecho una cadena de elaboraciones mentales que le permite percibir este concepto como un proceso dinámico (paso al límite). Por lo tanto, es posible asegurar que el alumno comprenderá la formalización del concepto en el momento que se exponga a esa nueva situación. Es importante resaltar que el lenguaje utilizado en la respuesta es una manifestación de la integración del concepto-imagen y el concepto definición de tangente que el alumno ha asimilado hasta el momento [1].

6.2 Respuestas de alumnos que no han superado el concepto-imagen de tangente a una circunferencia

a. *"Dibujar una recta por el punto dado y luego trazar secantes para ver si se estabilizan en la recta inicialmente dibujada".* Esta respuesta no es adecuada porque el alumno no ha entendido que la tangente es el final del proceso de estabilización del haz de secantes. Sin embargo, sí ha entendiendo que el proceso del haz de secantes sirve como un mecanismo para confirmar si una recta dibujada es ó no tangente a una curva en un punto.
b. *"Trazar secantes hasta que una de ellas toque la curva en el punto dado".* Los alumnos que responden de esta manera no comprenden que el proceso del haz de secantes se efectúa partiendo del punto fijo dado y por otros sobre la curva cada vez más cercanos a este. Tampoco comprenden que el mecanismo del haz de secantes es un proceso de aproximación y continúan razonando desde su concepto-imagen de tangente a una circunferencia. Es decir, no perciben la noción de límite subyacente e inherente al concepto de tangente.

7. Ejercicios de confrontación

Los siguientes ejercicios tienen como objetivo detectar si los alumnos aplican la definición dada por ellos mismos. También, forzarlos para que exhiban su capacidad de razonamiento en el momento de determinar la existencia ó no de la tangente, en algunos puntos particulares de curvas especiales.

Inicialmente, se considera la siguiente curva F(x):= 2|x|^(1/2) que se obtiene con la orden **F(x):= 2SQRT(ABS(X)).** Luego se formula la pregunta *¿Cuál es la dirección de la recta tangente en el punto más bajo?.* La respuesta deseada es *"La dirección es vertical*". Se le pide que confirme sus respuestas dando alternadamente las instrucciones **SECANTE(1, n), SECANTE(-1, n**), sugiriendo valores grandes de n (dependiendo de la capacidad del ordenador).

El siguiente caso a considerar es la tangente a la curva **F(x):= x** en uno de sus puntos. Aquí se presenta una dificultad, pues la mayoría de las veces el alumno no considera una línea recta como un caso especial de una curva. Al pedirle que implemente el mecanismo de haz de secantes y pidiéndole que sea coherente con su concepto-imagen desarrollado hasta ahora, tendrá que admitir que ***la recta es tangente a sí misma en cada uno de sus puntos.***

Ahora, se considera el vértice de la función valor absoluto que se obtiene con la orden **F(x):= abs(x)**. *Si existe la tangente en el punto más bajo, ¿cuál será su dirección?*. Los alumnos que continúen razonando desde el concepto-imagen de tangente a una circunferencia, responderán *"Es cualquier recta que pase por ese punto*". Quienes hayan interiorizado el mecanismo y lo apliquen manifestarán: *"Que hay dos posibles candidatos a rectas tangentes, una para cada lado de la curva*" y si el profesor negocia con el alumno que conviene admitir que si la recta tangente existe, entonces debe ser única, afirmará que cómo no se obtiene una única recta de estabilización, entonces no hay recta tangente en dicho punto.

La facilidad con la cual el alumno encuentra la dirección de la tangente a las gráficas propuestas anteriormente y el lenguaje utilizado al dar sus repuestas, son indicadores de si se ha adquirido o no un nivel avanzado de razonamiento con respecto al concepto de aproximación local, en su manifestación de recta tangente a una curva plana en uno de sus puntos y su percepción de que está en fase de proporcionar una definición nueva de qué significa ser tangente a una curva.

8. Limitaciones del método

Estudiar las limitaciones del mecanismo del haz de secantes es importante porque a partir de ellas, se evidenciará la necesidad de una definición más allá de lo que una mera visualización pueda proporcionar. Esto posibilitará que el alumno pueda comprender y formalizar el concepto de derivada de una función en este punto como instrumento para determinar la pendiente de la recta tangente, excluyendo pendientes no finitas.

En la representación gráfica que produce la siguiente función, el aspecto visual del proceso del haz de secantes no es de gran ayuda ya que al dibujar haces de secantes cerca al origen, éstos *parecen* tener varias zonas de estabilización. Aquí se define la constante **a: = 0.1** y la función **F(x):= x^2SIN(20/(x^2))**.

