Problema 116 bis

Sean x e y números reales tales que

$$\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{y^2-3y}=1 .$$

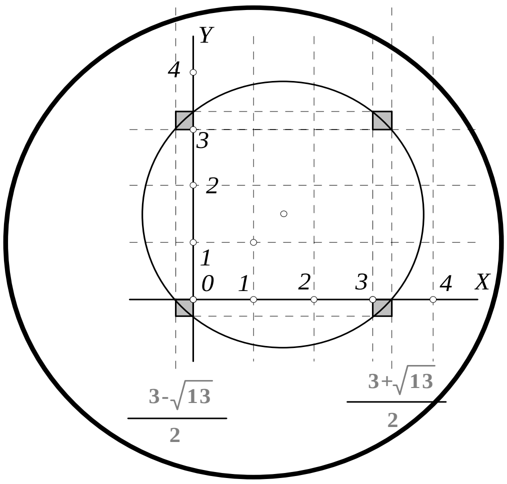
Demostrar que

$$x^2+y^2<2\left(x+y\right)+15 .$$

Solución 1

La condición $\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{y^2-3y}=1$ exige que cada radicado sea mayor o igual que 0 y menor o igual que 1 lo que nos lleva a las acotaciones: $\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\le x\le 0\\ 3\le x\le\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{cases}$, $\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{13}}{2}\le y\le 0\\ 3\le y\le\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}\end{cases}$

Es decir los puntos cuyas coordenadas verifiquen la condición del enunciado quedan ubicados en el interior o la frontera de los cuatro cuadrados sombreados de la figura y estos cuadrados a su vez son interiores a la región $x^2+y^2<2\left(x+y\right)+15$ que es claramente un círculo de centro (1, 1) y radio $\sqrt{17}$ (de trazo grueso en la figura).



Solución 2.

Elevando al cuadrado la condición del enunciado:

$$\sqrt{x^2-3x}+\sqrt{y^2-3y}=1\Rightarrow x^2-3x+y^2-3y+2\sqrt{\left(x^2-3x\right)\left(y^2-3y\right)}=1$$

y siendo el radicando positivo, se deduce

$$x^2+y^2\le 3\left(x+y\right)+1$$

que es el interior de un círculo de centro $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ y radio $\sqrt{\dfrac{11}{2}}$ (de trazo fino en la figura) claramente incluido en el interior del círculo del enunciado.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI