Problema 270.

Roberto Bosch Cabrera, Archimedean Academy, EE.UU

Se tiene que

$$(a^3-1)(b^3-1)(c^3-1) = a^3b^3c^3 - (a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3) + (a^3 + b^3 + c^3) - 1.$$

Por las relaciones de Vieta sigue que

$$\begin{aligned} a+b+c &= -p, \\ ab+bc+ca &= q, \\ abc &= 1-r. \end{aligned}$$

Es bien sabido que todo polinomio simétrico se puede escribir en función de los polinomios simétricos elementales. Por esto obtenemos

$$\begin{aligned} a^3b^3c^3 &= (1-r)^3 = 1 - 3r + 3r^2 - r^3, \\ a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 &= q^3 - 3(-p)q(1-r) + 3(1-r)^2 = q^3 + 3pq - 3pqr + 3 - \\ a^3 + b^3 + c^3 &= (-p)^3 - 3(-p)q + 3(1-r) = -p^3 + 3pq + 3 - 3r. \end{aligned}$$

Finalmente queda

$$(a^3-1)(b^3-1)(c^3-1) = 3pqr - (p^3 + q^3 + r^3).$$