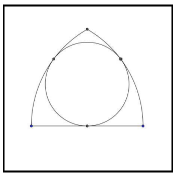
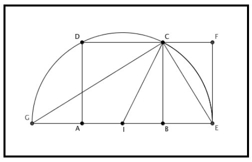


Problemas de agrimensores

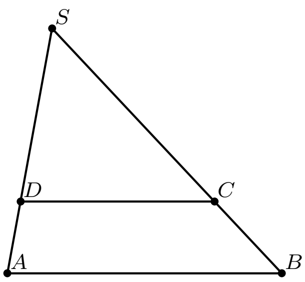
Declaraciones



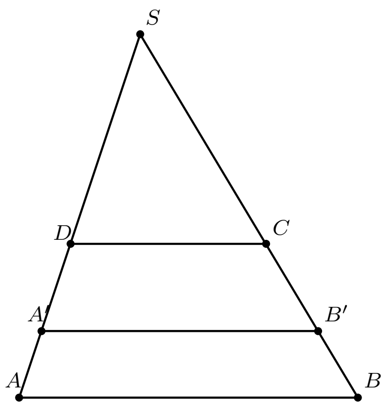
Presentación :
El libro « Histoires de géomètres… et de géométrie » (Éditions Le Pommier), escrito por Jean-Louis Brahem, arquitecto, aporta, sobre problemas de geometría, una luz diferente de la que se encuentra habitualmente en los manuales de matemáticas para los colegios y liceos.
El propósito de este taller es estudiar algunos de los problemas presentados en esta obra, proponiendo justificaciones accesibles al mayor número de alumnos.

I.- Dividir, mediante un segmento paralelo a una de sus bases, un triángulo en dos superficies iguales.

SAB es un triángulo. Se buscan $D \in [SA]$ y $C \in [SB]$, tales que $(DC)//(AB)$ de suerte que el área del triángulo SCD sea igual a la del trapecio $ABCD$.

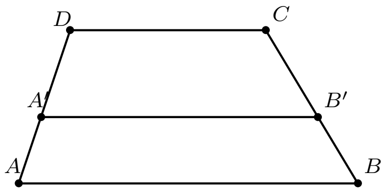


II.- Dividir, mediante dos segmentos paralelos a una de sus bases, un triángulo en tres superficies iguales.

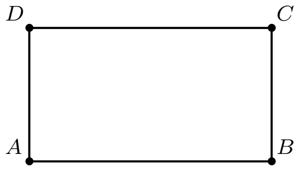


Observación : El trapecio $ABCD$ es, en este caso, un trapecio babilónico. Está dividido por el segmento $[A'B']$ en dos trapecios de la misma área.

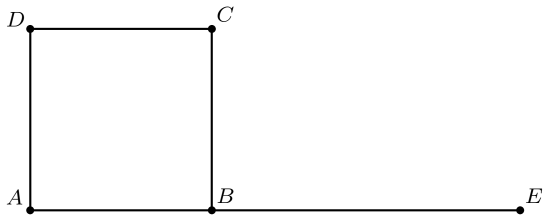
III.- Trapecio babilónico.
´Dado un trapecio $ABCD$ con $(AB)//(DC)$, se buscan $A' \in [AD]$ y $B' \in [BC]$ con $(A'B')//(AB)$ de suerte que los trapecios $ABB'A'$ y $A'B'CD$ tengan la misma área.



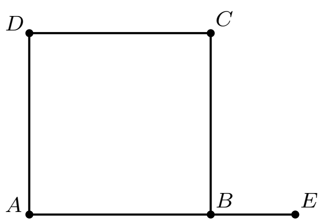
IV.- Cuadratura de un rectángulo.
Construir un cuadrado cuya área es la misma que la de un rectángulo dado.



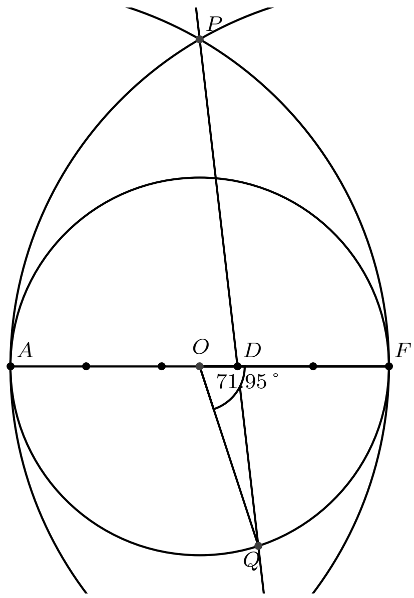
V.- Dado un cuadrado de lado c , construir un rectángulo de la misma área cuya longitud L es dada. $L \geqslant c$



VI.- Dado un cuadrado de lado c , construir un rectángulo de la misma área cuya anchura l es conocida. $0 < l \leqslant c$



VII.- El pentágono del joyero.
Un jardinero quiere hacer un macizo en forma de pentágono regular inscrito en una circunferencia. Utilizará para su trazado el método del joyero.
« El joyero dibuja una circunferencia, divide su su diámetro en cinco partes iguales, luego traza dos arcos de círculo con centros en sus extremos y de radio igual al diámetro de la circunferencia. Une su intersección a la segunda marca y así encuentra el lado del pentágono »



El Ministerio de Defensa de los Estados Unidos tiene forma de pentágono regular de 280 m de lado. Está inscrito en una circunferencia de radio r que verifica :

$$280^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 72\,^\circ \quad \text{sabiendo que} \cos 72\,^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{se deduce que}$$
$$280^2 = r^2 \left(2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$
$$280^2 = r^2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$

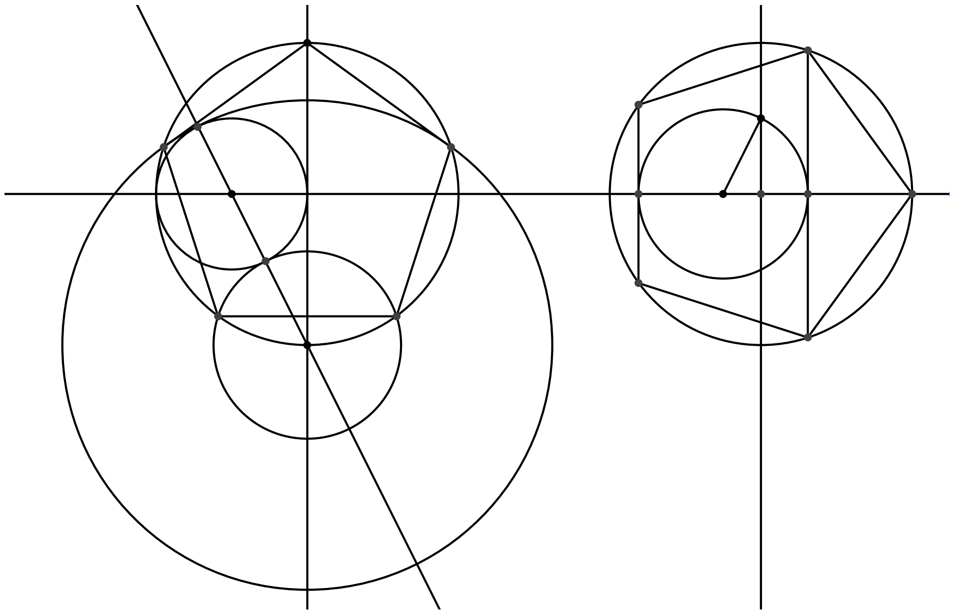
Es decir $r \approx 238,1822$ m.
Para una circunferencia de ese radio, por el método del joyero se obtiene un lado c que verifica :

$$\begin{aligned} c^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 71,95\,^\circ \\ &= r^2(2 - 2\cos 71,95\,^\circ) \end{aligned}$$

Eso da $c \approx 279,8318$ m. Faltarían 16,82 cm.

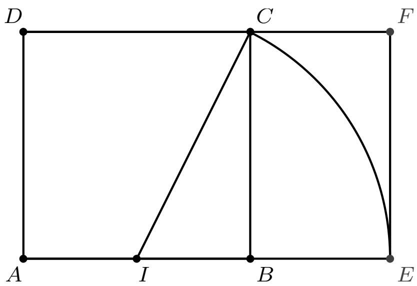
Observación : $\cos 72\,^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ resulta del siguiente resultado :
para todo x real, $1 - \cos 5x = (1-\cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2$.

Dos métodos para hacer una construcción exacta :



VIII.- Rectángulo de oro, escuadra de plata.

$ABCD$ es un cuadrado de lado 1.
I es el punto medio de $[AB]$.
E es el punto de (AB), sobre la semirrecta de origen B que no contiene a A, tal que $IE = IC$.
F es la intersección de (DC) con la perpendicular a (AB) que pasa por E.
$AEFD$ es un rectángulo llamado *rectángulo de oro*.

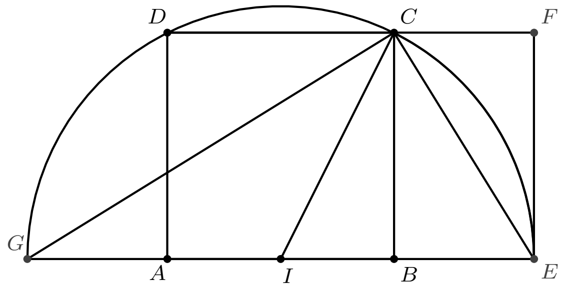


En efecto, $IC^2 = IB^2 + BC^2$ o sea $IC^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, de donde $IC = \frac{\sqrt{5}}{2}$, como $IE = IC$ y $AI = \frac{1}{2}$, se tiene :

$$AE = AI + IC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

φ es el *número de oro*.
La razón entre la *longitud* y la *anchura* en el rectángulo $AEFD$ es efectivamente φ, de ahí su nombre.
El número de oro verifica $\varphi^2 - \varphi = 1$ es decir, $\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$ lo que da : $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{BE}$.
« AE es a AB como AB es a BE ».

Se puede volver a obtener este resultado considerando la semicircunferencia de centro I de origen E, que pasa por C.
Sea G la intersección de ese semicírculo con (AB).

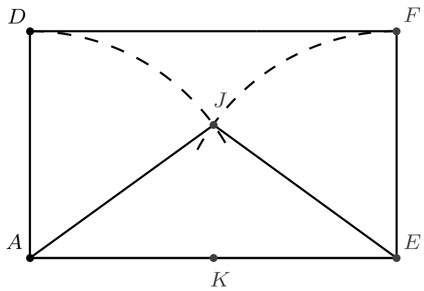


En el triángulo rectángulo ECG, $[CB]$ es la altura desde de C. Se tiene :

$$CB^2 = GB \times BE \text{ o } CB = AB \; y \; GB = AE$$

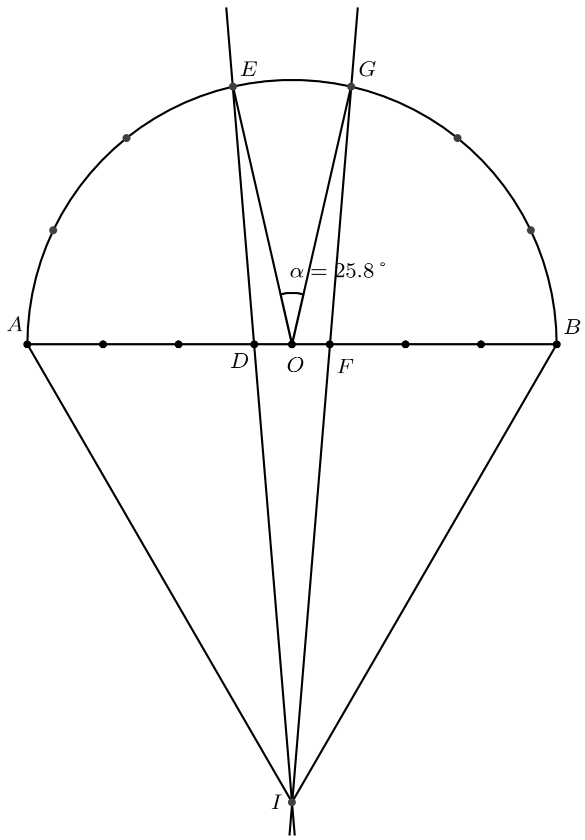
de donde $AB^2 = AE \times BE$.

Los arcos de círculo de centros respectivos E y A, de radio 1 se cortan en el interior del rectángulo $AEFD$ en J.



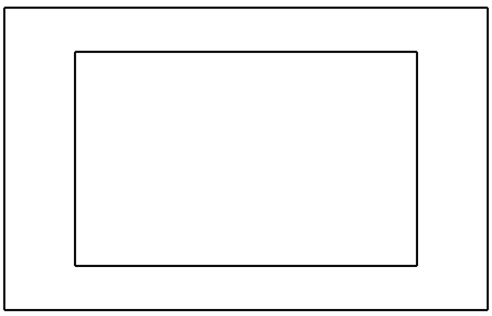
El triángulo isósceles AEJ es une representación de la *escuadra de plata*. Es la que permite el trazado del pentágono regular.
Se comprueba que el ángulo $\widehat{AJE}$ mide 108 ° . En efecto, elángulo $\widehat{AEJ}$ tiene como coseno $\dfrac{\varphi}{2}$ lo que demuestra que su medida es 36 ° , de donde el resultado.

IX.- Metodo aproximado para dividir un ángulo llano en siete partes iguales.
Antiguamente útil para trazar el ábside de una abadía de siete capillas

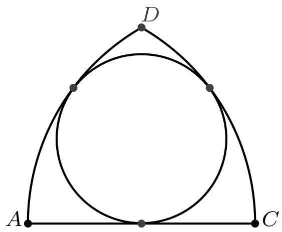


El diámetro $[AB]$ de un semicírculo de centro O se divide en siete partes iguales. Para eso, se sitúan seis marcas en el segmento $[AB]$. Sean D y F la tercera y cuarta marcas.
En el semiplano de frontera (AB) que no contiene al semicírculo, se trazan dos arcos de círculo de centros respectivos A y B, de radio AB. Se cortan en I.
Las rectas (ID) e (IF) cortan al semicírculo en E y G.
Entonces, el ángulo $\widehat{EOG} \approx 25,8\,^\circ$, que difiere poco de $\dfrac{180\,^\circ}{7}$.

X.- El claustro rectangular
En el interior de un claustro debe acomodarse un espacio rectangular. Se prevé una zona rectangular central con césped, rodeada de un paseo de bordes paralelos. Se desea que el paseo y el prado central tengan la misma área. Se espera que este equilibrio sea propicio a la meditación.
En el interior de un rectángulo, trazar un rectángulo de lados paralelos al primero, cuya área sea la mitad de la del rectángulo inicial.



XI.- Rosetón entre dos arcos y un dintel.
Se da un segmento $[AC]$. Se trazan los arcos de círculo de radio AC, de centros respectivos A y C. Sea D uno de los puntos de intersección de los dos arcos.
Trazar una circunferencia tangente a los dos arcos y al segmento $[AC]$.



XII.- Dividir un cuadrilátero cualquiera en dos superficies iguales, por medio de un segmento con origen en uno de los vértices.
$ABCD$ es un cuadrilátero. Se busca un punto F, sobre $[AD]$ o sobre $[DC]$, tal que $[BF]$ divida al cuadrilátero en dos superficies de la misma área.