I Congreso Iberoamericano de
Ciencia, Tecnología, Sociedad e Innovación CTS+I

Palacio de Minería del 19 al 23 de Junio de 2006

# Tecnología computacional y matemáticas

José Fernando Arriaga Cervantes

Mesa 3

Con el desarrollo de la computación y las teorías lógico-computacionales a lo largo del siglo XX, una nueva vertiente de la práctica matemática ha visto un creciente impulso a sus fines más importantes: generar nuevo conocimiento matemático empleando de manera esencial recursos programáticos computacionales y validar a través de esos recursos dicho conocimiento. La así llamada *tecnomatemática* representa la suma de actividades que hacen converger las capacidades e intenciones de la tecnología informática para la realización de proyectos de investigación matemática. En este trabajo presentaremos, a partir de diversos problemas de carácter epistemológico referidos a la heurística, validación y aplicación de las matemáticas y que son consecuencia de la relación computación-matemática, algunas reflexiones críticas desde las perspectivas naturalista y falibilista, para finalmente concluir con una evaluación de la innovación tecnocientífica que representa el poner a disposición de las matemáticas los recursos de la informática.

## 1. Introducción

Hoy en día reconocemos una presencia cada vez mayor de la computación en el ámbito de las prácticas matemáticas. Si bien todavía se reconocen en estas prácticas maneras tradicionales de hacer, validar, enseñar, aprender y transmitir el conocimiento matemático, seguramente se acabarán por incorporar a dichas prácticas, y de manera sustantiva, las diversas capacidades que el ámbito informático y computacional ha venido desarrollando, lo que habrá de traer cambios importantes en los procesos de la gestión matemática. Así, la incorporación de la computación a la matemática implicará la generalización de nuevas formas de llevar a cabo la generación y validación del conocimiento matemático, así como del proceso de enseñanza-aprendizaje. De manera notable cambiarán los modos de comunicación de la matemática, pensando, principalmente en el potencial informativo, comunicativo y creativo de la “red”. En este trabajo llevaremos a cabo el inicio de un análisis de la relación computación-matemáticas, en el marco del naturalismo y falibilismo así como de los planteamientos de Javier Echeverría con relación a la tecnomatemáticas dentro del marco de referencia CTS. En todo caso, de lo que se tratará es de mostrar algunas de las interrelaciones de la computación y las matemáticas, con vistas, en particular, a los asuntos propios de epistemología matemática.

## 2. El desarrollo de la tecnomatemática

Dentro del marco CTS, Javier Echeverría lleva a cabo una elucidación del concepto de tecnociencia, incorporando los ejemplos necesarios para establecer que al menos una parte de las matemáticas contemporáneas pueden ser vistas como tecnomatemáticas. La tecnociencia es una de las formas que ha adoptado la ciencia en los últimos cincuenta años. Se asocia con el asunto de sus objetivos y financiación, además de los valores e intereses que entran en juego, tanto en su operación interna como externa. Además la tecnociencia amplia el espacio de los sujetos involucrados en la actividad científica, incorporando agentes gubernamentales y privados, quienes proporcionan al menos parte importante del financiamiento para la gestión científica, jugando un papel que no puede considerarse menor. En su versión más empresarial, la finalidad del avance científico es la innovación tecnológica, que permite competir eficientemente en el mercado. El destino del saber no es el saber <<por sí mismo>>, sino el saber que se aplica, el saber que permite la innovación. Dentro de este marco general, debemos mencionar que uno de los aspectos de la tecnociencia que más interés reviste al pensar la relación computación-matemáticas es el papel que juegan las redes de investigación en la producción tecnocientífica. En efecto, el laboratorio se convierte en un laboratorio-red, que deja el aislamiento de un laboratorio tradicional y da lugar a un espacio interconectado con otros del mismo tipo y que cuenta con diversas fuentes de información y canales de comunicación, gracias, entre otras cosas, a las capacidades de las nuevas tecnologías de la información y comunicación (TIC). De ese modo, la investigación y la comunicación entre los miembros de la comunidad científica se lleva a cabo en un escenario tecnológico novedoso que permite realizar una serie de procesos (constrastación y verificación de datos, observaciones, mediciones, experimentos e hipótesis) vía Internet y correo electrónico. (Echeverría, 2003, p. 70-72) Precisamente la comunidad matemática ha venido explotando de diversas maneras el potencial que la tecnología computacional ha alcanzado, entre otras las que las propias TIC ofrecen, al modo como lo hacen para la tecnociencia en general. Mas adelante veremos lo que actualmente se viene haciendo en relación con la administración de conocimiento matemático (Mathematical Knowledge Managemet)[1] y que posibilitará la futura investigación matemática en red.

Otro aspecto que menciona Echeverría y que reviste particular importancia es el axiológico: aparecen ahora los valores tecnológicos en el centro mismo de la actividad científica: la rapidez, la fiabilidad, la robustez, la compatibilidad, la integrabilidad, eficiencia, el buen funcionamiento, entre muchos otros, son aspectos que se deben de cuidar sobremanera. (Echeverría, 2003, p. 27-72)

Con relación a las matemáticas señala una serie de eventos que fueron posibilitando lo que él denomina tecnomatemáticas. Estos se refieren a la evolución de las computadoras de gran capacidad (ENIAC, el analizador diferencial de Vannevar Bush, la calculadora Z3 de Zuse, el proyecto MARK I, la computadora electrónica digital ABC (Atanasoff- Berry Computer), los ordenadores ENIAC, EDVAC y UNIVAC). Del EDVAC, desarrollado por von Neumann, afirma Echeverría:

---

[1] La siguiente información se encuentra en el documento *Deliverable 4.1: Survey of Existing Tools fos Formal MKM* (Mathematical Knowledge Managemet Network MKMnet, IST-2001-370557) el cual fue coordinado por Tudor Jebelean. El documento es el resultado de TASK 4.1: Survey of current techniques and tools and assessment of their usability for MKM, on the Work Package 4: Formal Tools in MKM. Participaron en el documento Renaud Rioboo, Christoph Benzmueller, Fairouz Kamaredine, Franz Lichtenberger, Dietter Hutter, Andrea Asperti, además del mencionado coordinador.

Financiado por la Army norteamericana, puede ser considerado como el primer ordenador en el sentido actual del término, y por tanto como el paradigma inicial de la macromatemática. La novedad principal consistió en que el programa que ordenaba la ejecución de los cálculos se grababa en la misma máquina, es decir, la idea originaria de lo que hoy denominamos software: <<la nueva máquina, contrariamente a sus predecesoras, ya no calculaba: trataba información binaria, lo que le permitía, indirectamente, efectuar cálculos>>" (p. 109) Prefigura a la tecnomatemática porque ya no sólo hace cálculos, sino que procesa información. De ahí la importancia que atribuimos al proyecto ENIAC-EDVAC para investigar el origen de la macromatemática y la tecnomatemática. (Echeverría, 2003, p. 109)

También al surgimiento de algunas áreas de la matemática o sus aplicaciones (Computational Number Theory y la criptografía, como partes de la Teoría de Números tradicional); y al desarrollo de lenguajes computaciones para el procesamiento de la información y conocimiento matemáticos (en primer lugar el lenguaje Tex, de Donald Knuth, y muchos otros que comentaremos más adelante)

Otro aspecto importante, sobre todo desde el punto de vista epistemológico concierne a los procesos de prueba de teoremas. La demostración del teorema de los cuatro colores y de otros de teoría de grupos, llevadas a cabo empleando la computadora de manera esencial, son, a decir de Echeverría, tecnomatemáticas. (Echeverría, 2003, p. 107-112)

## 3. Ámbito computacional-matemático

Respecto a la fructífera interrelación computación-matemáticas, ésta guarda importantes antecedentes. Basta pensar en Pascal[2], Leibniz[3], Lulio, Babbage, Jevons[4], Turing y Von Neumann para constatar que la idea de vincular a las matemáticas con máquinas y computadoras no es nueva.

