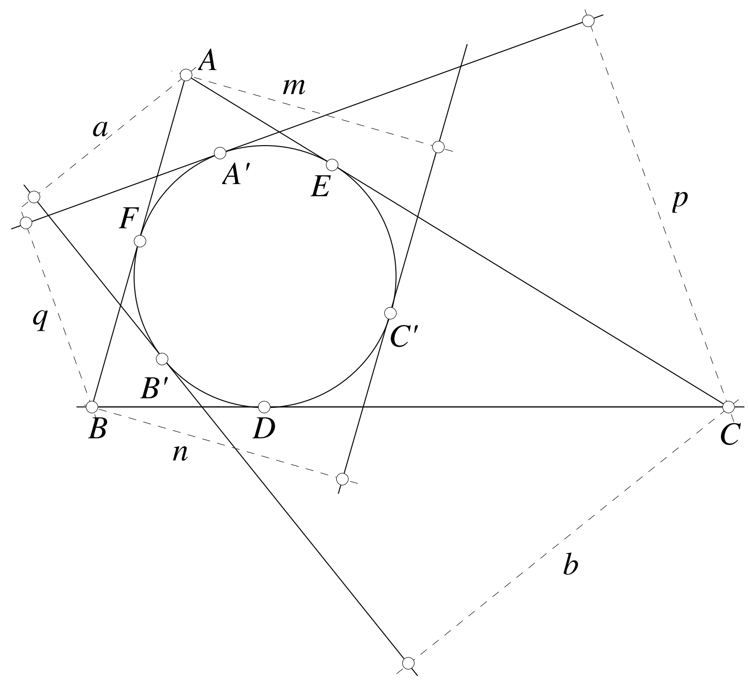
Problema 207. *Se tiene un triángulo ABC y su circunferencia inscrita, tangente a los lados en los puntos D, E y F, como se indica en la figura. Por los puntos A', B', C' de la circunferencia inscrita se trazan las rectas tangentes a los arcos FD, DE y EF, respectivamente. Desde los vértices de ABC se trazan rectas perpendiculares a dichas tangentes (véase igualmente la figura adjunta). Determinar los puntos de tangencia A',B' y C' para que se cumpla la siguiente condición:*

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{p}{q} \cdot \frac{n}{m} = 1.$$



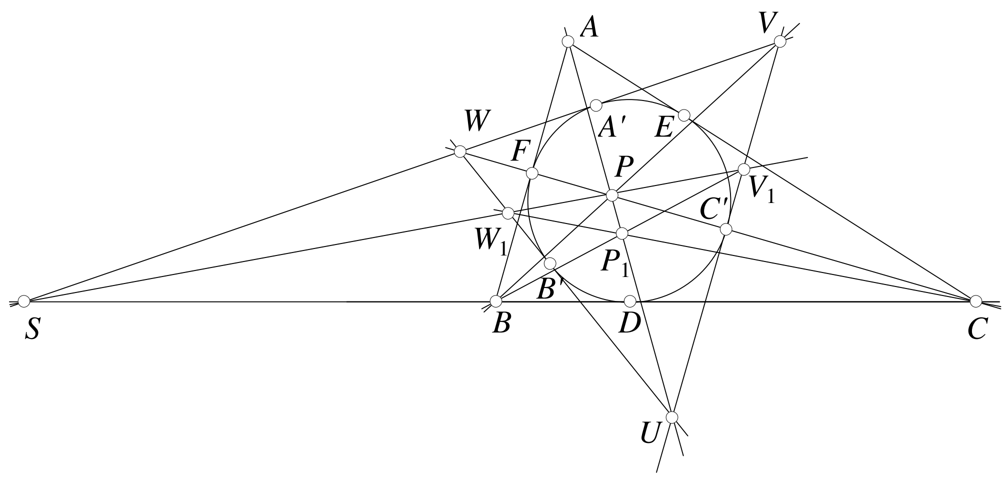
Propuesto por Carlos Hugo Olivera Díaz, Lima, Perú

Solución de Francisco Javier García Capitán.

La condición que cumplen las distancias a, b, p, q, m, n indican que el triángulo UVW formado por las tangentes en A', B', C' es perspectivo con ABC (ver por ejemplo el apartado 179 de Lachlan: *An Elementary Treatise on Modern Pure Geometry*).

Sean B', C' dos puntos cualesquiera sobre la circunferencia, y sea U el punto común de las tangentes por B' y C' Hallemos otro punto A' sobre la circunferencia que forma con B' y C' el triángulo UVW perspectivo con ABC.

Para ello, observemos qeu si P_1 es un punto arbitrario sobre AU, y las rectas BP_1, CP_1 cortan a UC', UB' en V_1, UW_1, respectivamente, los triángulos UV_1W_1 y ABC son perspectivos.



Según el teorema de Desargues, los puntos $V_1W_1 \cap BC$, $W_1U \cap CA$ y $UV_1 \cap AB$ están alineados. Pero las rectas W_1U y UV_1 son fijas, por tanto también lo son los puntos $W_1U \cap CA$ y $UV_1 \cap AB$, haciendo fija a la recta que pasa por los tres puntos. Por tanto el punto $S = V_1W_1 \cap BC$ también es fijo.

Para un punto arbitrario P_1 sobre AU, la recta V_1W_1 no será tangente a la circunferencia, pero conocido el punto S, bastará trazar la tangente desde dicho punto (además de la recta BC) para obtener la recta tangente buscada.