Problema 126

2 de octubre de 2006

Propuesto por Laurentiu Modan, Bucarest, Rumania. Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la sucesión definida por

$$\begin{cases} a_0 &= & -\frac{1}{2} \\ a_1 &= & 1 \\ a_{n+1} &= & 5a_n - 6a_{n-1} + 3 - 2n. \end{cases}$$

Calcular el límite siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^{2n}} \right) a_n$$

Solución de José Hernández Santiago, Oaxaca, México. Al resolver la relación de recurrencia dada, haciendo uso de funciones generatrices por ejemplo, obtenemos que:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^{n-1} - (n+1).$$

Así, al tenerse que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^{2n}} \right) a_n &= \frac{2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^{n-1} - (n+1)}{3^n} + \frac{2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^{n-1} - (n+1)}{2^{2n}} \\ &= \left(2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \frac{n+1}{3^n} \right) + \left(2\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{3}{2^{n+1}} - \frac{n+1}{2^{2n}} \right), \end{aligned}$$

se concluye que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{2^{2n}} \right) a_n = 2.$$

*

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI