

PROBLEMAS DE NIVEL MEDIO Y DE OLIMPIADAS (27)

Presentamos cinco problemas propuestos en la Olimpiada Zhautykov 2006, Alma Ata, Kirguistán.

27-1. Hallar todos los enteros positivos n tales que $n = \varphi(n) + 402$, donde φ es la función de Euler (es conocido que si p_1, \dots, p_k son todos los diferentes divisores primos de n , entonces

$$\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right), \text{ y } \varphi(1) = 1.)$$

27-2. Los puntos K y L están en los lados AB y AC, respectivamente, del triángulo ABC, de tal manera que $BK = CL$. Sea P el punto de intersección de BL y CK, y sea M un punto interior al segmento AC tal que la recta MP sea paralela a la bisectriz del ángulo A del triángulo ABC. Demostrar que $CM = AB$.

27-3. Una tabla $m \times n$ ($4 \leq m \leq n$) se llamará *buena* si los números 0 y 1 se pueden situar en los cuadrados unidad de la tabla verificando las condiciones siguientes:

- 1) no todos los números son ceros ni todos los números son unos.
- 2) El número de "unos" en cualquier cuadrado 3×3 es el mismo.
- 3) El número de "unos" en cualquier cuadrado 4×4 es el mismo, también.

Hallar todos los pares (m, n) ($4 \leq m \leq n$) para los cuales existe una tabla *buena* $m \times n$.

27-4. Si la suma de los números reales a, b, c, d es cero, demostrar la desigualdad

$$(ab + ac + ad + bc + bd + cd)^2 + 12 \geq 6(abc + abd + acd + bcd).$$

27-5. En el hexágono convexo ABCDEF se tiene

$$AD = BC + EF, \quad BE = AF + CD, \quad CF = DE + AB.$$

Demostrar que

$$\frac{AB}{DE} = \frac{CD}{AF} = \frac{EF}{BC}.$$

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