Actualmente la relación computación-matemática corre en tres direcciones. En primer lugar tenemos la vertiente de la aplicación de las matemáticas (principalmente el álgebra booleana, las matemáticas discretas, la teoría de gráficas, la lógica matemática, la probabilidad y estadística, la cibernética, la teoría de la información, la teoría de categorías y la teoría de conjuntos) a la computación, a través de los desarrollos en la teoría de la ciencia computacional (teoría de la información algorítmica, teoría de la computación, criptografía, semántica formal de lenguajes de programación, teoría de tipos, computación cuántica y teoría de la información cuántica); el desarrollo de hardware (estructuras de control y microprogramación, aritmética y estructuras lógicas, estructuras de memoria, diseño lógico, circuitos integrados); la organización de sistemas de cómputo (arquitectura computacional, redes computacionales); el desarrollo de software (programas computacionales incluyendo lo que se conoce como verificación de programas, técnicas de programación, ingeniería de

---

[2] Construyó una máquina capaz de sumar y restar. (Beeson, 2003: 5),

[3] Leibniz estimó necesaria una reducción del pensamiento al cálculo. De ese modo, su famoso <<calculemus>> (calculemos) sería el método para dirimir cualquier tipo de confrontación práctica o intelectual. De hecho construyo una máquina calculadora (Stepped Reckoner). Este artefacto podía realizar sumas, restas, multiplicaciones y divisiones de manera automática, con sólo darle vuelta a la manivela. Dos de estas máquinas se encuentran en los museos de Munich y Hanover (Beeson, 2003: 5)

[4] Jevons construyó la primera máquina capaz de realizar inferencias. Se le llamó *Logical Piano* por su similitud con los pianos pequeños y su diseño está basado en el álgebra booleana. El artefacto se encuentra hoy día en el Museo de la Ciencia de Oxford (Beeson, 2003: 6)

software, lenguajes de programación, sistemas operativos, compiladores); el manejo de datos y sistemas de información (estructura de datos, representación de bases de datos, encriptación de datos, compresión de datos, recuperación de datos, codificación y teoría de la información, archivos y formatos de archivo, sistemas de información); las metodologías de cómputo (manipulación simbólica y algebraica, inteligencia artificial, graficación computacional, procesamiento de imágenes y visión computacional, reconocimiento de patrones, modelación y simulación, procesamiento de textos y simulación, procesamiento de señales digitales).

En segundo lugar tenemos, la aplicación de la computación a la matemática. Se incluyen aquí las aportaciones de la calculadora y la computadora en tanto instrumentos de cálculo numérico, pero sobre todo el apoyo que puedan brindar a la generación y justificación del conocimiento matemático. Así, existen programas cuya finalidad es el proponer conjeturas de manera automática (Automated Mathematical Conjecture-Making) y otros que se proponen para la demostración automática de teoremas (Mathematical Provers)

La automatización de los procesos de investigación matemática y que incluyen la invención de nuevos conceptos así como la proposición y demostración de nuevos teoremas ha dado lugar a lo que se ha llamado <<conjeture-making programs>>. Hao Wang, a finales de los años cincuenta introdujo el primer programa para generar proposiciones matemáticas novedosas. Su Program II, de 1960 producía afirmaciones en el lenguaje de la lógica y el mismo Wang reconoció que éste era sólo un primer paso en la búsqueda de resultados en áreas matemáticas más complejas (Wang, citado en Larson, 1991: 2) Este autor reportó 14,000 afirmaciones no triviales generadas por su programa, 1,000 de las cuales eran de hecho teoremas ya demostrados. En suma, según Larson "El trabajo de Wang debe ser visto como un experimento que debería ser extendido a "dominios más avanzados" (Larson, 1991: 4) En efecto

La selección de conjeturas interesantes o teoremas y de definiciones útiles es al menos fácilmente mecanizable. Por ejemplo el Program II nos da solamente resultados muy crudos. Debería ser de nuestro interés tratar de obtener mejores resultados a lo largo de lo misma línea. En dominios más avanzados, sin embargo, el problema parece tener una complejidad de diferente orden.

Si usamos una máquina para procesar una gran cantidad de pruebas, entonces parece haber alguna prueba mecánica para la importancia y centralidad de conceptos y teoremas. Si un teorema o expresión se presenta frecuentemente, entonces desearíamos considerar el teorema como interesante o introducir una definición para esa expresión.

…

Un criterio más estable podría ser este: Una fórmula que es breve pero que sólo se ha probado con pruebas largas es un teorema "profundo". (Wang, citado en Larson, 1991: 2)

Es interesante mencionar que el logro más conocido de Wang fue un programa con el cual pudo probar todos los teoremas de los primeros cinco capítulos de Principia Matemática de Russell y Whitehead.

Otros programas que automatizan la búsqueda de conjeturas son AM (1975) y Eurisko (1977) de Lenat, Cyrano (1986) de Hasse y GT (Graph Theorist) (1987) de Epstein y Grafitti (1986) de Fajtlowicz . Como resultado de este último programa muchos matemáticos han publicado numerosos artículos, tesis y disertaciones en los cuales han demostrado o mostrado la falsedad de las conjeturas de Grafitti. Entre estos matemáticos se encuentra el destacado Paul Erdös. Las primeras conjeturas de Grafitti se enmarcan en el campo de la teoría de gráficas, la geometría, la teoría de números e incluso la química. (Larson, 1991: 6) Hay otros programas cuyos propósitos son los mismos. Entre ellos el de Bagai, Shanbhogue, Zytkow y Chou, y que presentan en su Automatic Theorem Generation in Plane Geometry (1993); y otro más, el HR (1990) de Simon Colton y sus colegas de la Universidad de Edimburgo que desarrollaron con la intención de automatizar todos los aspectos de la investigación matemática, entre los cuales está la formulación de conjeturas. Como ilustración, Larson señala tres ejemplos de los muchos que Colton presenta como resultados de la aplicación de su programa. Uno de ellos es: "Para grupos G y G' de órdenes no mayor a 6, G y G' son isomorfos si y sólo si f(G) = f(G'), donde la función f se define como sigue: para todo grupo G, f(G) = /{(a,b,c) de G3 : a * b = c y b * c = a}/" (Larson, 1991: 10)

El propio Larson advierte que la investigación en los programas que establezcan conjeturas es aun muy joven y que las técnicas exitosas que ya se conocen se deberían extender de manera amplia y generalizada a la investigación, en vista de que la formación de conjeturas es una parte medular de la práctica matemática. En opinión de Larson (1991) lo que hace verdaderamente interesante un concepto, una afirmación o una teoría matemática es la contribución que hace al avance de esta ciencia, lo que se reconoce sobretodo cuando ese nuevo conocimiento responde o ayuda a responder las preguntas matemáticas existentes. Este tipo de conjeturas son lo que podrían llamar conjeturas de investigación. Es decir, lo que hace de una conjetura, una conjetura interesante es la relación que guarda con los objetivos matemáticos del momento. En este sentido es que

El primer programa que ha establecido conjeturas para la investigación (conjeture researches) fue el Grafitti de Siemion Fajtolowicz, que apareció inicialmente a la mitad de los años ochenta. Una diferencia importante entre éste y los anteriores programas fue que las afirmaciones producidas eran, por diseño, cotas para invariantes, las cuales son buscadas y publicadas por los matemáticos. Los más exitosos de estos programas a la fecha son aquellos que proporcionan afirmaciones que apuntan a la solución de problemas matemáticos existentes. Este principio es casi central para el diseño de los programas de generación de conjeturas. (Larson, 1991:. 3)

Así que él ve un futuro en el cual los programas para la elaboración automática de conjeturas serán herramientas de uso común en la investigación matemática, por supuesto afectando de manera sustancial la práctica en la comunidad correspondiente. (Larson, 1991: 14)

En el ámbito del desarrollo de los programas para la demostración automática de teoremas encontramos una buena cantidad de ejemplos. Estos programas comprenden tres estilos diferentes de interacción. El primero consiste en los "verificadores de pruebas" (Mizar, Alfa/Agda); el segundo comprende los "asistentes de pruebas" (proof assistans) (Automath, HOL, PVS, Coq, Isabelle/Isar, ACL2, PhoX, IMPS, Matemath, Lego, NuPRL, Omega); y el tercero que corresponde a los llamados "demostradores automáticos de teoremas" (Automated Theorem Provers) (Otter/Ivy, Theorema ) Los verificadores se usan para constatar mecánicamente las pruebas desarrollas por los matemáticos (Wiedijk, 2003, p. 1-14) Todos estos programas se basan en la formalización de las matemáticas con base en diferentes lógicas, lo que podemos apreciar en la siguiente tabla que Freek Wiedijk presenta en Comparing mathematical Provers (2003, p. 9):

| | HOL | Mizar | PVS | Coq | Otter/Ivy | Isabelle/Isar | Alfa/Agda | ACL2 | PhoX | IMPS | Mathemath | Theorema | Lego | NuPRL | Omega |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| primitive recursive arithmetic | | | | | | | | * | | | | | | | |
| first order logic | | | | | * | | | | | | | | | | |
| higher order logic | * | | * | | | * | * | | * | * | | * | * | | * |
| first order set theory | | * | | | | * | | | | | * | | | | |
| higher order set theory | | | | * | | | | | | | | | | * | |
| clasical logic | * | * | * | | * | * | | * | * | * | * | * | | | * |
| constructive logic | | | | * | | | * | | | | | | * | * | |
| quantum logic | | | | | | | | | | | * | | | | |
| fixed logic | * | * | * | * | * | | * | * | * | * | | * | * | * | * |
| logical framework | | | | | | * | | | | | * | | | | |

Este autor menciona una serie de teoremas que han sido formalizados y verificados por estos programas. Entre estos podemos mencionar algunos importantes (entre paréntesis se mencionan algunos de los programas en los que se ha formalizado y verificado el resultado): el Teorema Fundamental del Algebra (*HOL, Coq*, *Mizar*); los Teoremas de Incompletud de Gödel (*HOL, Coq*); el Teorema Fundamental del Cálculo (*HOL, Isabelle*, *Coq, Mizar*); la no numerabilidad del continuo (*HOL, Isabelle, Mizar*); el Teorema de los Cuatro Colores (*Coq*); el Teorema del Punto Fijo de Brouwer (*HOL, Mizar*); el Principio de la Inducción Matemática (*HOL, Isabelle, Coq, Mizar*); el Teorema del Valor Medio (*HOL, Isabelle, Coq, Mizar*); el Teorema Fundamental de la Aritmética (*HOL, Isabelle, Coq, Mizar, NuPRL*) (Wiedijk, 2006, p. 1-9)

Además tenemos algunos ejemplos de teoremas que se han demostrado empleando de manera esencial a la computadora, y que cabrían en el ámbito de asistentes de pruebas. Quizá el más el celebre es el Teorema de los Cuatro Colores, pero también debemos incluir otros como el que afirma la no existencia de un plano proyectivo de orden 10, una más relacionado con la hiperbolicidad de 3-variedades y finalmente el vinculado con la famosa Conjetura de Kepler.

En tercer lugar tenemos lo tocante a la comunicación del conocimiento matemático en la era digital, que bien puede pensarse que corresponde a la aplicación de la computación a las matemáticas. Y en efecto, corresponde a ello, pero dado el impacto tan grande en los aspectos informativos, comunicativos y heurísticos asociados a las redes de investigación en la comunidad matemática, vale la pena situarlo en un ámbito diferente. También por la que Echeverría ve en el impacto que los laboratorios-red tienen en el quehacer tecnocientífico. Hoy día existen varios proyectos muy ambiciosos relacionados con el ideal de tener todo el conocimiento matemático disponible, para todos los participantes de la comunidad matemática, incluyendo los diferentes tipos de miembros de la misma: matemáticos, editores de revistas especializadas, docentes, estudiantes y público en general. Uno de estos proyectos es *Mathematical Knowledge Management* (MKM), que contempla por lo menos el almacenaje y cuidado del conocimiento matemático con la intención de poder recuperar el material pertinente para el desarrollo de un proyecto de estudio, de divulgación y sobre todo de investigación. Por razones técnicas el proyecto está relacionado con: lenguajes para representar formalmente a las matemáticas (*MathLM*, *OpenMath*, *OMDoc*, *FoC*, *Mizar*); bases de datos de conocimiento matemático (*repositories y libraries*) (*MBase, Mizar*); técnicas y herramientas para organizar y presentar el conocimiento matemático (*ActivMath*, *Automath*, *MathLang*, *Mizar*, Teorema); la especificación algebraica de métodos y herramientas (*CASL*, *The CASL Tools Set* (*CATS*); sistemas automáticos de razonamiento (*First-Order Theorem Provers*, *Inductive Theorem Provers*, *Higher-Order* and *Type Theory Proof Systems*); y sistemas algebraicos computacionales

(*Matemática*, *Maple*, *Reduce*, *MuPAD*). Como ejemplo de los logros que se pueden tomar como referencia para la consecución de los objetivos de MKM podemos mencionar lo que, a través de *Mizar* se ha logrado en términos de almacenamiento de conocimiento. La *Mizar Mathematical Library* (*MML*) incluye, entre muchos otros, los siguientes teoremas: Teorema de punto fijo para variedades compactas, Teorema Fundamental del Algebra, Teorema de Hanh-Banach, Teorema de Curva de Jordan. También *Mizar* genera la es la *Encyclopedia of Mathematics in Mizar* (*EMM*) y *Formalizad Mathematics,* la revista que publica los contenidos de *MML*. (Jebelean, 2001)

## 4. La filosofía de la relación computación-matemáticas

La relación computación-matemáticas es compleja. Aquí planteamos algunos aspectos de esta relación que son de carácter filosófico en el marco del naturalismo, el falibilismo y los estudios CTS y que nos pueden ayudar a dimensionar su importancia en la actualidad. Los aspectos que consideraremos en esta breve reflexión son los que se refieren al lenguaje, los criterios de validación del conocimiento matemático y la pretendida red de comunicación de la tecnomatemática. Concluiremos, provisionalmente, con la idea de que la práctica matemática está siendo sujeta a modificaciones fundamentales toda vez que la presencia de las computadoras y de las tecnologías TIC es cada vez mayor.

Al situar a las matemáticas en el contexto computacional el lenguaje matemático se ve enriquecido. La representación del conocimiento matemático debe ser formal y de acuerdo a un lenguaje que permita el procesamiento computacional que se requiere para la generación de conjeturas, revisión de pruebas, demostración de teoremas o comunicación en la red. Esta representación obliga a traducciones del lenguaje matemático natural al lenguaje matemático formal y de éste al lenguaje computacional. En este sentido, la práctica matemática obliga a una especie de multilingüismo que permita al matemático o al grupo de matemáticos la representación del conocimiento explícito de diferentes maneras, adecuadas a las necesidades de procesamiento específicas.

Comentario [S1]:

Comentario [S2]:

Con relación a la validación del conocimiento matemático recordemos que a lo largo de la historia de las matemáticas encontramos ejemplos importantes en los cuales los criterios de justificación, rigor y pruebas son diversos y problemáticos. Hoy en día se han desarrollado los recursos computacionales para formular, probar y falsar conjeturas. Por supuesto que la sola mención de desarrollar una demostración empleando de manera ineludible un recurso empírico como la computadora propicia una controversia alrededor de la idea de justificación y prueba matemática. Appel y Haken, en 1976 propusieron una prueba para el problema de los cuatro colores, misma que requería el uso ineludible de la computadora (Appel y Haken 1981 y 2002 [1978]) Esta prueba suscitó diversos tipos de inquietudes. Entre ellos podemos mencionar las que se refieren a la idea de justificación y prueba, por un lado, y las que se refieren a la práctica matemática, por otro. ¿Es un teorema ya demostrado aquél cuya prueba hace un uso *inevitable* de la computadora? ¿De que modo se afectan los procedimientos contemporáneos de llevar a cabo la práctica matemática?

El problema surge cuando parte del proceder formal demostrativo requiere de la computadora. Según Kleiner (1990, P.309) en primer lugar, la demostración contiene miles de páginas de programa computacional que no han sido publicadas y así no han sido abiertas al procedimiento tradicional de verificación por la comunidad matemática. La prueba no ha sido, en palabras de Tymoczko, uno de sus más fuertes críticos, "examinada" (*surveyable*), (ver Tymoczko, *The Four-Color Theorem and Its Philosophical Significance (1980, 198, 1998);* y sus réplicas: M. Detlefsen and M. Lucker, *The Four-Color Theorem and Mathematical Proof* (1980) y E.R. Swart, *The Philosophical Implications of the Four-Color Problem* (1980) Este aspecto es fundamental. La demostración no se puede examinar, de donde su aceptación implica, tácitamente, la ampliación de la noción de prueba. Al menos los programadores y los elementos empíricos propios de la computadora reciben un voto de confianza. ¿Y acaso no es siempre el caso? Sistemas axiomáticos y racionalidad "pura", el buen oficio matemático, que por cierto cae en muchos errores, son parte de los procesos de validación, por así llamarlos <<estándar>> En todo caso, asumiendo una ampliación de la visión filosófica de las matemáticas, cabe esperar la incorporación de las vicisitudes de los procesos computacionales ligados a la formalización del conocimiento y a la automatización del mismo, de la revisión de los aspectos irremediablemente empíricos de la sistemas computacionales y su confiabilidad relativa, a los criterios de validación del conocimiento matemático.

