

Problema 125.

Si  $a, b, c$  son estrictamente positivos, demostrar que

$$abc \leq \sqrt{\frac{abc(a^2b + b^2c + c^2a)}{3}} \leq \frac{1}{3}(a^2b + b^2c + c^2a)$$

*Solución:* Si tomamos las dos desigualdades por separado, después de elevarlas al cuadrado y simplificar llegaremos a la misma desigualdad:

$$abc \leq \frac{1}{3}(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Ésta es la que vamos a probar. Dado que  $a, b, c$  son estrictamente positivos, nada nos impide considerar las tres cantidades

$$\frac{a}{c}, \frac{c}{b}, \frac{b}{a}.$$

Aplicando la desigualdad aritmético-geométrica a estas tres cantidades, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}}{3} &\geq \sqrt[3]{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{a}} \implies \\ \implies \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{3abc} &\geq 1 \implies abc \leq \frac{1}{3}(a^2b + b^2c + c^2a) \end{aligned}$$

lo cual termina el problema.

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoidm/>

Edita:

