Revista Escolar
de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Número 54 (enero – mayo 2016)

ISSN – 1698-277X

ÍNDICE

Presentamos las soluciones a 4 problemas de nivel medio y de Olimpiadas del vol. 53 que ha enviado el estudiante Alex-Andrei Cioc, de Pitesti, Rumania.

<u>Problemas 54</u>

Problemas propuestos 271-275

Problemas resueltos

Problema 266

Propuesto por Andrés Sáez Schwedt (Univ. de León, España). Recibidas soluciones de Roberto Bosch Cabrera, Miami (Estados Unidos); Saturnino Campo Ruiz, Salamanca (España); Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba (España); Bruno Salgueiro Fanego (2 soluciones, una trigonométrica y otra por coordenadas baricéntricas), Vivero, España; Titu Zvonaru y Neculai Stanciu, Rumania; y el proponente. Presentamos las soluciones de Campo y de García Capitán.

Problema 267

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest (Rumania). Recibidas soluciones de Roberto Bosch Cabrera, Miami (Estados Unidos); Bruno Salgueiro Fanego, Vivero (España) y del proponente. Presentamos la solución de Salgueiro.

Problema 268

Propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y N. Stanciu, Buzau (Rumania). Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, Miami (Estados Unidos); Elena Codeci, D. Codeci y D. Vacaru, Rumania (mejorando la cota inferior); Javier Cornejo Tejada, Lima (Perú); Paolo Perfetti, Dipartamento di Matematica, Universitá degli studi di Tor Vergata, Roma; Bruno Salgueiro Fanego, Vivero (España); Titu Zvonaru, Comanesti (Rumania) y los proponentes. Presentamos las soluciones de Codeci y de Cornejo.

Problema 269

Propuesto por el editor. Origen del problema: T.B.W. Spencer, *Mathematical Problem Papers, Methuen and Co. Londres 1943.* Recibidas soluciones de: Roberto Bosch Cabrera, Miami (Estads Unidos); Saturnino Campo Ruiz, Salamanca (España); Dones Colmenárez (Venezuela); Javier Cornejo Tejada, Lima (Perú); Francisco Javier García Capitán (con geometría de masas), Priego de Córdoba (España); Bruno Salgueiro Fanego (2 soluciones, una de ellas con coordenadas baricéntricas), Vivero (España); Cristóbal Sánchez-Rubio, Benicassim (España); Titu Zvonaru y Neculai Stanciu, Rumania. Presentamos las soluciones de Campo y de García Capitán.

Problema 270

Propuesto por el editor. Origen del problema: T,B.W. Spencer, Methuen and Co. Londres 1943. Recibidas soluciones de: Álvaro Begué Aguado (con Mathematica), Nueva York (Estados Unidos); Roberto Bosch Cabrera, Miami (Estados Unidos); Saturnino Campo Ruiz, Salamanca (España); Javier Cornejo Tejada, Lima (Perú); Bruno Salgueiro Fanego, Vivero (España); Cristóbal Sánchez Rubio, Benicassim (España); Albert Stadler, Herrliberg (Suiza); Titu Zvonaru y N. Stanciu, Rumania. Presentamos la solución de Bosch.

Reseña de libros, comentario de páginas web y noticia de congresos 54

F. Bellot: *De mi biblioteca (2)*

Divertimentos matemáticos 54

Otras informaciones

XXX Olimpíada Iberoamericana de Matemática

Juan Carlos Toscano. OEI
La semana que viene se celebra en Mayagüez, Puerto Rico, la XXX Olimpíada Iberoamericana de Matemática cuya promoción fue obra de María Falk de Losada y Jorge Cavodeassi. Un hito que merece ser comentado.

Más información [+]

Club Iberoamericano GeoGebra - IBERCIENCIA - IBERTIC 2015-2016

Reinicio de actividades 1 de noviembre de 2015. Gratuito. La Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura (OEI) desde sus Instituto Iberoamericano de TIC y Educación (IBERTIC) e Instituto Iberoamericano de Enseñanza de la Ciencia y la Matemática (IBERCIENCIA) invitan a los profesores y estudiantes iberoamericanos a incorporarse al Club GeoGebra Iberoamericano. Esta iniciativa cuenta con el apoyo e impulso de laConsejería de Economía e Innovación, de la Junta de Andalucía y la coordinación académica se lleva desde la Universidad de Córdoba (España) a través del profesor Agustín Carrillo

Más información [+]

VIII CIBEM Congreso Iberoamericano de Educación Matemática

Convoca la Federación Iberoamericana de Sociedades de Educación Matemática (FISEM) con el apoyo de la Organización de Estados Iberoamericanos para la Educación, la Ciencia y la Cultura OEI.
El Congreso Iberoamericano de Educación Matemática es responsabilidad de la Federación Iberoamericana de Educación Matemática (FISEM), que delega su organización en alguna de sus sociedades. Se realiza cada cuatro años, siendo la Junta de Gobierno de la FISEM quien designa al país anfitrión.
Será en Madrid del 10 al 14 de julio de 2017
Organizan: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas y Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo (SMPM)

Más información [+]

Realizado en el marco del **Instituto Iberoamericano de Enseñanza de las Ciencias y la Matemática (IBERCIENCIA)** con la colaboración de la **Consejería de Economía y Conocimiento de la Junta de Andalucía**

Ángulos e inversión

Francisco Javier García Capitán

10 de octubre de 2015

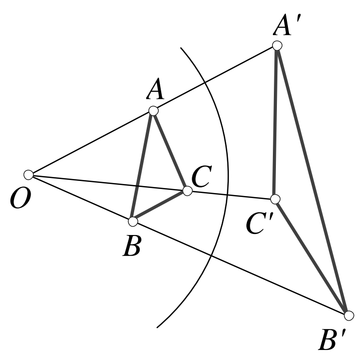
Resumen

Usamos la fórmula que relaciona ángulos en una inversión para solucionar algunos problemas de construcción.

Comenzamos estableciendo un teorema que relaciona los ángulos de dos figuras inversas (Johnson, §75, p. 52). Recordemos que $\measuredangle ABC$ indica el ángulo que debe girar la recta AB en sentido positivo hasta coincidir con la recta BC.

Teorema 1. *Si A', B', C' son los inversos de los puntos A, B, C y O es el centro de inversión, entonces*

$$\measuredangle ABC + \measuredangle A'B'C' = \measuredangle AOC.$$



Por un lado tenemos

$$\measuredangle ABO = \measuredangle OA'B' = \measuredangle A'OB' + \measuredangle OB'A',$$

y por otro,

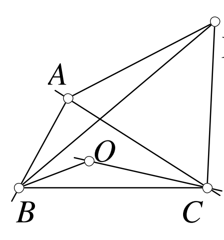
$$\measuredangle OBC = \measuredangle B'C'O = \measuredangle C'B'O + \measuredangle B'OC'.$$

Sumando,

$$\begin{aligned}\measuredangle ABC =& \measuredangle ABO + \measuredangle OBC\\ =& (\measuredangle A'OB' + \measuredangle OB'A') + (\measuredangle C'B'O + \measuredangle B'OC')\\ =& (\measuredangle A'OB' + \measuredangle B'OC') + (\measuredangle C'B'O + \measuredangle OB'A')\\ =& \measuredangle A'OC' + \measuredangle C'B'A'\\ =& \measuredangle AOC - \measuredangle A'B'C'.\end{aligned}$$

Consideremos el caso en que $A'B'C'$ es equilátero:

Problema 1. *Dados un triángulo ABC, hallar el centro de una inversión que transforma sus vértices en los vértices de un triángulo equilátero.*



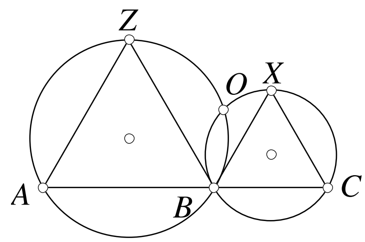
Solución. Según el Teorema 1, se cumple $\measuredangle BOC = \measuredangle BAC + 60°$, y lo mismo $\measuredangle COA = \measuredangle CBA + 60°$ y $\measuredangle AOB = \measuredangle ACB + 60°$, por lo que O debe ser uno de los puntos isodinámicos, puntos de intersección de las circunferencias de Apolonio.

Problema 2. *Dados tres puntos alineados, hallar el centro de una inversión que los transforme en los vértices de un triángulo equilátero.*

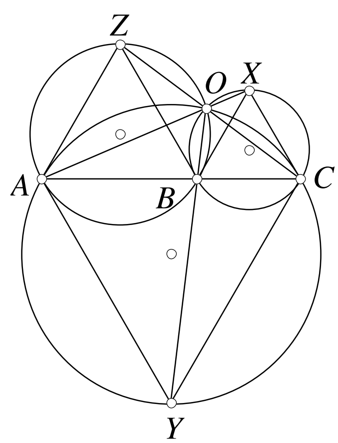
Sean A, B, C los tres puntos, y O el centro de inversión. Aplicando el Teorema 1, deben cumplirse

$$\begin{aligned}\measuredangle AOB &= \measuredangle ACB + \measuredangle A'C'B' = 0° + 60° = 60°,\\ \measuredangle BOC &= \measuredangle BAC + \measuredangle B'A'C' = 0° + 60° = 60°,\end{aligned}$$

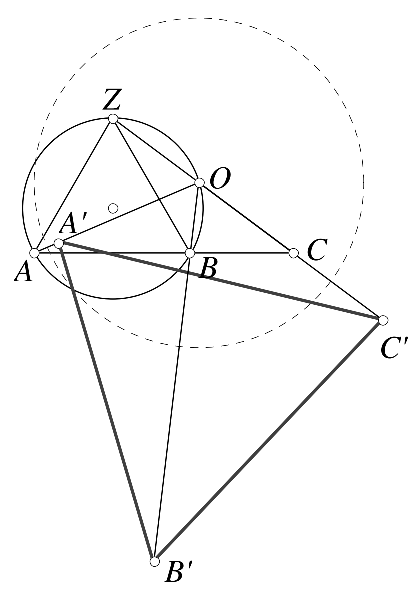
por lo que O será el punto común a dos circunferencias circunscritas a triángulos equiláteros ZAB y XBC levantados sobre AB y BC respectivamente.



Como también es $\measuredangle COA = 60°$, el punto O también está sobre la circunferencia circunscrita al triángulo YCA levantado sobre CA:

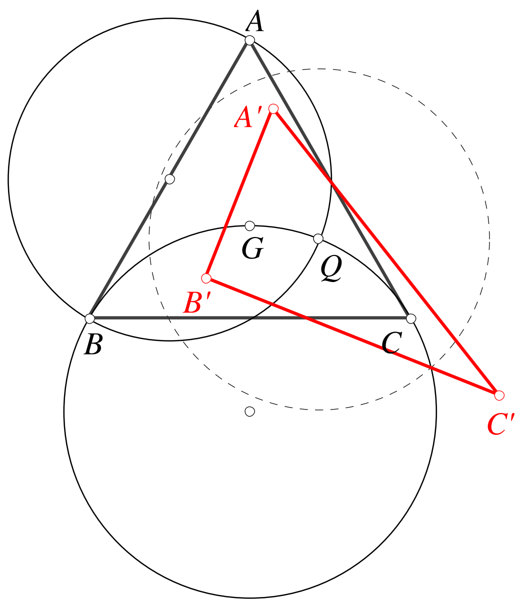


Observamos que O está sobre las rectas AX, BY y CZ, ya que, por ejemplo, $\angle AOB = 60°$ y $\angle XBC = 120°$. Entonces una de las circunferencias será suficiente para hallar el punto O:



Para terminar observemos cómo el Teorema 1 permite transformar por una inversión los vértices de un triángulo dado en un triángulo semejante a uno dado.

Problema 3. *Transformar por una inversión los vértices de un triángulo equilátero en los vértices de un triángulo* $30° - 60° - 90°$.



Para concretar, sea ABC el triángulo equilátero, y busquemos un centro de inversión Q que consiga que $A' = 60°$, $B = 90°$ y $C' = 30°$. Debe ser $\measuredangle CQB = \measuredangle CAB + \measuredangle C'A'B' = 60° + 60° = 120°$ y $\measuredangle BQA = \measuredangle BCA + \measuredangle B'C'A' = 60° + 30° = 90°$. Entonces podemos obtener el punto Q como intersección de la circunferencia BCG, siendo G el baricentro del triángulo ABC, y la circuferencia con diámetro AB.

Referencias

[1] Roger A. Johnson, *Advanced Euclidean Geometry*. Dover Publications. 2007 (Reimpresión).

Presentación del Prof. Pierre Lapôtre, por F. Bellot

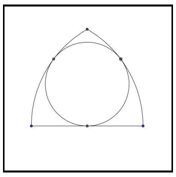
El Prof. Pierre Lapôtre es un asistente habitual al Congreso anual de la Sociedad Belga de Profesores de Matemáticas de habla francesa, donde hemos coincidido varios años. El pasado mes de Agosto, en Mons, ofreció un taller titulado *Problemas de agrimensores*, con un éxito de público tal que hubo de ser trasladado a un local más amplio. Cuando le propuse traducirlo para la REOIM, aceptó con mucho gusto y de ahí que en el presente Vol. 54 de la REOIM incluyamos esa traducción.

Antiguo alumno del IPES de Lille (Institut de Préparation à l'Enseignement Secondaire), Agregé de Matemáticas actualmente en situación de retiro, pero continúa prestando su concurso en el IREM de Lille (Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), formando parte del grupoAMECMI (Actividades Matemáticas en Clase con Medios Informáticos). Estas actividades son accesibles en la página web del IREM de Lille y también en www.gradus-ad-mathematicam .

Estoy seguro de que los lectores de la REOIM apreciarán el estilo (muy francés) de este excelente geómetra.

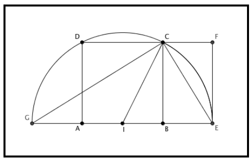
Valladolid, diciembre de 2015.

F. Bellot



Problemas de agrimensores

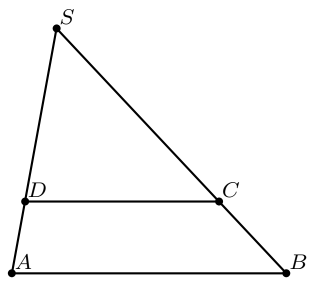
Declaraciones



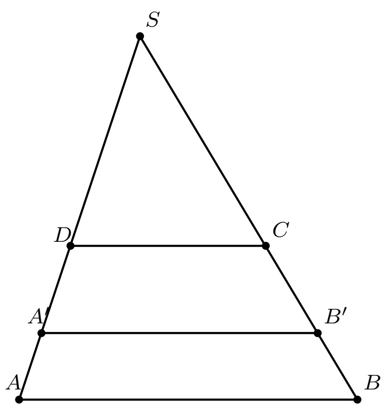
Presentación :
El libro « Histoires de géomètres. . . et de géométrie » (´Editions Le Pommier), escrito por Jean-Louis Brahem, arquitecto, aporta, sobre problemas de geometría, una luz diferente de la que se encuentra habitualmente en los manuales de matemáticas para los colegios y liceos.
El propósito de este taller es estudiar algunos de los problemas presentados en esta obra, proponiendo justificaciones accesibles al mayor número de alumnos.

I.- Dividir, mediante un segmento paralelo a una de sus bases, un triángulo en dos superficies iguales.

SAB es un triángulo. Se buscan $D \in [SA]$ y $C \in [SB]$, tales que $(DC)//(AB)$ de suerte que el área del triángulo SCD sea igual a la del trapecio $ABCD$.



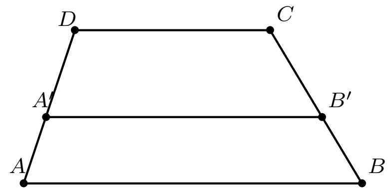
II.- Dividir, mediante dos segmentos paralelos a una de sus bases, un triángulo en tres superficies iguales.



Observación : El trapecio $ABCD$ es, en este caso, un trapecio babilónico. Está dividido por el segmento $[A'B']$ en dos trapecios de la misma área.

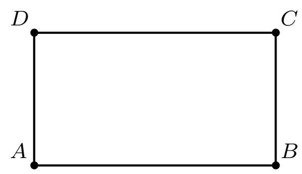
III.- Trapecio babilónico.

´Dado un trapecio $ABCD$ con $(AB)//(DC)$, se buscan $A' \in [AD]$ y $B' \in [BC]$ con $(A'B')//(AB)$ de suerte que los trapecios $ABB'A'$ y $A'B'CD$ tengan la misma área.

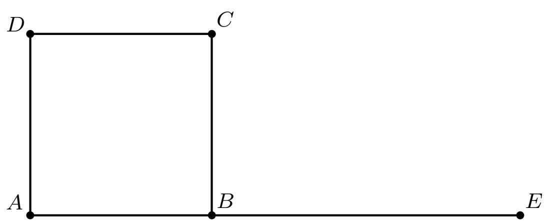


IV.- Cuadratura de un rectángulo.

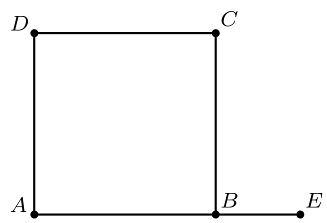
Construir un cuadrado cuya área es la misma que la de un rectángulo dado.



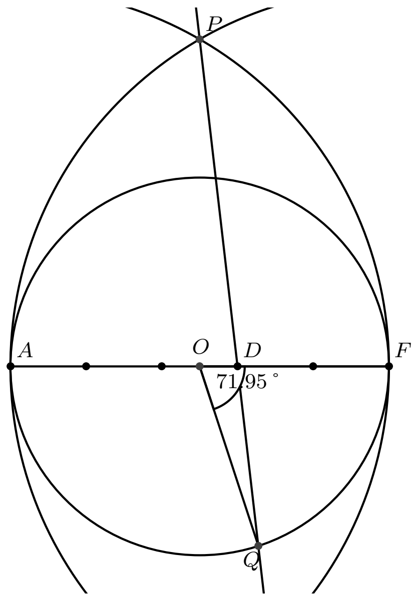
V.- Dado un cuadrado de lado c , construir un rectángulo de la misma área cuya longitud L es dada. $L \geqslant c$



VI.- Dado un cuadrado de lado c , construir un rectángulo de la misma área cuya anchura l es conocida. $0 < l \leqslant c$



VII.- El pentágono del joyero.
Un jardinero quiere hacer un macizo en forma de pentágono regular inscrito en una circunferencia. Utilizará para su trazado el método del joyero.
« El joyero dibuja una circunferencia, divide su su diámetro en cinco partes iguales, luego traza dos arcos de círculo con centros en sus extremos y de radio igual al diámetro de la circunferencia. Une su intersección a la segunda marca y así encuentra el lado del pentágono »



El Ministerio de Defensa de los Estados Unidos tiene forma de pentágono regular de 280 m de lado. Está inscrito en una circunferencia de radio r que verifica :

$$280^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 72^\circ \quad \text{sabiendo que} \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \text{se deduce que}$$
$$280^2 = r^2 \left(2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$$
$$280^2 = r^2 \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$$

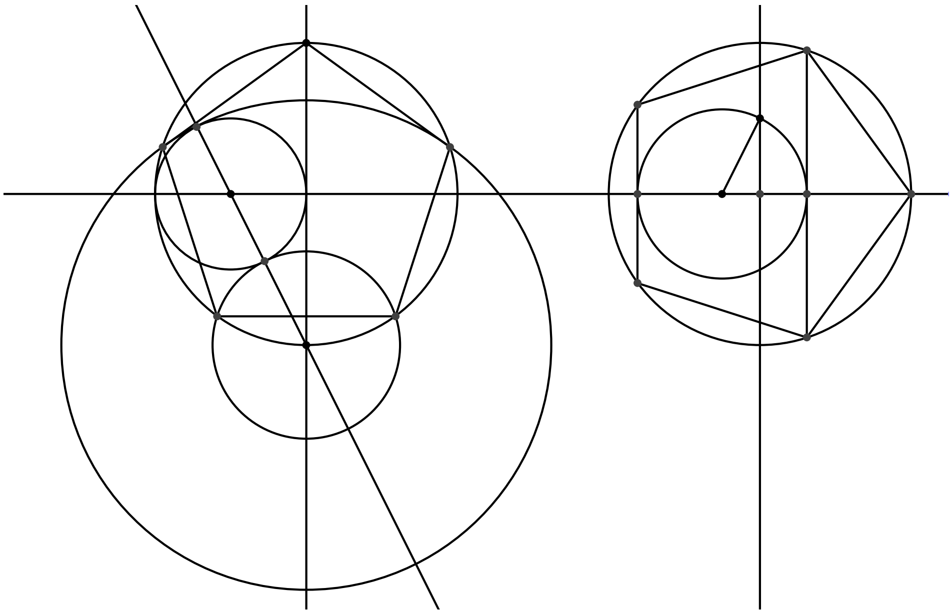
Es decir $r \approx 238,1822$ m.
Para una circunferencia de ese radio, por el método del joyero se obtiene un lado c que verifica :

$$\begin{aligned} c^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 71,95^\circ \\ &= r^2(2 - 2\cos 71,95^\circ) \end{aligned}$$

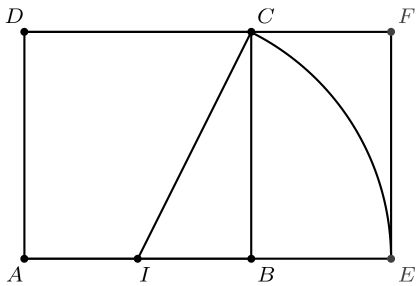
Eso da $c \approx 279,8318$ m. Faltarían 16,82 cm.

Observación : $\cos 72^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$ resulta del siguiente resultado :
para todo x real, $1 - \cos 5x = (1 - \cos x)(4\cos^2 x + 2\cos x - 1)^2$.

Dos métodos para hacer una construcción exacta :



VIII.- Rectángulo de oro, escuadra de plata.
$ABCD$ es un cuadrado de lado 1.
I es el punto medio de $[AB]$.
E es el punto de (AB), sobre la semirrecta de origen B que no contiene a A, tal que $IE = IC$.
F es la intersección de (DC) con la perpendicular a (AB) que pasa por E.
$AEFD$ es un rectángulo llamado *rectángulo de oro*.

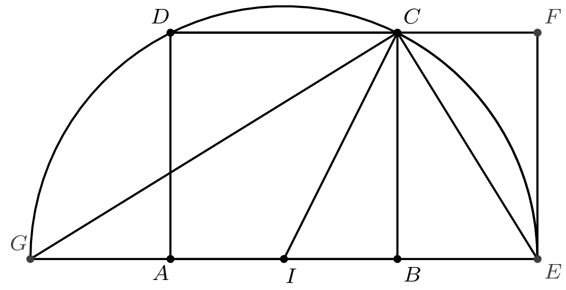


En efecto, $IC^2 = IB^2 + BC^2$ o sea $IC^2 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$, de donde $IC = \frac{\sqrt{5}}{2}$, como $IE = IC$ y $AI = \frac{1}{2}$, se tiene :

$$AE = AI + IC = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

φ es el *número de oro*.
La razón entre la *longitud* y la *anchura* en el rectángulo $AEFD$ es efectivamente φ, de ahí su nombre.
El número de oro verifica $\varphi^2 - \varphi = 1$ es decir, $\varphi = \frac{1}{\varphi - 1}$ lo que da : $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{BE}$.
« AE es a AB como AB es a BE ».

Se puede volver a obtener este resultado considerando la semicircunferencia de centro I de origen E, que pasa por C.
Sea G la intersección de ese semicírculo con (AB).

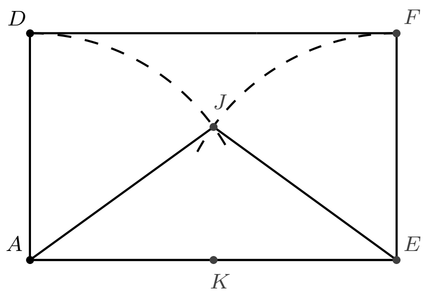


En el triángulo rectángulo ECG, $[CB]$ es la altura desde de C. Se tiene :

$$CB^2 = GB \times BE \text{ o } CB = AB\ y\ GB = AE$$

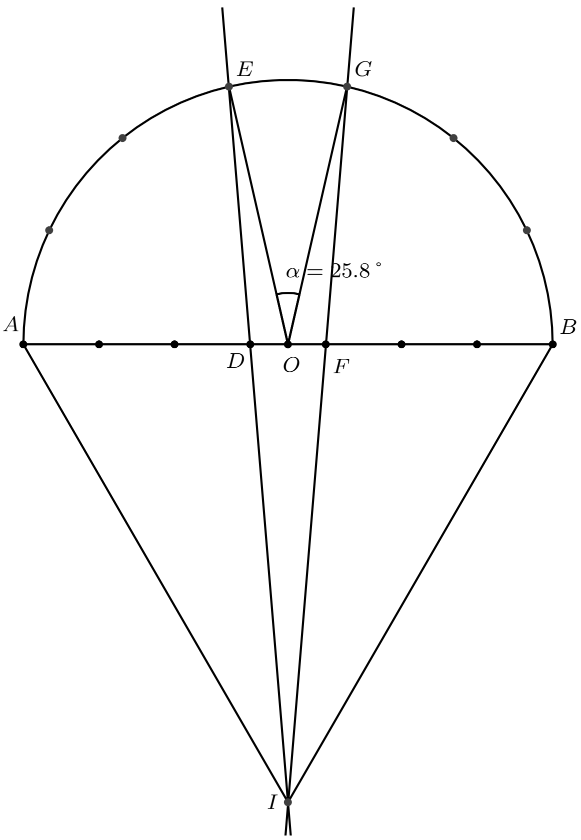
de donde $AB^2 = AE \times BE$.

Los arcos de círculo de centros respectivos E y A, de radio 1 se cortan en el interior del rectángulo $AEFD$ en J.



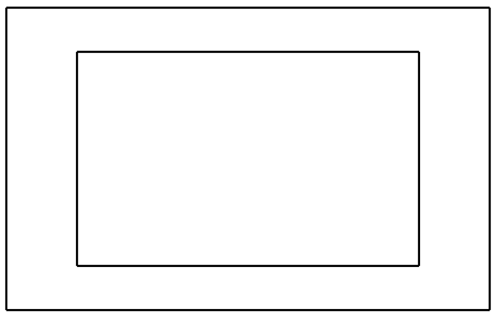
El triángulo isósceles AEJ es une representación de la *escuadra de plata*. Es la que permite el trazado del pentágono regular.
Se comprueba que el ángulo $\widehat{AJE}$ mide 108 ˚ . En efecto, elángulo $\widehat{AEJ}$ tiene como coseno $\dfrac{\varphi}{2}$ lo que demuestra que su medida es 36 ˚ , de donde el resultado.

IX.- Metodo aproximado para dividir un ángulo llano en siete partes iguales.
Antiguamente útil para trazar el ábside de una abadía de siete capillas

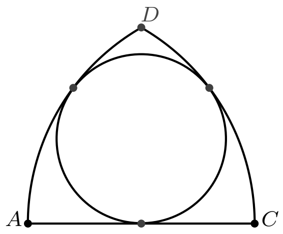


El diámetro $[AB]$ de un semicírculo de centro O se divide en siete partes iguales. Para eso, se sitúan seis marcas en el segmento $[AB]$. Sean D y F la tercera y cuarta marcas.
En el semiplano de frontera (AB) que no contiene al semicírculo, se trazan dos arcos de círculo de centros respectivos A y B, de radio AB. Se cortan en I.
Las rectas (ID) e (IF) cortan al semicírculo en E y G.
Entonces, el ángulo $\widehat{EOG} \approx 25,8^\circ$, que difiere poco de $\dfrac{180^\circ}{7}$.

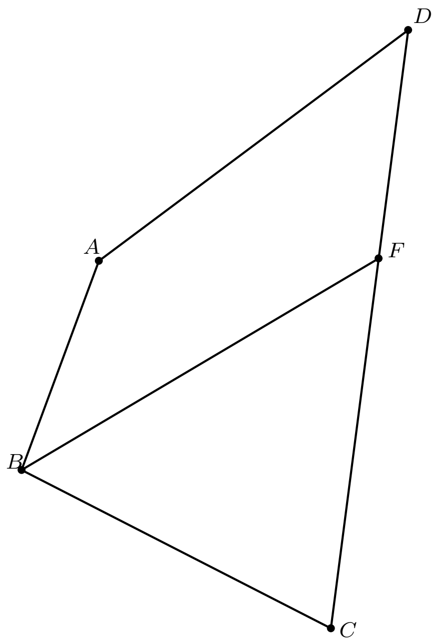
X.- El claustro rectangular
En el interior de un claustro debe acomodarse un espacio rectangular. Se prevé una zona rectangular central con césped, rodeada de un paseo de bordes paralelos. Se desea que el paseo y el prado central tengan la misma área. Se espera que este equilibrio sea propicio a la meditación.
En el interior de un rectángulo, trazar un rectángulo de lados paralelos al primero, cuya área sea la mitad de la del rectángulo inicial.



XI.- Rosetón entre dos arcos y un dintel.
Se da un segmento $[AC]$. Se trazan los arcos de círculo de radio AC, de centros respectivos A y C. Sea D uno de los puntos de intersección de los dos arcos.
Trazar una circunferencia tangente a los dos arcos y al segmento $[AC]$.



XII.- Dividir un cuadrilátero cualquiera en dos superficies iguales, por medio de un segmento con origen en uno de los vértices.
$ABCD$ es un cuadrilátero. Se busca un punto F, sobre $[AD]$ o sobre $[DC]$, tal que $[BF]$ divida al cuadrilátero en dos superficies de la misma área.



Dos problemas propuestos al Banco de la Olimpiada Centroamericana y del Caribe 2015

1. **Si un ángulo de un cuadrilátero cíclico es igual al que forman sus diagonales, entonces dos lados consecutivos del cuadrilátero son iguales, y recíprocamente.**

2. **Si** a **y** b **son números reales positivos, demostrar que**

$$\frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} - \sqrt{ab} \leq \frac{(a-b)^2}{\sqrt{2}(a+b)}.$$

Tres problemas de la Olimpiada de Chile 2009, Nivel Menor

3. Se considera un triángulo cuyos lados miden 1, r y r^2. Determine todos los valores de r de manera que el triángulo sea rectángulo.

4. Se toman tres puntos en el interior de un cuadrado de lado 1. Demuestre que el área del triángulo que forman es menor o igual que $\frac{1}{2}$.

5. Encontrar todos los valores positivos de a y b que verifican la ecuación $\sqrt{a}+\sqrt{b}=2009$

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

PMJ53_1: Un numero natural A lo llamanos ”super 3” si la suma de sus cifras e stres veces mayor que la suma de las cifras del numero A + 1.

Hallar todos los numeros ”super 3” que tienen a lo sumo 4 cifras.

PMJ53_1 – Solution:

Because the sum of digits of A is divisible by 3, A must be divisible by 3 too. This sum is bigger than the sum of digits of A + 1, so the last digit of A is 9.

Let us note s(n) the sum of digits of n.

We have 4 cases:

a) A has only one digit => A = 9 => s(A) = 9.

   A + 1 = 10 => s(A + 1) = 1 => s(A) = 9s(A + 1), it is not a solution

b) A has two digits => A € {39, 69, 99}.

   A = 39 => s(A) = 12, s(A + 1) = 4 => s(A) = 3s(A + 1) => A = 39 is a solution.

   A = 69 => s(A) = 15, s(A + 1) = 7, it is not a solution.

   A = 99 => s(A) = 18, s(A + 1) = 1, it is not a solution.

c) A has three digits
   a. The second digit is not 9 => s(A) – s(A + 1) = 8
      s(A + 1) + 8 = 3s(A + 1) => s(A + 1) = 4 => A + 1 € {130, 220, 310, 400} ⇔ A € {129, 219, 309, 399}, but the second digit of 399 is 9.
   b. The second digit is 9 => s(A) – s(A + 1) = 17 => s(A + 1) + 17 = 3s(A + 1) => 2s(A + 1) = 17, contradiction.
   c. A = 999 => A + 1 = 1000 => s(A) = 27s(A + 1), it is not a solution.

d) A has four digits
   a. The third digit is not 9 =>s(A) – s(A + 1) = 8
      s(A + 1) + 8 = 3s(A + 1) => s(A + 1) = 4 => A + 1 € {1030, 1120, 1210, 1300, 2110, 2020, 2200, 3010, 3100, 4000}⇔ A €{1029, 1119, 1209, 1299, 2109, 3009, 3099, 2009, 2199, 3999} but 1299, 3099, 2199, 3999 are not solutions.
   b. The third digit is 9

b.1. The second digit is not 9 => $s(A) - s(A + 1) = 17$ => $s(A + 1) + 17 = 3s(A + 1)$ => $2s(A + 1) = 17$, contradiction.

b.2. The second digit is 9 => $s(A) - s(A + 1) = 26$ => $s(A + 1) = 13$, but $A + 1$ has last three digits 0, so $s(A + 1) \leq 9$ =>contradiction.

c. $A = 9999$ => $A + 1 = 10000$ => $s(A) = 9999s(A + 1)$, it is not a solution

In conclusion, the solutions are: 39, 129, 219, 309, 1029, 1119, 1209, 2109, 3009, 2009.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

PMJ53_2: Demonstrar que la fraction

$$\frac{2013^{2013}-2013^{2012}-2013^{2011}}{2012^{2013}-2012^{2012}-2012^{2011}-2013}$$

No es irreductible.

PMJ53_2 – Solution:

$2013^{2013} - 2013^{2012} - 2013^{2011} = 2013^{2011}(2013^2 - 2013 - 1)$

Let us note u(n) the last digit of the natural number n.

$u(2013^2 - 2013 - 1) = u(9 - 3 - 1) = 5 \Rightarrow 5 \mid 2013^{2013} - 2013^{2012} - 2013^{2011}$ **(1)**

$2012^{2013} - 2012^{2012} - 2012^{2011} - 2013 = 2012^{2011}(2012^2 - 2012 - 1)$

$u(2012^2 - 2012 - 1) = u(4 - 2 - 1) = 1 \Rightarrow u(2012^{2011}(2012^2 - 2012 - 1)) = u(2012^{2011}) = 8 \Rightarrow u(2012^{2013} - 2012^{2012} - 2012^{2011} - 2013) = u(8 - 3) = 5$
$\Rightarrow \quad 5 \mid 2012^{2013} - 2012^{2012} - 2012^{2011} - 2013$ **(2)**

From (1) and (2) we obtain that the fraction is reductible by 5.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

PMJ53_3:

a) Descompuner el numero 2012 en suma de numeros naturales consecutivos
b) Descompuner el numero 2012 en suma de numeros naturales pares consecutivos
c) Descompuner el numero 2012 en suma de numeros naturales impares consecutivos

PMJ53_3 – Solution:

a) 2012 = 248 + 249 + 250 + 251 + 252 + 253 + 254 + 255.
b) 2012 = 500 + 502 + 504 + 506.
c) 2012 = 1005 + 1007.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

PMJ53_4: El area de un rectangulo es $2m^2$. Si se aumenta la longitud y la anchura en 2m, el area aumenta en $8m^2$. Hallar el perimetro del rectangulo inicial.

PMJ53_4 – Solution:

Let us note L the length and l the width of the rectangle.

$L \cdot l = 2m^2$.

$(L + 2m)(l + 2m) = 2 + 8 = 10m^2 \Leftrightarrow L \cdot l + 4m^2 + 2m \cdot (L + l) = 10m^2 \Leftrightarrow 2m \cdot (L + l) = 4m^2 \Leftrightarrow L + l = 2m$.

$(L + l)^2 = 4m^2 \Leftrightarrow L^2 + l^2 + 2L \cdot l = 4m^2 \Leftrightarrow L^2 + l^2 = 4m^2 - 4m^2 = 0$, but $L^2 > 0$ and $l^2 > 0$ => $L = l = 0$, contradiction.

In conclusion, the respectively rectangle cannot exist.

Problemas de nivel medio y de olimpiadas 54

REPÚBLICA DE MOÇAMBIQUE

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DESENVOLVIMENTO HUMANO

DIRECÇÃO NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Olimpíada Provincial de Matemática 2015

1. Sejam x e y números reais positivos satisfazendo as equações $x^2 + y^2 = 1$ e $x^4 + y^4 = \frac{17}{18}$. Calcule o valor de $\frac{1}{xy}$.
2. Determine todos os inteiros positivos $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{n}$ tais que: $m^2 + 161 = 3^n$.
3. Um trapézio $ABCD$, com lados paralelos AB e CD, está inscrito em uma circunferência de raio 25. Sabe-se que CD é um diâmetro e a altura desse trapézio é 24. Seja E um ponto no arco menor determinado por A e B e sejam F e G os pontos de intersecção de ED e EC com AB, respectivamente. Calcule $\frac{AF \cdot BG}{FG}$.
4. Determine todos os pares $(a; b)$ de inteiros positivos tais que $ab^2 + b + 7$divide $a^2b + a + b$.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti, Romania

NM53_1: Probar que si $a^2 + b^2 + c^2$, entonces $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 3$.

NM53_1 – Solution:

We have $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$, but $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, so

$$\left.\begin{array}{l} (a + b + c)^2 = 1 + 2(ab + bc + ca) \\ (a + b + c)^2 \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + 2(ab + bc + ca) \geq 0 \Leftrightarrow 2(ab + bc + ca) \geq -1 \quad \textbf{(1)}$$

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + bc + ca)$$

$$= 2 - 2(ab + bc + ca) \qquad \textbf{(2)}$$

Suming (1) and (2) we obtain $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \leq 2 - (-1) = 3$, and the problem is solved.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

NM53_2: Probar quenoexistenenterospositivos m y n talesque2(m^2 + mn + n^2)sea un cuadradoperfecto.

NM53_2 – Solution:

Wesupposethat $2(m^2 + mn + n^2)$ is a perfect square.

Let p be a natural numbersuchthat $2(m^2 + mn + n^2) = p^2$.

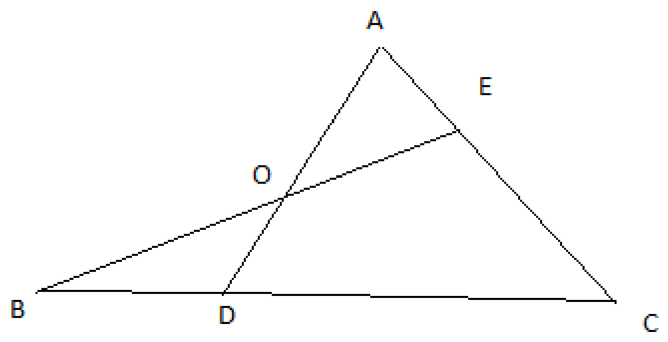
Wehave $2 \mid p^2 \Leftrightarrow \quad 2^{2k} \mid p^2$, where $k \in N^*$, so $2^{2k} \mid 2(m^2 + mn + n^2) \Leftrightarrow$ $2^{2k-1} \mid (m^2 + mn + n^2)$**(1)**

$2k - 1 > 0 \Rightarrow 2 \mid m^2 + mn + n^2$, relationpossibleonlyif m and n are botheven. In this case, theexponent of 2 in thenumbers m^2, mn, n^2iseven, sothe exponent of 2 in $(m^2 + mn + n^2)$ iseven, contradictionwithrelation**(1)** =>the assumptionis false => $2(m^2 + mn + n^2)$ cannotbe a perfect square.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

NM53_3: En el triangulo ADC, E es un punto del lado AC, O es un punto del lado AD y la recta EO a la recta DC en un punto B mas alla de D. Se sabe que BD/DC = 4/7 y que AE/EC = 2/3. Calcular AO/OD.

NM53_3 – Solution:



In triangle ABC we have the transversal B-O-E => (Menelaus)

$\frac{AO}{DO} \bullet \frac{DB}{CB} \bullet \frac{CE}{AE} = 1$

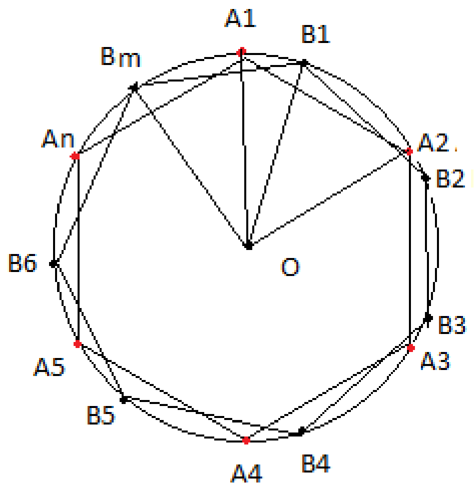
From the hypothesis we have $\frac{BD}{DC} = \frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{DB}{CB} = \frac{4}{11}$ and $\frac{CE}{AE} = \frac{3}{2}$, so $\frac{AO}{DO} \bullet \frac{12}{22} = 1$

$\Rightarrow \frac{AO}{DO} = \frac{11}{6}$.

Cioc Alex-Andrei, Pitesti

NM53_4: Dos poligons regulares de m y n lados, respectivamente, estan inscritos en la misma circunferencia, La razon de sus areas es m/n. Hallar todos los posibles valores de m y n.

NM53_4 – Solution:



$OA_i = OB_j = R$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$.

$m(\angle A_1OA_2) = \frac{360°}{n}$, $m(\angle B_1OB_2) = \frac{360°}{m}$.

Using the cos theorem we obtain:

$$\left.\begin{array}{l} A_iA_{i+1} = \dfrac{OA_i \cdot OA_{i+1} \cdot \sin\frac{360°}{n}}{2} \\ \\ B_jB_{j+1} = \dfrac{OB_j \cdot OB_{j+1} \cdot \sin\frac{360°}{m}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{m}{m} = \frac{m \cdot \sin\frac{360°}{n}}{n \cdot \sin\frac{360°}{m}} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow \sin\frac{360°}{m} = \sin\frac{360°}{n}$ =>we have two cases:

1) m = n, we have infinite solutions
2) $\frac{360°}{m} + \frac{360°}{n} = 180° \Leftrightarrow \frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{2}$ => mn = 2m + 2n.

$\Leftrightarrow$ mn – 2m – 2n + 4 = 4 $\Leftrightarrow$ (m – 2)(n – 2) = 4. =>
the solution pairs (m,n) are: (3, 6), (4, 4), (6, 3).

In conclusion, pairs (m,n) that meet the problem requirements are: (k,k), $(3,6)$, $(6,3)$, where $k \in N$, $k \geq 3$.

Problemas propuestos 271-275

Problema 271

Propuesto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España.

Sean ABC un triángulo isósceles, con AB = AC; H su ortocentro y A'B'C' su triángulo órtico. Demostrar que H es el inverso de A respecto de la circunferencia de diámetro BC.

Problema 272

Propuesto por Francisco Javier García Capitán, Priego de Córdoba, España. Dedicado a la memoria de José María Pedret.

Sean dos puntos A y B y una recta *r*. Para cada punto M de *r* sea P la intersección de la recta AM y la recta perpendicular a BM por B.

1) **Demostrar que el lugar geométrico de P al variar M sobre *r* es, en general, una cónica.**
2) **Dados los puntos A y B, hallar las rectas *r* para las que la cónica es una parábola.**

Problema 273

Propuesto por Álvaro Begué Aguado, Nueva York (Estados Unidos)

Demostrar que si n es primo, el número $\left[\left(4+\sqrt{11}\right)^n\right]$ **es un múltiplo de n más 7.**

Problema 274

Propuesto por Andrés Sáez Schwedt, León, España

En el triángulo ABC, con incentro I, la recta AI corta a BC en D, y E es el punto medio de AD. Las circunferencias circunscritas de ABD y BCI se cortan en otro punto F, distinto de B. Probar que $\measuredangle ABE = \measuredangle FBC$ **.**

Problema 275

Propuesto por el editor.

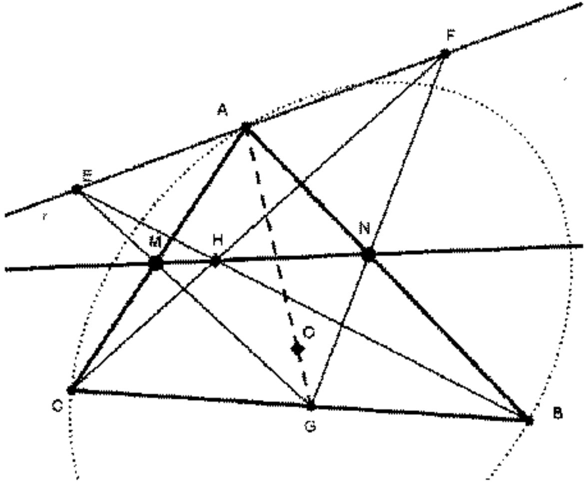
Demostrar que, si *p(x)* es cualquier polinomio, entonces la ecuación

$$\left(x^2-1\right)^2 p''(x)+8x\left(x^2-1\right)p'(x)+4\left(3x^2-1\right)p(x)=0$$

tiene al menos dos raíces reales en el intervalo (-1,1).

ROEI 266.- *ABC es un triángulo acutángulo con circuncentro O y ortocentro H. La recta por A perpendicular a AO corta a BH en E y a CH en F. AO corta a BC en G, EG corta a AC en M y FG corta a AB en N. Probar que M, N y H están alineados.*

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sea r una recta que pasa por A; H y O dos puntos arbitrarios no situados sobre el triángulo; G la proyección de A sobre BC desde O; E y F las proyecciones de B y C sobre r por H; M y N las de E y F sobre AC y AB respectivamente, desde G.

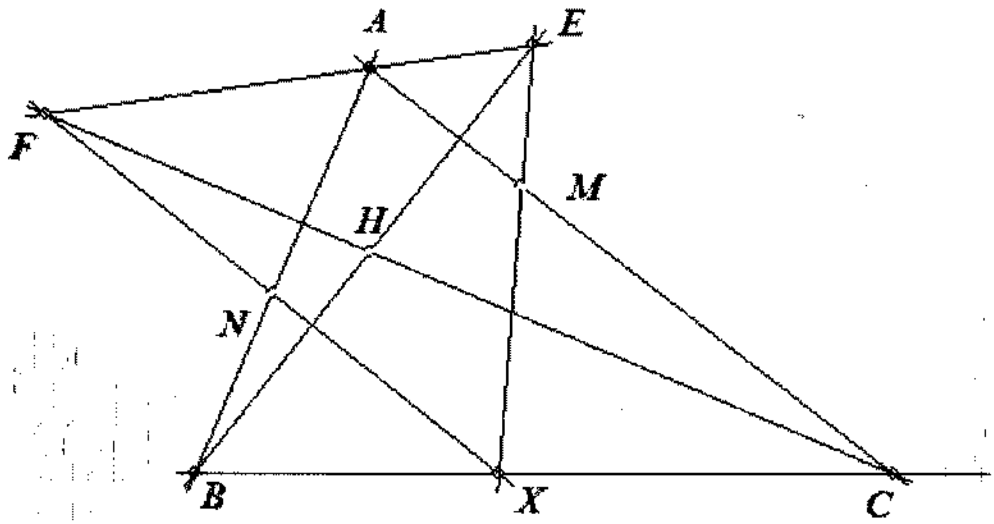
La proyectividad definida entre la recta r y la recta $c = AB$ mediante la asignación

$$(AEF) \to (GCB)$$

tiene como eje proyectivo la recta definida por los puntos $AC \cap EG = M$; $FC \cap EB = H$ y $AB \cap FG = N$, por tanto esos puntos están alineados como se pretendía demostrar.

Como puede verse, no se necesita imponer condiciones métricas a los puntos O, y H, como tampoco a la recta r (tangente a la circunscrita en el enunciado original). Tampoco se precisa de ninguna cónica que circunscriba al triángulo. ■

Problema 266, propuesto por Andrés Sáez Schwedt, Universidad de León, España.
ABC es un triángulo acutángulo con circuncentro O y ortocentro H. La recta por A perpendicular a AO corta a BH en E y a CH en F. AO corta a BC en G, EG corta a AC en M y FG corta a AB en N. Probar que M, N y H están alineados.



Podemos ignorar la condición de triángulo acutángulo, que G sea la intersección de AO y BC (en su lugar podemos considerar cualquier punto X sobre BC) y que la recta que pasa por A sea perpendicular a AO (puede ser cualquier recta que pasa por A).

El resultado se deduce aplicando el teorema de Pappus a las ternas F,A,E y B,X,C.

*** Es curioso que en el caso particular del enunciado original la recta MN resulta paralela a la recta BC y ello ocurre sólo en ese caso. Entonces el problema podría haber sido:

ABC es un triángulo con ortocentro H y X un punto de la recta BC. La recta por A perpendicular a AX corta a BH en E y a CH en F. EX corta a AC en M y FX corta a AB en N.

1) Probar que M, N y H están alineados.
2) La recta MN es paralela a BC si y solo si AX pasa por O o X es el punto del infinito de la recta BC.

Problema 267, proposto por Laurentiu Modan, Universidade de Bucarest, Romanía.

Sexa $Z=(X,Y)$ unha variable aleatoria bidimensional, con

$$P(\{w/X(w)=i,Y(w)=j\})=\frac{i}{10\cdot 2^i}\cdot C_{i,j}.$$

con $1\le i\le 4$ e $0\le j\le i$. Estudar se

$$P(\{w/|X(w)-3|<2\})<\frac{1}{3}.$$

Solución enviada por Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo.

A función de masa de probabilidade da variable aleatoria Z vén dada por

(i,j)	$(1,0)$	$(1,1)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$	$(3,0)$	$(3,1)$	$(3,2)$	$(3,3)$	$(4,0)$	$(4,1)$	$(4,2)$	$(4,3)$	$(4,4)$
$\frac{i\cdot C_{i,j}}{10\cdot 2^i}$	$\frac{4}{80}$	$\frac{4}{80}$	$\frac{4}{80}$	$\frac{8}{80}$	$\frac{4}{80}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{9}{80}$	$\frac{3}{80}$	$\frac{2}{80}$	$\frac{8}{80}$	$\frac{12}{80}$	$\frac{8}{80}$	$\frac{2}{80}$

Notemos que está ben definida, pois

$$\sum_{\substack{1\le i\le 4\\ 0\le j\le i}}\frac{i}{10\cdot 2^i}\cdot C_{i,j}=\frac{1}{80}\cdot(4+4+4+8+4+3+9+9+3+2+8+12+8+2)=1.$$

Polo tanto,

$$P(\{w/|X(w)-3|<2\})=P(\{w/-2<X(w)-3<2\})=P(\{w/1<X(w)<5\})$$

$$=P(\{w/2\le X(w)\le 4\})=1-P(\{w/X(w)=1\})$$

$$=1-\left[P\left(\{w/Z(w)=(1,0)\}\dot{\cup}\{w/Z(w)=(1,1)\}\right)\right]$$

$$=1-P(\{w/Z(w)=(1,0)\})-P(\{w/Z(w)=(1,1)\})=1-\frac{1}{20}-\frac{1}{20}=\frac{9}{10}>\frac{1}{3}.$$

Problema 268 (Propuesto por D.M. Batinetzu-Giurgiu, Bucarest, y N. Stanciu, Buzau, Rumania)

Si m, n, x, y, z > 0, entonces:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{xy}{my+nz}+\frac{yz}{mz+nx}+\frac{zx}{mx+ny}\right)\geq\frac{3}{m+n}+3\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(mx+ny)(my+nz)(mz+nx)}}$$

Solución por Javier Cornejo Tejada, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú.

Desarrollando el primer miembro de la expresión:

$$\frac{x+y}{my+nz}+\frac{y+z}{mz+nx}+\frac{z+x}{mx+ny}+\frac{xy}{z(my+nz)}+\frac{yz}{x(mz+nx)}+\frac{zx}{y(mx+ny)}$$

Aplicando $MA\geq MG$:

$$\frac{x+y}{my+nz}+\frac{y+z}{mz+nx}+\frac{z+x}{mx+ny}\geq 3\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(mx+ny)(my+nz)(mz+nx)}}\ldots(I)$$

Trabajando con lo que resta de la expresión:

$$\frac{xy}{z(my+nz)}+\frac{yz}{x(mz+nx)}+\frac{zx}{y(mx+ny)}=\frac{(xy)^2}{xyz(my+nz)}+\frac{(yz)^2}{xyz(mz+nx)}+\frac{(zx)^2}{xyz(mx+ny)}$$

Aplicando el lema de Titu:

$$\frac{(xy)^2}{xyz(my+nz)}+\frac{(yz)^2}{xyz(mz+nx)}+\frac{(zx)^2}{xyz(mx+ny)}\geq\frac{(xy+yz+zx)^2}{xyz[m(x+y+z)+n(x+y+z)]}=\frac{(xy+yz+zx)^2}{xyz(x+y+z)(m+n)}$$

Se sabe que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ca$, sumando a cada miembro $2(ab+bc+ca)$ se tiene: $(a+b+c)^2\geq 3(ab+bc+ca)$.
Haciendo $a=xy; b=yz; c=zx$:

$$(xy+yz+zx)^2\geq 3xyz(x+y+z)\rightarrow\frac{(xy+yz+zx)^2}{xyz(x+y+z)(m+n)}\geq\frac{3}{m+n}$$

Por lo tanto:

$$\frac{xy}{z(my+nz)}+\frac{yz}{x(mz+nx)}+\frac{zx}{y(mx+ny)}\geq\frac{3}{m+n}\ldots(II)$$

Sumando (I) y (II) se obtiene la expresión que se pedía demostrar:

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{xy}{my+nz}+\frac{yz}{mz+nx}+\frac{zx}{mx+ny}\right)\geq\frac{3}{m+n}+3\sqrt[3]{\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(mx+ny)(my+nz)(mz+nx)}}$$

Problema 268, propuesto por D.M.Batinetzu – Giurgiu, Bucarest, y N.Stanciu, Buzau, Romania
Si $m, n, x, y, z > 0$, entonces

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\left(\frac{xy}{my+nz}+\frac{yz}{mz+nx}+\frac{zx}{mx+ny}\right)\right)\ge\frac{3}{m+n}+3\sqrt[3]{\left(\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(mx+ny)\cdot(my+nz)\cdot(mz+nx)}\right)}\ .$$

Solution (proposed by **Elena Codeci, Daniel Codeci** and **Daniel Văcaru**)
One find

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{xy}{my+nz}+\frac{yz}{mz+nx}+\frac{zx}{mx+ny}\right)=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{xy}{my+nz}\right)+\frac{xy}{z\cdot(my+nx)}+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{yz}{mz+nx}\right)+\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{yz}{mz+nx}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{zx}{mx+ny}\right)+\frac{1}{y}\cdot\left(\frac{zx}{mx+ny}\right)\ .$$

One may write

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{xy}{my+nz}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{yz}{mz+nx}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{zx}{mx+ny}\right)=\frac{x+y}{my+nz}+\frac{y+z}{mz+nx}+\frac{x+z}{mx+ny}=\frac{\left[\sqrt{(x+y)}\right]^2}{my+nz}+\frac{\left[\sqrt{(y+z)}\right]^2}{mz+nx}+\frac{\sqrt{\left[(x+z)\right]^2}}{mx+ny}$$
$$\overbrace{\ge}^{Bergstrom}\ \ge\frac{\left[\sqrt{(x+y)}+\sqrt{(y+z)}+\sqrt{(z+x)}\right]^2}{(my+nz)+(mz+nx)+(mx+ny)}\ \overbrace{\ge}^{AM-GM}\ \frac{3\cdot\left[\sqrt{(x+y)}\cdot\sqrt{(y+z)}+\sqrt{(y+z)}\sqrt{(z+x)}+\sqrt{(z+x)}\sqrt{(x+y)}\right]}{(m+n)\cdot(x+y+z)}\ge$$
$$\ge\frac{3\cdot\cancel{(x+y+z)}}{(m+n)\cdot\cancel{(x+y+z)}}=\frac{3}{m+n}$$

The remaining sum can be write as

$$\frac{xy}{z\cdot(my+nx)}+\frac{yz}{x\cdot(mz+nx)}+\frac{zx}{y\cdot(mx+ny)}\ \underbrace{\ge}_{AM-GM}\ 3\sqrt[3]{\left(\left(\frac{xy}{z\cdot(my+nx)}\right)\left(\frac{yz}{x\cdot(mz+nx)}\right)\left(\frac{zx}{y\cdot(mx+ny)}\right)\right)}=3\sqrt[3]{\left(\frac{xyz}{(my+nx)\cdot(mz+ny)\cdot(mx+nz)}\right)}\ .$$

That concludes this solution.

Observation

We think that one better inferior bound could be obtained if one write

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\cdot\left(\frac{xy}{my+nz}\right)+\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{yz}{mz+nx}\right)+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\frac{zx}{mx+ny}\right)=\frac{x+y}{my+nz}+\frac{y+z}{mz+nx}+\frac{x+z}{mx+ny}=\frac{\left[\sqrt{(x+y)}\right]^2}{my+nz}+\frac{\left[\sqrt{(y+z)}\right]^2}{mz+nx}+\frac{\sqrt{\left[(x+z)\right]^2}}{mx+ny}$$
$$\overbrace{\ge}^{Bergstrom}\ \ge\frac{\left[\sqrt{(x+y)}+\sqrt{(y+z)}+\sqrt{(z+x)}\right]^2}{(my+nz)+(mz+nx)+(mx+ny)}=\frac{2x+2y+2z+2\cdot\sqrt{(x+y)}\cdot\sqrt{(y+z)}+2\cdot\sqrt{(y+z)}\sqrt{(z+x)}+2\cdot\sqrt{(z+x)}\sqrt{(x+y)}}{(m+n)\cdot(x+y+z)}\ge\ .$$
$$\ge\frac{4\cdot\cancel{(x+y+z)}}{(m+n)\cdot\cancel{(x+y+z)}}=\frac{4}{m+n}$$

