Solución al Problema 129

Samuel Gómez Moreno,
Departamento de Matemáticas, Universidad de Jaén.
samuel@ujaen.es

PROBLEMA 129

Calcular

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx.$$

SOLUCIÓN

Teniendo en cuenta que

$$\frac{1}{2}\frac{\sin 2nx}{\sin x}=\cos x+\cos 3x+\ldots+\cos(2n-1)x,$$

como puede probarse fácilmente usando inducción, nos queda

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx &= 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2k-1)x\,dx=2\sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= 2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}\right).\end{aligned}$$

Por tanto, usando que

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots=\arctan 1=\frac{\pi}{4},$$

resulta finalmente

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\,dx = 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{2k-1}=2\arctan 1=\frac{\pi}{2}.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI