

Ángulos e inversión

Francisco Javier García Capitán

10 de octubre de 2015

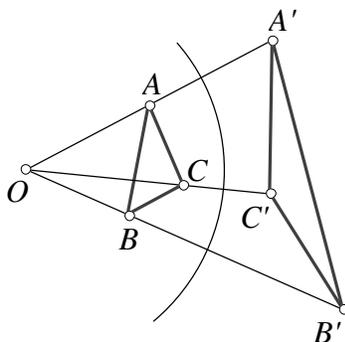
Resumen

Usamos la fórmula que relaciona ángulos en una inversión para solucionar algunos problemas de construcción.

Comenzamos estableciendo un teorema que relaciona los ángulos de dos figuras inversas (Johnson, §75, p. 52). Recordemos que $\angle ABC$ indica el ángulo que debe girar la recta AB en sentido positivo hasta coincidir con la recta BC .

Teorema 1. Si A', B', C' son los inversos de los puntos A, B, C y O es el centro de inversión, entonces

$$\angle ABC + \angle A'B'C' = \angle AOC.$$



Por un lado tenemos

$$\angle ABO = \angle OA'B' = \angle A'OB' + \angle OB'A',$$

y por otro,

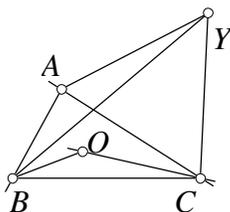
$$\angle OBC = \angle B'C'O = \angle C'B'O + \angle B'OC'.$$

Sumando,

$$\begin{aligned} \angle ABC &= \angle ABO + \angle OBC \\ &= (\angle A'OB' + \angle OB'A') + (\angle C'B'O + \angle B'OC') \\ &= (\angle A'OB' + \angle B'OC') + (\angle C'B'O + \angle OB'A') \\ &= \angle A'OC' + \angle C'B'A' \\ &= \angle AOC - \angle A'B'C'. \end{aligned}$$

Consideremos el caso en que $A'B'C'$ es equilátero:

Problema 1. Dados un triángulo ABC , hallar el centro de una inversión que transforma sus vértices en los vértices de un triángulo equilátero.



Solución. Según el Teorema 1, se cumple $\angle BOC = \angle BAC + 60^\circ$, y lo mismo $\angle COA = \angle CBA + 60^\circ$ y $\angle AOB = \angle ACB + 60^\circ$, por lo que O debe ser uno de los puntos isodinámicos, puntos de intersección de las circunferencias de Apolonio.

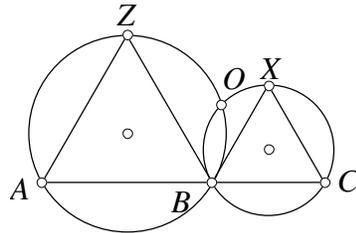
Problema 2. *Dados tres puntos alineados, hallar el centro de una inversión que los transforme en los vértices de un triángulo equilátero.*

Sean A, B, C los tres puntos, y O el centro de inversión. Aplicando el Teorema 1, deben cumplirse

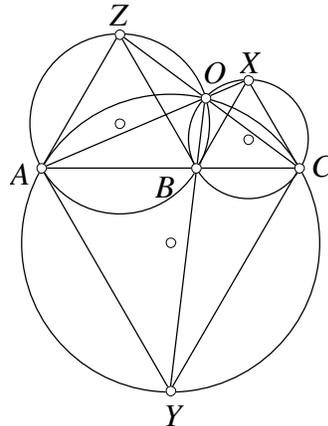
$$\angle AOB = \angle ACB + \angle A'C'B' = 0^\circ + 60^\circ = 60^\circ,$$

$$\angle BOC = \angle BAC + \angle B'A'C' = 0^\circ + 60^\circ = 60^\circ,$$

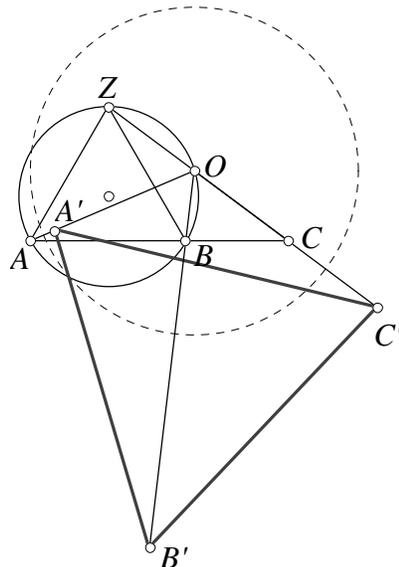
por lo que O será el punto común a dos circunferencias circunscritas a triángulos equiláteros ZAB y XBC levantados sobre AB y BC respectivamente.



Como también es $\angle COA = 60^\circ$, el punto O también está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo YCA levantado sobre CA :

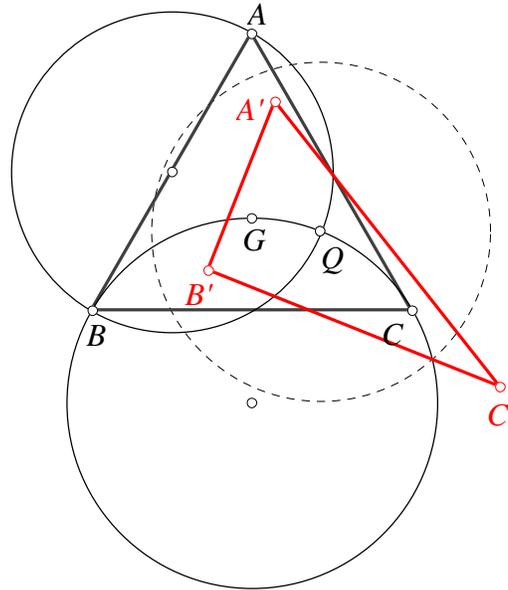


Observamos que O está sobre las rectas AX, BY y CZ , ya que, por ejemplo, $\angle AOB = 60^\circ$ y $\angle XBC = 120^\circ$. Entonces una de las circunferencias será suficiente para hallar el punto O :



Para terminar observemos cómo el Teorema 1 permite transformar por una inversión los vértices de un triángulo dado en un triángulo semejante a uno dado.

Problema 3. Transformar por una inversión los vértices de un triángulo equilátero en los vértices de un triángulo $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$.



Para concretar, sea ABC el triángulo equilátero, y busquemos un centro de inversión Q que consiga que $A' = 60^\circ$, $B = 90^\circ$ y $C' = 30^\circ$. Debe ser $\angle CQB = \angle CAB + \angle C'A'B' = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$ y $\angle BQA = \angle BCA + \angle B'C'A' = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$. Entonces podemos obtener el punto Q como intersección de la circunferencia BCG , siendo G el baricentro del triángulo ABC , y la circunferencia con diámetro AB .

Referencias

- [1] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publications. 2007 (Reimpresión).