Finalmente, con relación a la red de comunicación matemática, ésta es consecuencia del afán de integración y comunicación en la naciente sociedad del conocimiento. Las TIC propician la vinculación y la competitividad. La educación matemática cambiará. Hoy las posibilidades del aprendizaje constructivo propiciado por la comunicación matemática en las plataformas disponibles en la red y basado en la interacción, el sentido, y la aplicabilidad orientan el quehacer pedagógico, esperamos que con mejores resultados que los que una educación tradicional han alcanzado al menos en dos aspectos fundamentales: la mentalidad matemática y la valoración de esta disciplina.

Pero también la generación y validación del conocimiento matemático se ven modificadas en la sociedad del conocimiento. En un mundo globalizado que dispone de una red vinculante que obliga a las interactividad y a los proyectos en línea, la producción matemática puede alcanzar mayores y mejores resultados. Además, y tal como es la pretensión de MKM, por ejemplo, la misma red es canal de transmisión de información, de comunicación de proyectos e invitación a los mismos dada la cercanía y/o pertinencia temática, y de validación automática o revisión de pruebas, de modo que se incremente el grado de confianza que tenemos en la matemática, en la tecnomatemática.

La relación computación-matemáticas es compleja. Vimos como en ambas direcciones es una relación productiva y prometedora. Si bien aparecen, como es natural, problemas relacionados con la gestión tecnomatemática, es necesario dimensionar apropiadamente la misma.

**Bibliografía**

APPEL, K.; HAKEN, W. (2002) [1978] “The Four Color Problem” En Jacquette (ed.) *Philosophy of Mathematics*: 193-208, USA/UK: Blackwell, Publishers.

APPEL, K. y HANKELI, W. (1981) “The Nature of Proof: Limits and Opportunities”, *The Two-Year College Mathematics Journal*, Vol 12, Issue 2: 118-119.

BEESON, M., (2003) “The Mechanization of Mathematics” en Teuscher (ed.) *Alan Turing: Life and Legacy of Great Thinkers*, Berlin Heildelberg New York, Springer-Verlag.

DETLEFSEN, M. y LUKER, M. (1980) “The Four-Color Theorem and Mathematical Proof”, *The Journal of Philosophy*, Vol. 77, No.12: 803-820.

ECHEVERRIA, Javier, *La Revolución Tecnocientífica,* Fondo de Cultura Económica, España, 2003.

JACQUETTE, D. (2002) *Philosophy of Mathematics, An Anthology*, USA/UK. Blackwell Publishers.

JEBELEAN, Tudor, (ed.) (2001) “Survey of Existing Tools for Formal MKM”, Mathematical Knowledge Network, MKMnet, IST-2001-37057.

KLEINER, I. (1990) “Rigor and Proof in Mathematics: A Historical Perspective”, *Mathematics Magazine*, Vol. 64, Issue 5: 291-314.

LARSON, C.E. (1991) “A Survey of Research in Automated Mathematical Conjecture-Making” http://math.uh.edu/~clarson/larson-graphs_and_discovery.pdf

SWART, E.R. (1980). “The Philosophical Implications of the Four-Color Problem”, *The American Mathematical Monthly*, Vol. 87, No. 9: 696-707.

TYMOCZKO, T. (1980) “Computers, Proofs and Mathematicians: A Philosophical Investigation of the Four-Color Proof” *Mathematics Magazine*, Vol. 53, No. 3: 131-138.

TYMOCZKO, T, (1981) “Computer Use to Computer Proof: A Rational Reconstruction”, *The Two-Year College Mathematics Journal*, Vol. 12, No. 2: 120-125.

TYMOCZKO, T. (1998) New *Directions in the Philosophy of Mathematics. An Anthology*. USA, Princeton University Press.

TYMOCZKO, T. (1998). “The Four-Color Problem and Its Philosophical Significance”. En T. Tymoczko (ed.) *New Directions in the Philosophy of Mathematics*: 243-266, USA Princeton University Press.

WIEDIJK, Freek, (2006) Formalizing 100 Theorems:
http://www.cs.ru.nl/~freek/100/index.html

WIEDIJK, Freek, (2003) Comparing Mathematical Provers:
http://math.uh.edu/~clarson/larson-graphs_and_discovery.pdf

**JOSÉ FERNANDO ARRIAGA CERVANTES**

Tecnológico de Monterrey
Campus Ciudad de México
jfarriaga@itesm.mx