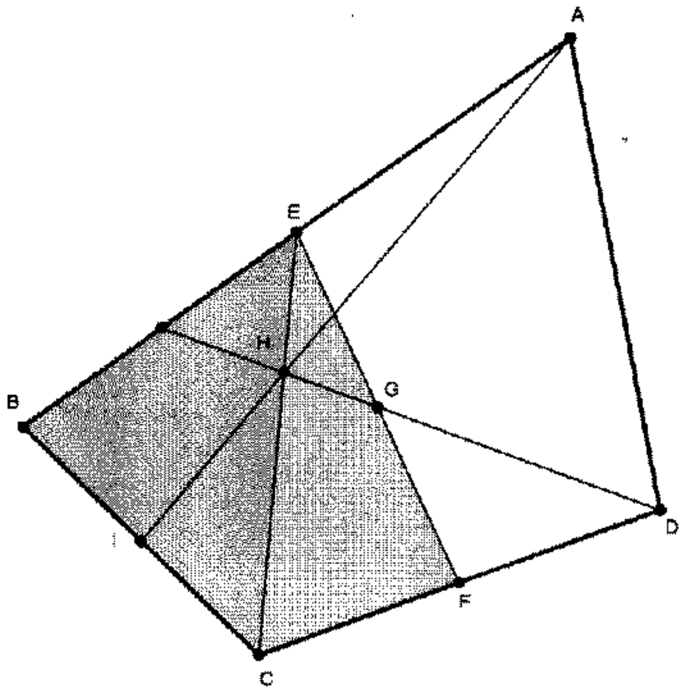
It follows that

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\left(\frac{xy}{my+nz}+\frac{yz}{mz+nx}+\frac{zx}{mx+ny}\right)\right)\ge\frac{4}{m+n}+3\sqrt[3]{\left(\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{(mx+ny)\cdot(my+nz)\cdot(mz+nx)}\right)}\ .$$

ROEI 269, propuesto por el editor.

$ABCD$ es un cuadrilátero; E y F son los puntos medios de AB y DC, respectivamente. G es el punto medio de EF. DG corta a CE en H. Demostrar que AH biseca BC.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Sea I el punto de intersección de las rectas AH y BC. En el triángulo ΔECF (azul) con la transversal DG el teorema de Menelao nos da $\frac{EH}{HC}\cdot\frac{DC}{DF}\cdot\frac{GF}{EG}=1$, de donde resulta $\frac{EH}{HC}=\frac{1}{2}$.

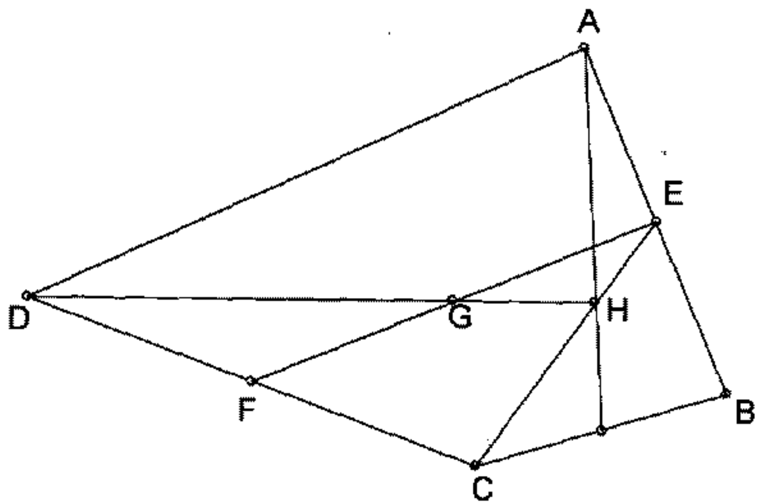
En el triángulo ΔEBC (rojo) con la transversal AH se tiene, por el mismo teorema:

$\frac{HC}{EH}\cdot\frac{AE}{AB}\cdot\frac{BI}{IC}=1$ o bien $\frac{HC}{EH}\cdot\frac{BI}{IC}=2$.

Multiplicando ambas se obtiene finalmente $\frac{BI}{IC}=1$que nos dice que I es el punto medio de B

Y se acabó.■

***Problema 269, propuesto por el editor**
ABCD es un cuadrilátero; E y F son los puntos medios de AB y DC, respectivamente. G es el punto medio de EF.
DG corta a CE en H. Demostrar que AH biseca BC.



(1) Situamos 4 masas iguales en los puntos A, B, C, D.

(2) Las masas de A y B se colocan en el punto medio E y las masas de C y D se colocan en su punto medio F. El centro de masas del sistema no habrá cambiado.

(3) Las cuatro masas se colocan en el punto medio G de E y F, resultando que G es centro de masas del sistema.

(4) Considerando ahora el centro de masas H del sistema formado por A, B y C, éste estará sobre la recta CE en y se cumplirá CH:HE=2:1. Pero además, G es el centro de masas del sistema formado por A, B, C, D, por lo que G debe estar en la recta AH y además cumplirse que AG:GH=3:1. Esto indica que H (centro de masas de A, B, C) coincide con la definición del enunciado (intersección de DG y CE).

(5) En el triángulo ABC, AH es una mediana, y debe cortar a BC en su punto medio.

Francisco Javier García Capitán, 2015.

De mi biblioteca (2)

Geometría

En esta segunda entrega recopilo algunos libros de Geometría (excluyendo deliberadamente las colecciones de problemas, de las que hay muchas y excelentes, pero que para una preparación inicial pueden no ser tan importantes).

a) Nivel inicial

1.- Posamentier, A.S.: *Advanced Euclidean Geometry.* Addison-Wesley Pub. Co., 1984.

Una buena obra para empezar el estudio de la propiedades básicas que hacen falta para resolver problemas de Geometría.

2.- Slowik, J-M.: *Invent'Aire!. ACL-les éditions du Kangourou, 2008.*

Solamente son 48 páginas, pero me atrevo a calificar de obra maestra la colección de ejemplos de división de un cuadrado o de un triángulo mediante cortes rectos.

3.- Coxeter, H.S.M. & Greitzer, S.L.: *Geometry revisited. M.A.A. New Mathematical Library 19, 1967.*

Un clásico en la preparación de Geometría para Olimpiadas. Por la fecha de su primera edición (1967) fue bastante denostado en la Francia de las "Matemáticas modernas", pero es un libro excelente.

5.- Huvent, G.: *Sangaku (Le mystère des énigmes géométriques japonaises). Dunod, 2008.*

La palabra japonesa *sangaku* se refiere a las tabletas de madera con enunciados de problemas geométricos que sus autores colgaban en el pórtico de los templos, a modo de desafío. Géry Huvent ha reunido 34 sangakus para cuya solución no hacen falta resultados sofisticados, pero sí ingenio y conocimientos de geometría elemental. Una obra que recomiendo con énfasis.

6.- Enescu, B.: *Arii (Áreas). Ed. GIL, Zalau, 2006.*

Puede parecer "exótico" aquí un libro en lengua rumana. El rumano es la única lengua de Europa Oriental que tiene raíces latinas y además en Rumania nació la Olimpiada Matemática Internacional en 1959. Esta pequeña publicación (64 páginas y 11 capítulos) ofrece una muestra de cómo a través del concepto de área se pueden resolver problemas y demostrar resultados. Un librito extraordinario, en mi opinión.

7.- Rincón Abella, G.: ***Un recorrido por la geometría. Univ. Antonio Nariño, Santa Fe de Bogotá, 1994.***

También es una obra de tamaño medio (128 páginas), pero busca las demostraciones lo más sencillas posibles y esta es una gran virtud. Perfecta para empezar a estudiar geometría de Olimpiadas.

b) Nivel avanzado

8.- Davis, D.R.: ***Modern College Geometry. Addison Wesley 1949.***

Trata todos los temas importantes, con énfasis en la construcción de triángulos.

9.- Altshiller Court, N.: ***College Geometry. Barnes & Noble, 1952.***

Posiblemente el libro más citado en las soluciones de problemas de la revista *Crux Mathematicorum.* Los dos ejemplares que tengo (uno de ellos de la edición de 1925) son sendos regalos: el de 1925, de mi admirado profesor cubano Raimundo Reguera Vilar ; el de 1952, del Gerente de *Crux* Kenneth Williams.

10.- Lalesco, T.: ***La Géométrie du triangle. Ed. Jacques Gabay, 1987 (reimpresión de la edición de 1952).***

Un libro clásico, en algunos casos demasiado escueto (algunas propiedades solamente están enunciadas y su demostración no es sencilla). La Cuarta parte, titulada *La métrique du triangle,* contiene una impresionante recopilación de fórmulas con propiedades del triángulo.

11.- Honsberger, R.: ***Episodes in Nineteenth and twentieth Century Euclidean Geometry. M.A.A., New Mathematicla Library 37, 1995.***

Ross Honsberger es un magnífico expositor y prolific recopilador de resultados de Matemáticas Elementales (que no resultados elementales de Matemáticas). Aquí presenta, junto con el Prof. John Rigby, del University of Wales College de Cardiff una interesante colección de propiedades geométricas de triángulos y cuadriláteros.

12.- Louridas, S.E. & Rassias, M.Th.: ***Problem-Solving and Selected Topics in Euclidean Geometry (in the Spirit of the Mathematical Olympiads). Springer, 2013.***

Un gran libro. Geometría basada en Transformaciones geométricas, con una gran cantidad de problemas resueltos.

13.- Pop, O.T. & Minculete, N. & Bencze M.: ***An introduction to quadrilateral geometry. Editura didactica si pedagogica, 2013.***

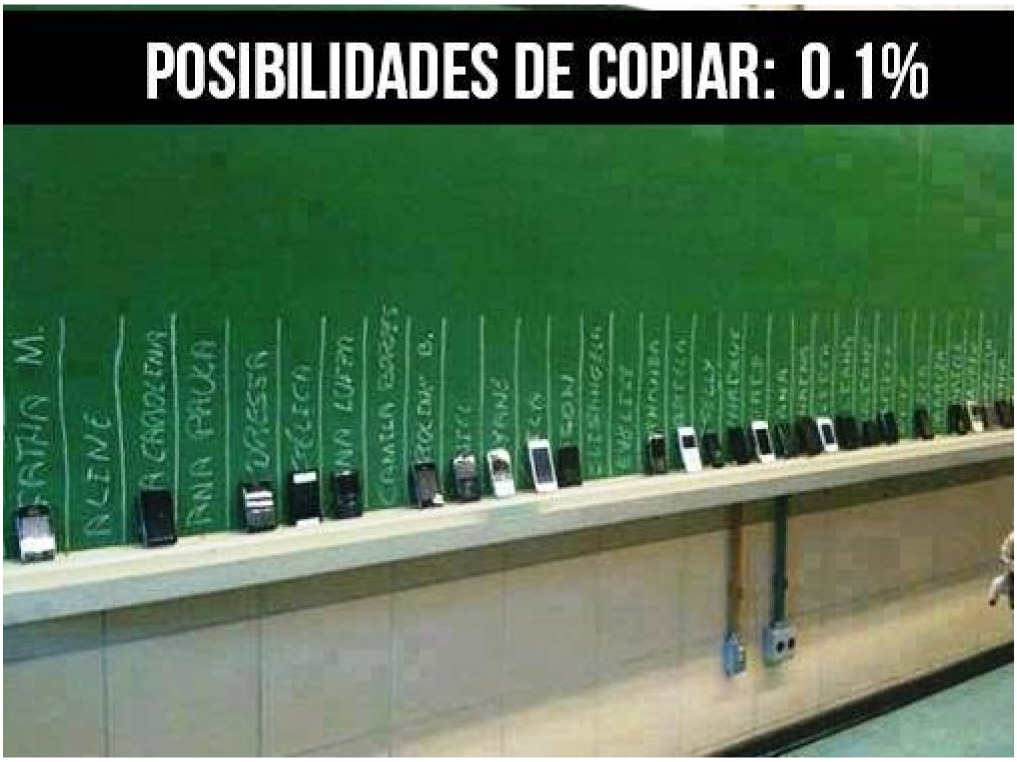
Una excelente monografía sobre la geometría de los cuadriláteros, que no había sido tratada con tanta profusión como la del triángulo. Sumamente recomendable.

Valladolid, septiembre 2015.

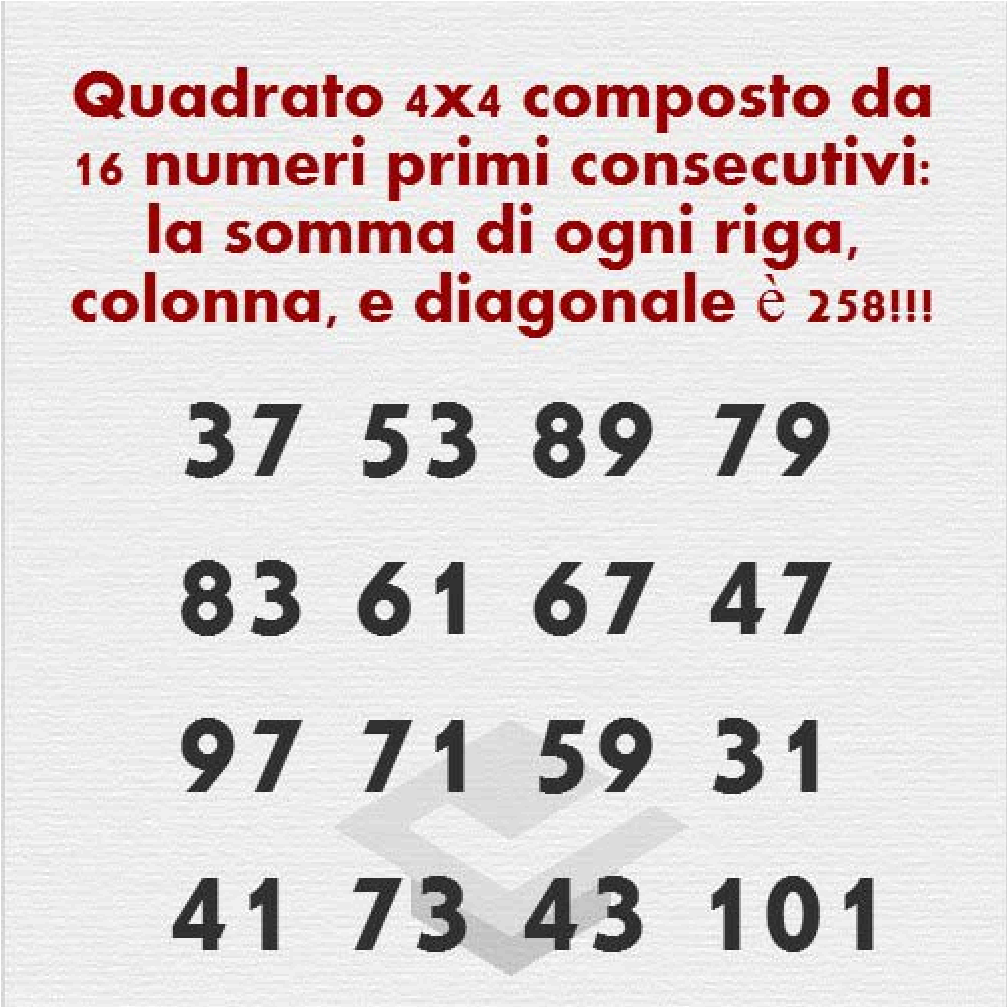
Francisco Bellot Rosado

DIVERTIMENTOS MATEMATICOS 54

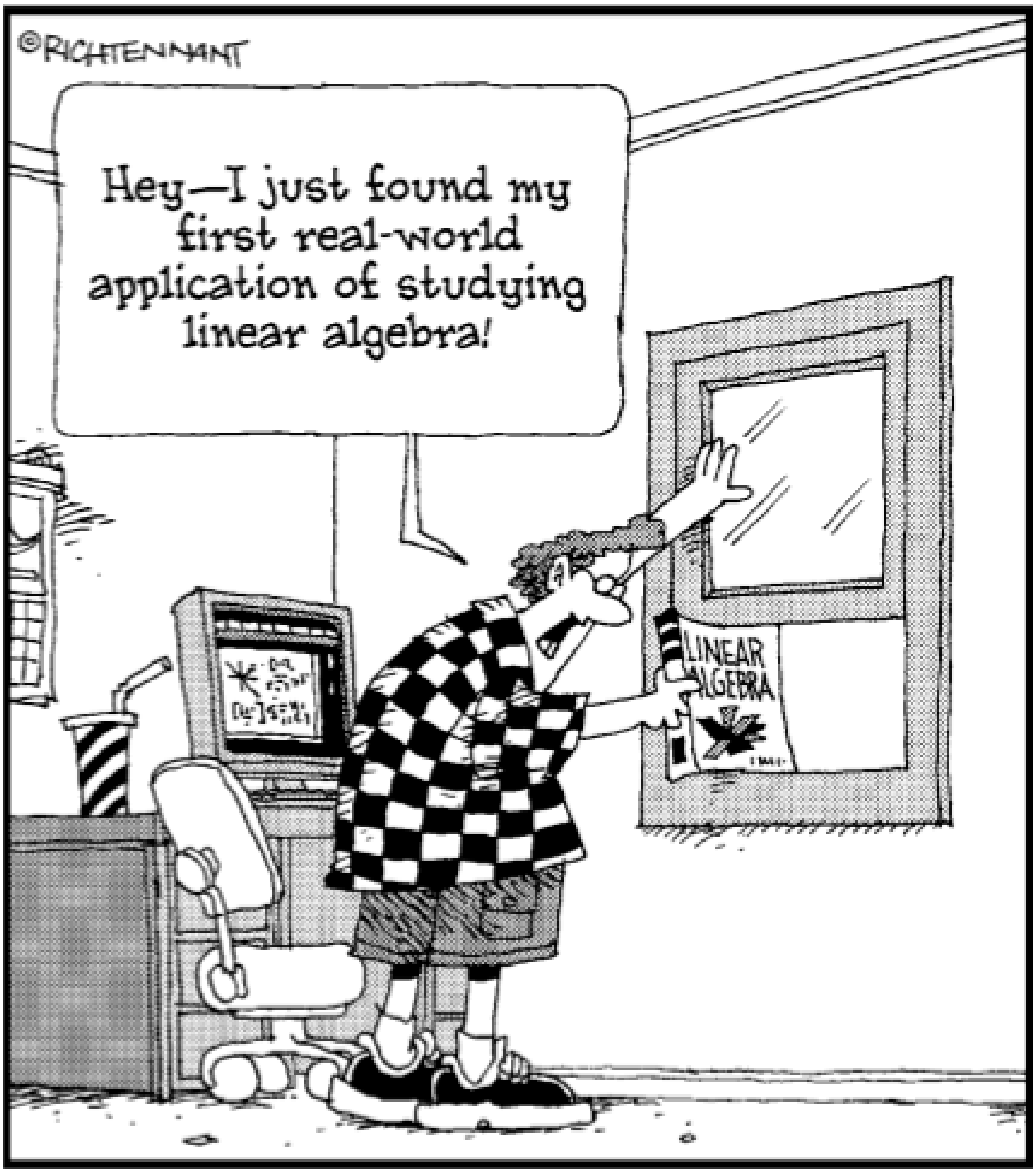
Capturado en Internet (de diversas fuentes)



Aparcamiento de celulares durante un examen



Cuadrado mágico de 16 números primos consecutivos



La verdadera utilidad del Álgebra lineal

Moneda astronómica china

4	9	7	π	5							
	π		8			9	6	1	5	2	
	8		1				π		7		
							π		4		
5	3	9	6								
9	4		π	π	π	7					
					6	2	5	π		7	4
								π	π	3	8
	7	8	4	6	9						
		3		π			4	7	1	6	9
		4		1				6		π	
								4		5	

Sudoku de pi