Dado lo anterior, se le indica que realice en forma consecutiva las instrucciones **SECANTE(1, 20), SECANTE(1, 30), SECANTE(1, 50), SECANTE(1, 75), SECANTE(1, 100)** y en cada caso se pregunta: *¿La curva tiene tangente en el punto dado?, ¿Cuál será su dirección?*. El hecho de que visualmente parezca existir varias zonas de estabilización motiva a algunos alumnos a dudar de la unicidad de la tangente por lo tanto manifiesten *"que la curva, en el punto estudiado, tiene varias tangentes*" o, si han aceptado la unicidad, que no hay. Los estudiantes que tienen un nivel avanzado de razonamiento manifiestan *"Que se han trazado muy pocas secantes, y que debido a las oscilaciones alrededor del punto, las secantes cambian constantemente de dirección y que para determinar la dirección de la tangente, se tendrían que trazar un número mayor de secantes"*. Para salir de dudas, insistirán en trazar más secantes, pero en este caso no es posible obtener visualmente la respuesta, lo que les llevará a admitir que no pueden deducir su existencia.

El propósito de la pregunta es propiciar en el alumno una situación de incomodidad y conducirlo a evocar la necesidad de hallar un método alternativo (que no dependa de la visualización) que le permita determinar la existencia de la recta tangente a una curva en un punto dado y su dirección poniendo en evidencia que el mecanismo del haz de secantes no es suficiente para conjeturar este hecho en curvas como la anterior. Es así como se hace necesario plantear un nuevo proceso que tiene que ver con el cálculo computacional de hacer aproximaciones sucesivas del valor de las pendientes de las rectas secantes obtenidas con las instrucciones dadas anteriormente. Esto es posible hacerlo fácilmente con DERIVE®, el cual permite obtener un listado del valor de las pendientes de las rectas secantes que pasan por un punto fijo (a, f(a)) y por otros puntos (b, f(b)) sobre la curva cada vez más cercanos a él. Para ello se digita la orden:

PENDIENTE(h, n):= VECTOR((F(a)-F(b))/(a-b), b, VECTOR(a + h/(1.2^m), m, VECTOR(i, i, 0, n-1)))

9. Conclusiones

Para la asimilación efectiva de un concepto matemático se deben de tener en cuenta dos fases, una primera de proporcionar una visualización adecuada del concepto a estudiar, en la que los alumnos tienen un primer acercamiento al concepto sin manipulaciones algebraicas. La segunda es la formalización del concepto, en la cual la docencia tradicional centra todos sus esfuerzos. La enseñanza centrada en esta segunda fase hace más difícil que los alumnos progresen en su razonamiento y logren integrar y desarrollar relaciones con los demás conceptos estudiados. La presente propuesta metodológica está dirigida a la primera fase, es decir, a la construcción de un concepto-imagen adecuado que permita saltar al concepto-definición cuando se disponga de la madurez algebraica y lógico-deductiva necesarias.

Nuestra experiencia educativa siguiendo las pautas del modelo de van Hiele aplicado al concepto de aproximación local, del cual esta propuesta metodologíca es su fruto, nos permite asegurar que el 90% de los alumnos sometidos al proceso descrito pueden verbalizar una definición correcta de recta tangente a una curva en uno de sus puntos partiendo del haz de secantes, y sólo el 5% de los alumnos que siguen el curso de análisis con la metodología tradicional dan una definición de tangente a una curva en un punto a partir del concepto de derivada.

Bibliografía

[1] ESTEBAN, P. *Estudio Comparativo del Concepto de Aproximación Local Vía el Modelo de van Hiele*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.

[2] ESTEBAN, P., LLORENS, J. L. *Aplicación del Modelo de van Hiele al Concepto de Recta Tangente a Través del "Haz de Secantes"*, Matemática & Educación, v. 3, n. 1 y 2, p. 49-60, 1999.

[3] LLORENS, J. L., PÉREZ CARRERAS, P. *An Extension of van Hiele's Model to the Study of Local Approximation*, Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. 28 No. 5, 713-726, 1997.

[4] PÉREZ CARRERAS, P. *Matemática Asistida por Ordenador*, *Cálculo Infinitesimal* SPUPV 416, Valencia, 2000.

[5] VINNER, S. *The Role of Definition in the Teaching and Learning of Mathematics*, Advanced Mathematical Thinking, Cap. 5, p. 65 – 81. Kluiwer Ac. Pub., 1991.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI