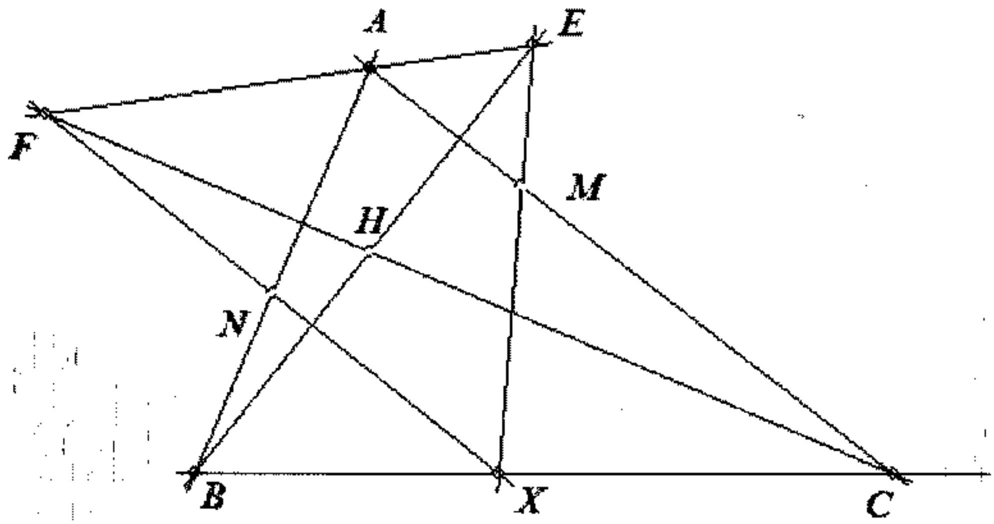
Problema 266, propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, España.

ABC es un triángulo acutángulo con circuncentro O y ortocentro H. La recta por A perpendicular a AO corta a BH en E y a CH en F. AO corta a BC en G, EG corta a AC en M y FG corta a AB en N. Probar que M, N y H están alineados.



Podemos ignorar la condición de triángulo acutángulo, que G sea la intersección de AO y BC (en su lugar podemos considerar cualquier punto X sobre BC) y que la recta que pasa por A sea perpendicular a AO (puede ser cualquier recta que pasa por A).

El resultado se deduce aplicando el teorema de Pappus a las ternas F,A,E y B,X,C.

*** Es curioso que en el caso particular del enunciado original la recta MN resulta paralela a la recta BC y ello ocurre sólo en ese caso. Entonces el problema podría haber sido:

ABC es un triángulo con ortocentro H y X un punto de la recta BC. La recta por A perpendicular a AX corta a BH en E y a CH en F. EX corta a AC en M y FX corta a AB en N.

1) Probar que M, N y H están alineados.
2) La recta MN es paralela a BC si y solo si AX pasa por O o X es el punto del infinito de la recta BC.

Francisco Javier García Capitán, 2015