Formulas de Angulo Múltiple

Julio Castiñeira Merino
jcastine@boj.cnice.mecd.es

A la memoria de mis padres: Julio y Ángeles

Este trabajo explica algunas de las propiedades de las fórmulas de ángulo múltiple. En primer lugar expresaremos de forma concisa las fórmulas de ángulo múltiple de las funciones trigonométricas e hiperbólicas. Posteriormente utilizaremos estas fórmulas en algunas temas de trigonometría, álgebra y en geometría.

Para la función coseno, las fórmulas de ángulo múltiple se pueden expresar usando los polinomios de Chebyshev **[1], [6].** Estos polinomios están definidos por la relación de recurrencia

$$\begin{cases} T_0(x)=1, \qquad T_1(x)=x \\ T_n(x)=2x\cdot T_{n-1}(x)-T_{n-2}(x), \quad n\geq 2 \end{cases}.$$

Los ocho primeros polinomios con sus correspondientes fórmulas de ángulo múltiple son:

Polinomio	Fórmula
$T_0(x)=1$	$\cos 0\cdot a=1$
$T_1(x)=x$	$\cos 1\cdot a=\cos a$
$T_2(x)=2x^2-1$	$\cos 2\cdot a=2\cos^2-1$
$T_3(x)=4x^3-3x$	$\cos 3a=4\cos^3 a\cdot -3\cos a$
$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$	$\cos 4a=8\cos^4 a-\cos^2 a+1$
$T_5(x)=16x^5-20x^3+5x$	$\cos 5a=16\cos^5 a-20\cos^3 a+5\cos a$
$T_6(x)=32x^6-48x^4+18x^2-1$	$\cos 6a=32\cos^6 a-48\cos^4 a+18\cos^2 a-1$
$T_7(x)=64x^7-112x^5+56x^3-7x$	$\cos 7a=64\cos^7 a-112\cos^5 a+56\cos^3 a-7\cos a$

Observamos que los polinomios de Chebyshev cumplen la propiedad

$$\cos na=T_n(\cos a).$$

Demostración

Por inducción sobre *n*.

Para los valores iniciales $n=0$ y $n=1$ tenemos:

$$\cos 0a=1=T_0(\cos a),$$

$$\cos 1a=\cos a=T_1(\cos a)$$

Supongamos que la fórmula es cierta para todo valor de k < n,

Aplicando la fórmula de la diferencia de cosenos

$$\cos na-\cos(n-2)a=2\cos(n-1)a\cdot\cos a$$

es decir

$$\cos na=2\cos a\cdot\cos(n-1)a-\cos(n-2)a$$

por hipótesis de inducción sabemos que

$$\cos(n-1)a=T_{n-1}(\cos a) \quad y \quad \cos(n-2)a=T_{n-2}(\cos a)$$

Luego

$$\cos na=2\cos a\cdot T_{n-1}(\cos a)-T_{n-2}(\cos a)$$

Sustituyendo $x = cos\, a$ en la fórmula de recurrencia $T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ tenemos que

$$T_n(cos\, a) = 2\, cos\, a \cdot T_{n-1}(cos\, a) - T_{n-2}(cos\, a),$$

por tanto

$$cos\, na = T_n(cos\, a).$$

Observemos que la fórmula anterior también se verifica para valores complejos del argumento, puesto que la fórmula de la diferencia de cosenos es cierta para argumento complejo. Una consecuencia de este hecho es que la fórmula de argumento múltiple para el coseno hiperbólico es

$$Ch\, na = T_n(Ch\, a)$$

En efecto

$$Ch\, na = cos\ ina = T_n(cos\, ia) = T_n(Ch\, a).$$

Una propiedad que será utilizada posteriormente es

$$T_n(sen\, a) = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \cdot sen\ na & n\ impar \\ (-1)^{n/2} \cdot cos\, na & n\ par \end{cases}$$

Demostración
En efecto

$$T_n(sen\, a) = T_n\left(cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right) = cos\left[n \cdot \left(\frac{\pi}{2} - a\right)\right] = cos\left(\frac{n\pi}{2} - na\right),$$

como

$$cos\left(\frac{n\pi}{2} - na\right) = cos\frac{n\pi}{2} cos\, na + sen\frac{n\pi}{2} sen\, na = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \cdot sen\, na, & n\ impar \\ (-1)^{n/2} \cdot cos\, na, & n\ par \end{cases},$$

la igualdad queda demostrada.

Ejercicios
1. Demostrar que el polinomio de Chebyshev tiene grado *n* y tiene *n* raíces simples.
2. Demostrar que el polinomio de Chebyshev de grado *n* es una función par si *n* es par y es una función impar si *n* es impar.
3.-Demostrar la propiedad transitiva de los polinomios de Chebyshev

$$T_n(T_m(x)) = T_{n \cdot m}(x).$$

Fórmulas para la función seno

Derivando la formula $cos\, na = T_n(cos\, a)$ podemos obtener una fórmula de ángulo múltiple para la función seno. En efecto

$$-n \cdot sen\, na = T_n'(cos\, a) \cdot (-sen\, a)$$

Es decir

$$sen\, na = sen\, a \cdot \frac{T_n'(cos\, a)}{n}$$

Al polinomio $U_n(x) = \cdot \frac{T_{n+1}'(x)}{n+1}$, se le llama polinomio de Chebyshev de segunda clase de grado *n* **[6]**. Usando estos polinomios la fórmula de ángulo múltiple de la función seno se expresa

$$sen\, na = sen\, a \cdot U_{n-1}(cos\, a).$$

Análogamente para el seno hiperbólico tenemos la fórmula

$$Sh\, na = Sh\, a \cdot U_{n-1}(Ch\, a)$$

que se deduce derivando la fórmula de argumento múltiple para el coseno hiperbólico.

Los siete primeros polinomios de Chebyshev de segunda clase con sus correspondientes fórmulas de ángulo múltiple son:

Polinomio	Fórmula
$U_0(x)=1$	$sen\ 1a = sena$
$U_1(x)=2x$	$sen\ 2a = 2sen\,a \cdot cos\,a$
$U_2(x)=4x^2-1$	$sen\ 3a = sen\,a \cdot \left(4cos^2\,a - 1\right)$
$U_3(x)=8x^3-4x$	$sen\ 4a = sen\,a \cdot \left(8cos^3\,a - 4cos\,a\right)$
$U_4(x)=16x^4-12x^2+1$	$sen\ 5a = sen\,a \cdot \left(16cos^4\,a - 12cos^2\,a + 1\right)$
$U_5(x)=32x^5-32x^3+6x$	$sen\ 6a = sen\,a \cdot \left(32cos^5\,a - 32cos^3\,a + 6cos\,a\right)$
$U_6(x)=64x^6-80x^4+24x^2-1$	$sen\ 6a = sen\,a \cdot \left(64cos^6\,a - 80cos^4\,a + 24cos^2\,a - 1\right)$

Ejercicio 4. Demostrar que el polinomio de Chebyshev de segunda clase de grado *n* es una función par si *n* es par y es una función impar si *n* es impar.

Una fórmula que expresa $sen\,na$ en función de $sen\,a$ es

$$sen\,na = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \cdot T_n(sen\,a), & n\ impar \\ (-1)^{n/2-1} \cdot cos\,a \cdot U_{n-1}(sen\,a), & n\ par \end{cases}$$

Demostración

Si n es impar basta despejar el seno en la formula $T_n(sen\,a) = (-1)^{(n-1)/2} \cdot sen\ na$.

Si n par es par tenemos que

$$T_n(sen\,a) = (-1)^{n/2} \cdot cos\,na\ ,$$

derivando

$$T_n'(sen\,a) \cdot cos\,a = (-1)^{n/2} \cdot (-sen\,na) \cdot n,$$

Despejando el seno del ángulo múltiple

$$sen\,na = (-1)^{n/2-1} \cdot cos\,a \cdot \frac{T_n'(sen\,a)}{n} = (-1)^{n/2-1} \cdot cos\,a \cdot U_{n-1}(sen\,a).$$

Los polinomios de Chebyshev de primera y segunda clase están relacionados por la fórmula

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$$

En efecto

$$sen(n+1)a = sen\,na \cdot cos\,a + cos\,na \cdot sen\,a$$

Por tanto

$$sena \cdot U_n(cos\,a) = sena \cdot U_{n-1}(cos\,a) \cdot cos\,a + T_n(cos\,a) \cdot sen\,a$$

dividiendo por $sen\,a$

$$U_n(cos\,a) = U_{n-1}(cos\,a) \cdot cos\,a + T_n(cos\,a)$$

sustituyendo $cos\,a$ por *x* y despejando T_n obtenemos

$$T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x).$$

Los polinomios de Chebyshev de segunda clase satisfacen la siguiente relación

$$\begin{cases} U_0(x)=1, \quad U_1(x)=2x & , \\ U_n(x) = 2x \cdot U_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) & n \geq 2 \end{cases}$$

Demostración

Es claro que

$$U_0(x) = \frac{1}{1} \cdot \frac{d}{dx} T_1(x) = 1$$
$$U_1(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} T_2(x) = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}\left(2x^2 - 1\right) = 2x,$$

Veamos que satisfacen la relación de recurrencia.
Derivando la relación

$$T_n(x) = 2x \cdot T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

obtenemos

$$T_n'(x) = 2 \cdot T_{n-1}(x) + 2x \cdot T_{n-1}'(x) - T_{n-2}'(x)$$

Sustituyendo

$$nU_{n-1}(x) = 2 \cdot \left(U_{n-1}(x) - xU_{n-2}(x)\right) + 2x \cdot (n-1)U_{n-2}(x) - (n-2)U_{n-3}(x)$$

Operando

$$(n-2)U_{n-1}(x) = 2 \cdot x \cdot (n-2) \cdot U_{n-2}(x) - (n-2) \cdot U_{n-3}(x)$$

Dividiendo por $n-2$ obtenemos $U_{n-1}(x) = 2 \cdot xU_{n-2}(x) - U_{n-3}(x)$
Por tanto

$$U_n(x) = 2 \cdot xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x).$$

Las fórmulas de recurrencia anteriores son interesantes desde el punto de vista teórico y permiten hallar los polinomios de Chebyshev para valores pequeños de *n*. Pero para valores moderados de n son completamente inútiles. Por fortuna disponemos de las siguientes fórmulas explicitas de los polinomios de Chebyshev de primera y de segunda clase para *n* mayor que cero.

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{n/2} \frac{(-1)^k}{n-k} \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}$$

y

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \binom{n-k}{k} (2x)^{n-2k}$$

Estas fórmulas se pueden demostrar por inducción. Demostraremos la fórmula para los polinomios de Chebyshev de segunda clase y dejaremos la otra fórmula al lector.

Demostración

Para $n = 1$ y $n = 2$ se cumplen. En efecto

$$U_1(x) = (-1)^0 \cdot \binom{1}{0} (2x)^{1-0} = 2x$$
$$U_2(x) = (-1)^0 \cdot \binom{2}{0} (2x)^{2-0} + (-1)^1 \cdot \binom{1}{1} (2x)^{2-2} = 4x^2 - 1$$

Demostremos que si se cumple para $k < n$ entonces se cumple para n:
Sabemos que

$$U_n(x) = 2 \cdot xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x)$$

usando la hipótesis de inducción podemos afirmar que

$$U_n(x) = 2 \cdot x \cdot \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} (2x)^{n-1-2k} - \sum_{k=0}^{(n-2)/2} (-1)^k \binom{n-2-k}{k} (2x)^{n-2-2k},$$

operando y renombrando el índice del segundo sumatorio

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k \binom{n-1-k}{k} (2x)^{n-2k} + \sum_{j=0}^{(n-2)/2} (-1)^{j+1} \binom{n-2-j}{j} (2x)^{n-2-2j},$$

haciendo el cambio de índices $k = j + 1$ en el segundo sumatorio

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{(n-1)/2}(-1)^k\binom{n-(k+1)}{k}(2x)^{n-2k}+\sum_{k=1}^{n/2}(-1)^k\binom{n-(k+1)}{k-1}(2x)^{n-2k}.$$

Tenemos dos casos. Si n es impar

$$U_n(x)=(2x)^n+\sum_{k=1}^{n/2}(-1)^k\left[\binom{n-(k+1)}{k}+\binom{n-(k+1)}{k-1}\right](2x)^{n-2k},$$

luego la propiedad de los números combinatorios

$$U_n(x)=(2x)^n+\sum_{k=1}^{n/2}(-1)^k\cdot\binom{n-k}{k}\cdot(2x)^{n-2k}=\sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k\cdot\binom{n-k}{k}\cdot(2x)^{n-2k}.$$

Si n es par

$$U_n(x)=(2x)^n+\sum_{k=1}^{n/2-1}(-1)^k\left[\binom{n-(k+1)}{k}+\binom{n-(k+1)}{k-1}\right](2x)^{n-2k}+(2x)^{n/2},$$

luego también en este caso

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k\cdot\binom{n-k}{k}\cdot(2x)^{n-2k}.$$

Ejercicio 5-Demostrar las fórmulas

$$T_n(x)=\sum_{k=0}^{n/2}\binom{n}{2k}\cdot x^{n-2k}\cdot\left(x^2-1\right)^k$$

y

$$U_n(x)=\sum_{k=0}^{n/2}\binom{n+1}{2k+1}\cdot x^{n-2k}\cdot\left(x^2-1\right)^k.$$

Fórmulas para la función tangente

Es sobradamente conocida la fórmula de la tangente del ángulo doble

$$tan\,2a=\frac{2\,tan\,a}{1-tan^2\,a}$$

pero está poco difundida la fórmula de la tangente del ángulo múltiple a pesar de su simplicidad **[4].** En efecto

$$tan\,na=\frac{\sum_{k=0}^{(n-1)/2}(-1)^k\cdot\binom{n}{2k+1}\cdot tan^{2k+1}\,a}{\sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k\cdot\binom{n}{2k}\cdot tan^{2k}\,a}$$

la fórmula se demuestra fácilmente por inducción usando la fórmula de la tangente de una suma de ángulos.

Ilustremos la sencillez de la fórmula con un ejemplo, la expresión de la $tan\,5x$.

En primer lugar calculamos los términos de la quinta fila del triángulo de Tartaglia. Estos términos son

1, 5, 10, 10, 5, 1

después construimos los polinomios

$$1-10t^2+5t^4 \text{ y } 5t-10t^3+t^5$$

tomando los términos de dos en dos y alternando los signos. Entonces

$$tan\,5x = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10t^2 + 5t^4} \text{ con } t = tan\,x\,.$$

Las funciones racionales

$$R_n(t) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k \cdot \binom{n}{2k+1} \cdot t^{2k+1}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \cdot \binom{n}{2k} \cdot t^{2k}}$$

no reciben un nombre especial. Gozan al igual que los polinomios de Chebyshev de primera clase de la propiedad transitiva

$$R_n(R_m(t)) = R_{n \cdot m}(t)\,.$$

Para la función tangente hiperbólica se cumple la fórmula

$$Th\,na = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2k+1} \cdot Th^{2k+1} a}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} \cdot Th^{2k} a}\,.$$

Por ejemplo

$$Th\,6a = \frac{6 \cdot Th\,a + 20 \cdot Th^3 a + 6 \cdot Th^5 a}{1 + 15 \cdot Th^2 a + 15 \cdot Th^4 a + Th^6 a}\,.$$

Las funciones racionales

$$S_n(t) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{(n-1)/2} \binom{n}{2k+1} \cdot t^{2k+1}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n/2} \binom{n}{2k} \cdot t^{2k}}$$

al igual que las funciones $R_n(t)$ tampoco reciben un nombre especial, gozando al igual que ellas de la propiedad transitiva

$$S_n(S_m(t)) = S_{n \cdot m}(t)\,.$$

Cálculo algebraico de las razones trigonométricas

Las funciones de ángulo múltiple permiten calcular las razones trigonométricas de muchos ángulos de forma puramente algebraica. Veamos algunos ejemplos

1) Razones trigonométrica de $\pi / 5$

Podemos calcular el coseno de $\pi / 5$ radianes usando el polinomio de Chebishev de quinto grado. Para ello resolvamos la ecuación $T_5\left(\frac{x}{2}\right)+1=0$ de dos maneras. La primera de forma algebraica y la segunda utilizando las propiedades de las funciones trigonométricas.

$$T_5\left(\frac{x}{2}\right)+1=0 \Leftrightarrow x^5-5x^3+5x+2=0$$

Factorizando el polinomio

$$x^5-5x^3+5x+2=(x+2)\left(x^4-2x^3-x^2+2x+1\right)$$

luego

$$x+2=0 \quad ó \quad x^4-2x^3-x^2+2x+1=0$$

la segunda ecuación es una ecuación recíproca. Haciendo el cambio $w=x-\frac{1}{x}$ queda

$$w^2-2w-1=0 \Rightarrow w=1$$

Por tanto

$$x-\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

observemos que por ser $w=1$ una raíz doble también son raíces dobles $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Las raíces de la ecuación dada ordenadas de menor a mayor son

$$x_1=-2,\, x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\, x_3=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Resolvamos ahora la ecuación utilizando las propiedades trigonométricas

$$T_5\left(\frac{x}{2}\right)+1=0$$

Haciendo $\frac{x}{2}=cos\,\alpha$ tenemos $cos\,5\alpha=-1 \Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{5}+k\frac{2\pi}{5} \quad k=0,1,..,4$

Las soluciones de la ecuación son

$$2\cdot cos\frac{\pi}{5},\, 2\cdot cos\frac{3\pi}{5},\, 2\cdot cos\frac{5\pi}{5},\, 2\cdot cos\frac{7\pi}{5},\, 2\cdot cos\frac{9\pi}{5}$$

Teniendo en cuenta que

$$cos\frac{\pi}{5}=cos\frac{9\pi}{5} \quad y \quad cos\frac{3\pi}{5}=cos\frac{7\pi}{5}$$

las raíces ordenadas de la ecuación son

$$x_1=-2,\, x_2=2\cdot cos\frac{3\pi}{5},\, x_3=2\cdot cos\frac{\pi}{5}$$

Por tanto

$$cos\frac{\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\frac{\Phi}{2} \quad y \quad cos\frac{3\pi}{5}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}=\frac{-1}{2\cdot\Phi}$$

donde Φ es la razón áurea.

Análogamente resolviendo la ecuación $T_5\left(\frac{x}{2}\right)-1=0$ obtenemos los valores

$$cos\frac{2\pi}{5}=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}=\frac{1}{2\cdot\Phi} \quad y \quad cos\frac{4\pi}{5}=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}=\frac{-\Phi}{2}.$$

Los valores del seno de $\pi/5$ radianes se pueden obtener análogamente resolviendo la ecuación :

$$T_5(x)=0 \Leftrightarrow 16x^5-20x^3+5x=0,$$

y observando que $sen\,5a=T_5(sen\,a)$.

Efectuando los cálculos obtenemos

$$x_1=sen\frac{\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}} \quad y \quad x_2=sen\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

las otras raíces son $x_3=-sen\frac{\pi}{5}, \quad x_4=-sen\frac{2\pi}{5}, \; y \; x_5=0$.

Observemos que la ecuación $T_5(x)=0$ y la fórmula $cos\,5a=T_5(cos\,a)$ nos proporcionan los valores

$$cos\frac{\pi}{10}=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}} \quad y \quad cos\frac{3\pi}{10}=\frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Podemos usar la fórmula

$$tan\,5x=\frac{5\,tan\,x-10\,tan^3\,x+tan^5\,x}{1-10\,tan^2\,x+5\,tan\,x^4}$$

para calcular la tangente de $\pi/5$ radianes.

En efecto $tan\,5x=0 \Rightarrow x=\frac{k\pi}{5}, \quad k\in Z$; luego las raíces de la ecuación

$$5t-10t^3+t^5=0$$

ordenadas de menor a mayor son

$$tan\frac{-2\pi}{5}, tan\frac{-\pi}{5}, tan\,0, tan\frac{\pi}{5}, tan\frac{2\pi}{5}.$$

Calculando las raíces por métodos algebraicos tenemos

$$5t-10t^3+t^5=0 \Rightarrow t=0 \quad ó \quad t^4-10t^2+5=0,$$

resolviendo la ecuación bicuadrada se obtienen las raíces

$$-\sqrt{5+2\sqrt{5}}, -\sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5-2\sqrt{5}}, \sqrt{5+2\sqrt{5}},$$

Por tanto

$$tan\frac{\pi}{5}=\sqrt{5-2\sqrt{5}} \text{ y } tan\frac{2\pi}{5}=\sqrt{5+2\sqrt{5}}.$$

2) Calculo del coseno de $\frac{2\pi}{7}$ radianes

La ecuación $\frac{T_7(x)}{x}=0 \Leftrightarrow 64x^6-112x^4+56x^2-7=0$ tiene por raíces

$$x_k=sen\frac{\pi}{7}k \quad k=1,2,...,6.$$

Si en esta ecuación hacemos el cambio $y=2x^2-1$ obtenemos la ecuación $-8y^3-4y^2+4y+1=0$ cuyas raíces son

$$y_1=cos\frac{2\pi}{7}, y_2=cos\frac{4\pi}{7}, y_3=cos\frac{6\pi}{7},$$

cambiando el signo y haciendo el cambio de variable $z=\frac{y}{2}$ obtenemos la ecuación $z^3+z^2-2z-1=0$, cuyas raíces son

$$z_1=2\cos\frac{2\pi}{7},\ z_2=2\cos\frac{4\pi}{7},\ z_3=2\cos\frac{6\pi}{7}.$$

Resolvamos esta ecuación usando las formulas de Cardano
Obtenemos

$$\cos\frac{2\pi}{7}=\frac{1}{12}\left[-2+\sqrt[3]{28+84\sqrt{3}\cdot i}+\sqrt[3]{28-84\sqrt{3}\cdot i}\right]\cong 0.6234898$$

$$\cos\frac{4\pi}{7}=\frac{-1}{24}\left[4+\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)\sqrt[3]{28+84\sqrt{3}\cdot i}+\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)\sqrt[3]{28-84\sqrt{3}\cdot i}\right]\cong -0.22252$$

$$\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{-1}{24}\left[-2+\left(1-\sqrt{3}\cdot i\right)\sqrt[3]{28+84\sqrt{3}\cdot i}+\left(1+\sqrt{3}\cdot i\right)\sqrt[3]{28-84\sqrt{3}\cdot i}\right]\cong -0.9001$$

Donde la raíz cúbica compleja se calcula en la rama principal

Ejercicio 6 Si p es primo impar las raíces del polinomio

$$W_p(x)=p\cdot\sum_{k=0}^{(p-1)/2}\frac{(-1)^k}{p-k}\binom{p-k}{k}x^{p-1-2k}$$

son

$$x=\pm 2\cdot sen\frac{\pi}{p}k \quad k=1,2,\ldots,\frac{p-1}{2}$$

La Ecuación de Adriaen Van Roomen

En su obra *Ideae mathematicae* el matemático flamenco Adriaen Van Roomen, también conocido por su nombre latino Adrianus Romanus, propuso a los matemáticos del mundo el reto de resolver la ecuación de grado 45 siguiente:

$$\begin{aligned}&x^{45}-45\cdot x^{43}+945\cdot x^{41}-12300\cdot x^{39}+111150\cdot x^{37}-740259\cdot x^{35}+\\&+3764565\cdot x^{33}-14945040\cdot x^{31}+46955700\cdot x^{29}-117679100\cdot x^{27}+\\&+236030652\cdot x^{25}-378658800\cdot x^{23}+483841800\cdot x^{21}-488494125\cdot x^{19}+\\&+384942375\cdot x^{17}-232676280\cdot x^{15}+105306075\cdot x^{13}-34512075\cdot x^{11}+\\&+7811375\cdot x^{9}-1138500\cdot x^{7}+95634\cdot x^{5}-3795\cdot x^{3}+45\cdot x=c\end{aligned}$$

El problema fue resuelto por Vieta **[2]** dos años más tarde en su trabajo *Responsum* quien, con otro lenguaje y notación al usado por nosotros, se dió cuenta que la ecuación de Van Rooemen es en realidad la ecuación

$$2\cdot T_{45}\left(\frac{x}{2}\right)=c.$$

Resolvamos la ecuación de Van Roomen. Haciendo $x=2sen\,\phi$ tenemos

$$sen\ 45\phi=\frac{c}{2}$$

y por tanto $x=2\cdot sin\left(\theta^\circ+k\cdot 8^\circ\right)\quad k=0,1,\ldots,44$; siendo $\theta=arc\ sin\left(\frac{c}{2}\right)$.

¿Cómo llegó Vieta a darse cuenta de este hecho? Vieta conocía perfectamente la solución de la ecuación

$$z^3 - 3z = c \Leftrightarrow 2 \cdot T_3\left(\frac{z}{2}\right) = c$$

Haciendo el cambio de variable

$$z = 2 \cdot T_3\left(\frac{y}{2}\right) \Leftrightarrow z = y^3 - 3y\,,$$

podía también resolver la ecuación

$$y^9 - 9y^7 + 27y^5 - 30y^3 + 9y = c\,,$$

que escrita en término de los polinomios de Chebyshev es

$$2 \cdot T_3\left(T_3\left(\frac{y}{2}\right)\right) = c \Leftrightarrow 2 \cdot T_9\left(\frac{y}{2}\right) = c\,.$$

Si en la ecuación anterior hacemos el cambio de variable

$$y = 2 \cdot T_5\left(\frac{x}{2}\right) \Leftrightarrow y = x^5 - 5x^3 + 5x$$

obtenemos la ecuación

$$2 \cdot T_3\left(T_3\left(T_5\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right) = c \Leftrightarrow 2 \cdot T_{45}\left(\frac{x}{2}\right) = c$$

que es la ecuación de Van Roomen.

Curvas en Polares

La ecuación polar de muchas curvas se expresa por medio de funciones trigonométricas. Los polinomios de Chebyshev de primeray de segunda clase son útiles para calcular la ecuación cartesiana de la curva.

Ilustraremos la técnica del paso de la ecuación polar a la cartesiana con dos ejemplos muy sencillos: la lemniscata de Bernoulli y la cúbica de Tschirnhausen. Posteriormente aplicaremos esta técnica a las Rosas, Curvas Botánicas, Arañas y Curvas Nodales. Las definiciones de estas curvas pueden encontrarse en **[6]** y **[5].**

La Lemniscata de Bernoulli

La lemniscata de Bernoulli tiene la ecuación polar

$$r^2 = a^2 \cdot \cos 2\theta$$

Para obtener la ecuación implícita observemos que

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad y \quad \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Luego

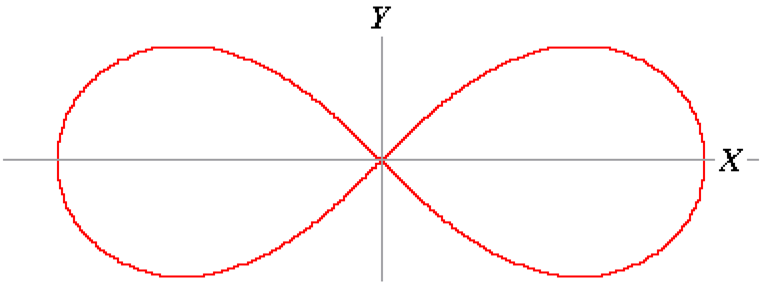
$$x^2 + y^2 = a^2 T_2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Es decir

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdot \left[2 \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 - 1\right]^2$$

Operando

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right).$$



Lemniscata de Bernoulli

La Cúbica de Tschirnhausen

Su ecuación polar es

$$r = a \cdot \sec^3 \frac{\theta}{3}$$

Por tanto

$$\cos\frac{\theta}{3} = \sqrt[3]{\frac{a}{3}}$$

Luego

$$T_3\left(\cos\frac{\theta}{3}\right) = T_3\left(\sqrt[3]{\frac{a}{3}}\right)$$

es decir

$$\cos\frac{\theta}{3} = 4\frac{a}{r} - 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{r}}$$

Sustituyendo

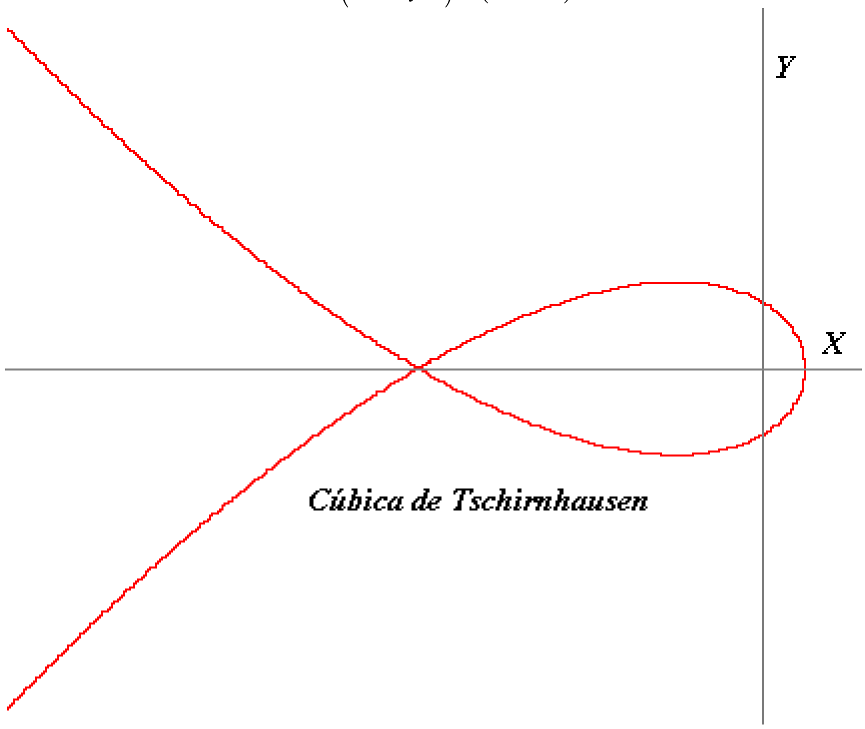
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{4a}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{3\cdot\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{x^2+y^2}}$$

Operando

$$x = 4a - 3\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{x^2+y^2}$$

Despejando las raíces y elevando al cubo

$$27a\cdot\left(x^2+y^2\right) = (4a-x)^3 .$$



Rosas

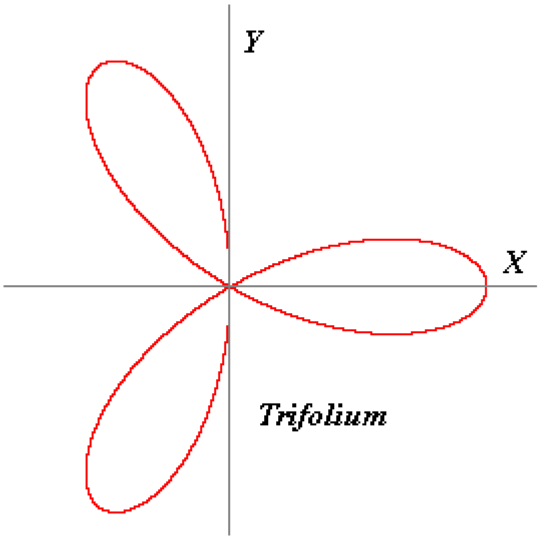
Las rosas o rhodoneas son curvas cuya ecuación polar es

$$r = a \cdot cos\, m\theta\,,$$

las ecuaciones paramétricas son por tanto

$$\begin{cases} x = a \cdot cos\, m\theta \cdot cos\,\theta \\ y = a \cdot sen\, m\theta \cdot sen\,\theta \end{cases}$$

El nombre de esta familia de curvas se debe a su forma parecida a la de una flor. El matemático italiano Grandi las llamó Rhodoneas, Rhodon significa rosa en griego, en su libro Flora Geometrica. Si m = 0 ó m = 1 la curva es una circunferencia, para m = 2 la curva se llama quadrifolium, para m = 3 se llama trifolium, para m entero impar rosa de m pétalos y para m par rosa de 2n pétalos. El nombre hace referencia al número de pétalos que tiene la curva. La curva está definida también para valores fraccionarios. Para m = ½ se llama Folium de Durero.



Aplicando el mismo procedimiento a la ecuación polar que el realizado a la ecuación de la lemniscata se observa que la ecuación cartesiana de la rosa para m entero impar es

$$x^2 + y^2 = a \cdot T_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

por ejemplo si m =3 , la curva se llama trifolium, tenemos

$$x^2 + y^2 = a \cdot T_3\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2}$$

Teniendo en cuenta que $T_3(z) = z \cdot (4z^2 - 3)$ la ecuación es

$$x^2 + y^2 = \frac{ax}{\sqrt{x^2 + y^2}}\left(4\frac{x^2}{x^2 + y^2} - 3\right) \cdot \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

Operando

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = ax \cdot \left(x^2 - 3y^2\right).$$

Si m es par la ecuación cartesiana anterior sólo corresponde a la mitad de la curva pues r puede tomar valores negativos. La curva completa corresponde a la ecuación

$$x^2+y^2=a^2\cdot T_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2$$

Por ejemplo el Quadrifolium $r=a\cdot cos\,2\theta$

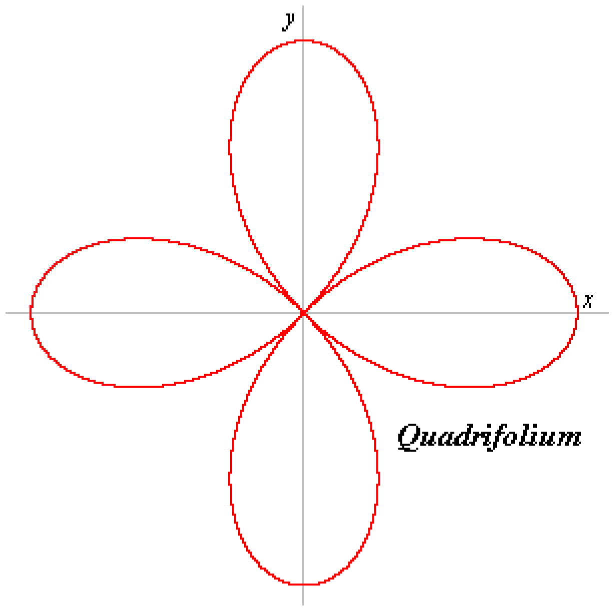
$$x^2+y^2=a^2\cdot T_2\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2$$

por tanto

$$x^2+y^2=a^2\cdot\left(2\frac{x^2}{x^2+y^2}-1\right)^2$$

operando

$$\left(x^2+y^2\right)^3=a^2\cdot\left(x^2-y^2\right)^2.$$



Para valores fraccionarios de $m=\frac{p}{q}$ el proceso necesita una modificación. Podemos realizar el proceso de la siguiente forma

$$r=a\cdot cos\frac{p}{q}\theta\Rightarrow\frac{r}{a}=cos\,p\frac{\theta}{q}$$

por tanto

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}=T_p\left(cos\frac{\theta}{q}\right)\Rightarrow T_q\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)=T_q\left(T_p\left(cos\frac{\theta}{q}\right)\right)$$

Como $T_p\left(T_q(x)\right)=T_q\left(T_p(x)\right)=T_{p\cdot q}(x)$ tenemos que

$$T_q\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)=T_p\left(T_q\left(cos\frac{\theta}{q}\right)\right)=T_p(cos(\theta))$$

Luego

$$T_p\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=T_q\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)$$

Veamos algunos ejemplos

1) Para m =1/2 tenemos el Folium de Durero $r=a\cdot cos\frac{\theta}{2}$

$$T_1\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=T_2\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)$$

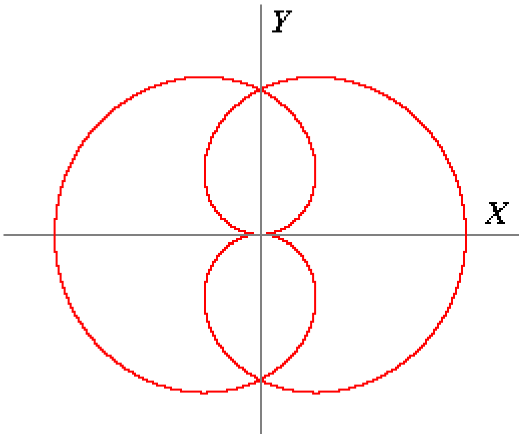
Es decir

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}=2\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)^2-1$$

Simplificando y elevando al cuadrado para racionalizar

$$\left(2x^2+2y^2-a^2\right)^2\cdot\left(x^2+y^2\right)=a^4x^2$$

la curva es simétrica respecto de los ejes de coordenadas. Esta situación se cumple para los valores de $m=\frac{1}{2n}$.



Folium de Durero

2) Para $m=\frac{1}{3}$ tenemos

$$r=a\cdot cos\frac{\theta}{3}$$

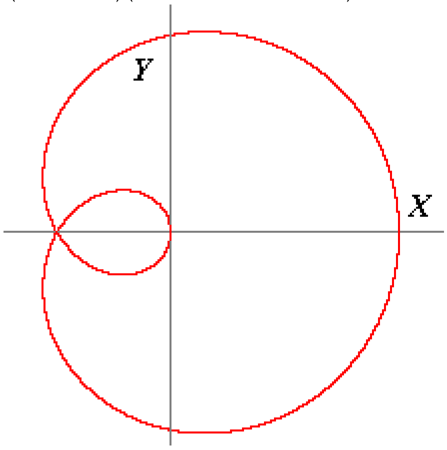
$$T_1\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=T_3\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)$$

es decir

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\left(4\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)^2 - 3\right)$$

Operando

$$\left(x^2+y^2\right)\left(4x^2+4y^2-3a^2\right) = a^3 x .$$



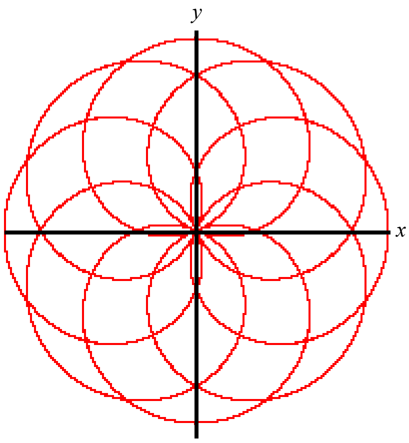
Rosa 1/3

La curva en este caso es simétrica respecto del eje OX. Observemos que no hemos tenido que elevar al cuadrado en el proceso de eliminación. Análogamente a este caso ocurre para $m = \dfrac{1}{2n+1}$.

3) Para $m = \dfrac{4}{5}$ la ecuación polar es $r = a \cdot cos\dfrac{4\theta}{5}$ y siguiendo el mismo proceso se obtiene la ecuación cartesiana

$$a^{10}\left(x^4 - 6x^2y^2 + y^4\right)^2 = \left(x^2+y^2\right)^5\left(16x^4 + 32x^2y^2 - 20a^2x^2 + 16y^4 - 20a^2y^2 + 5a^4\right)^2$$

una curva de grado 18.



Rosa 4/5

Curvas Botánicas

Las curvas botánicas tienen la ecuación polar

$$r = 1 + d \cdot cos\, m\theta \quad d > 0$$

son las concoides de la rosa $r = d \cdot cos\, m\theta \quad d > 0$ respecto de su centro 0 y con distancia 1. Estas curvas engloban algunos tipos de curvas clásicas que veremos en los ejemplos. Obviamente para d = 0 la curva es la circunferencia de radio unidad. Si d >1 a la familia de curvas se la conoce con el poético nombre de Rosas de Troya.

Para *m* entero la ecuación cartesiana de la curva botánica se obtiene racionalizando la ecuación

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + d \cdot T_m\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Veamos algunos ejemplos

1) Para *m* = 1 la curva es El Caracol de Pascal. Racionalizando la ecuación

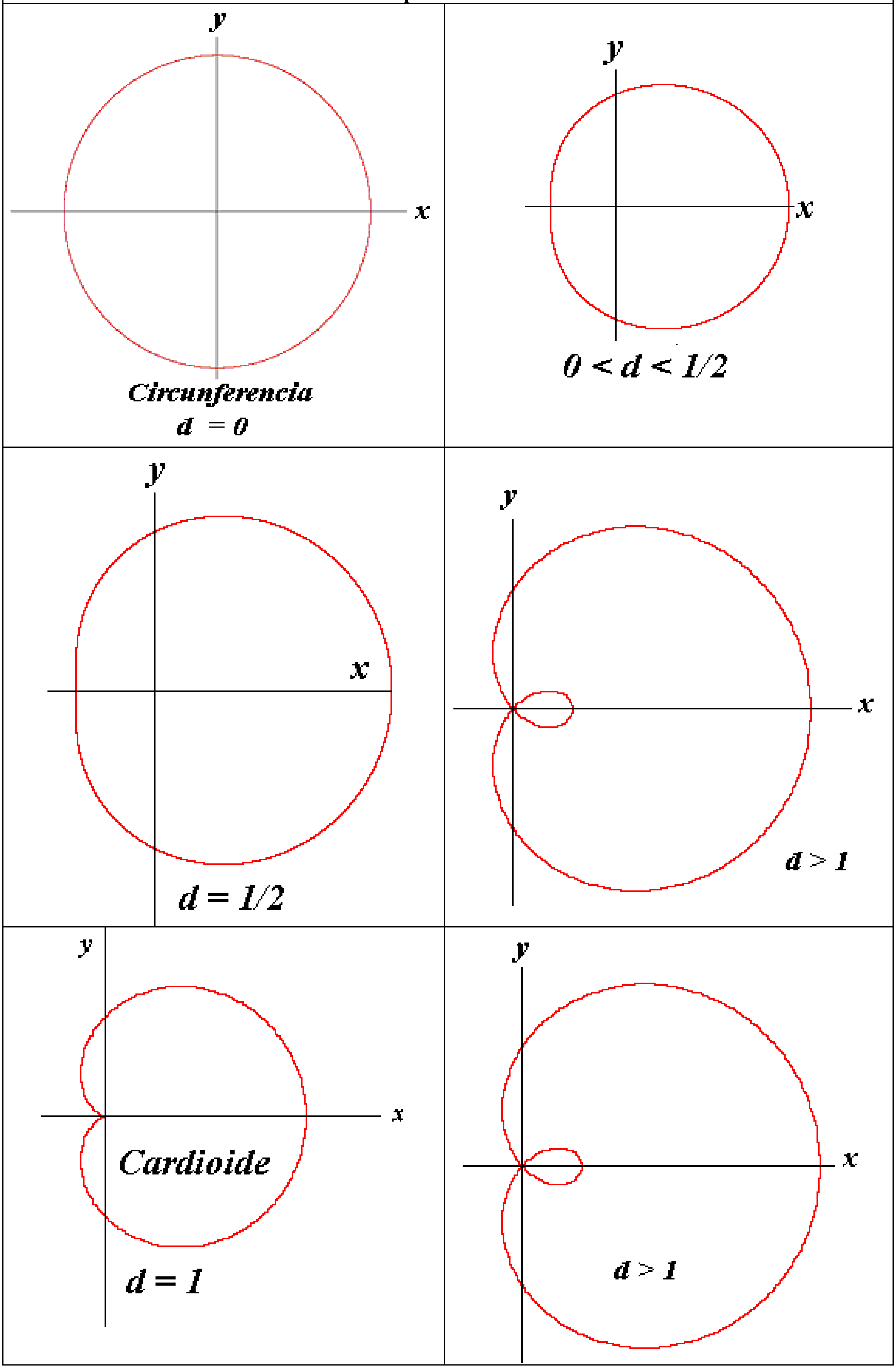
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1 + d \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

obtenemos

$$\left(x^2 + y^2 - dx\right)^2 = x^2 + y^2.$$

La tabla muestra los diferentes tipos de caracol de Pascal. Recordemos que para *d* = 1 la curva se llama cardioide.

Los diferentes tipos del Caracol de Pascal



2) Para $m = 2$ obtenemos

$$\sqrt{x^2+y^2} = 1 + d\cdot\left(2\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 - 1\right)$$

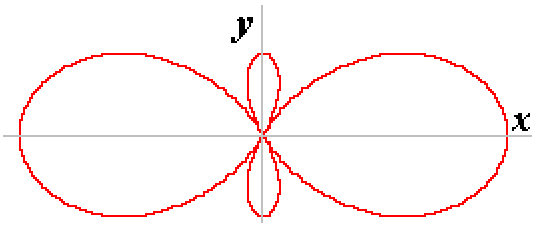
Operando

$$\left(x^2+y^2\right)^{3/2} = (d+1)\cdot x^2 - (d-1)y^2$$

y elevando al cuadrado

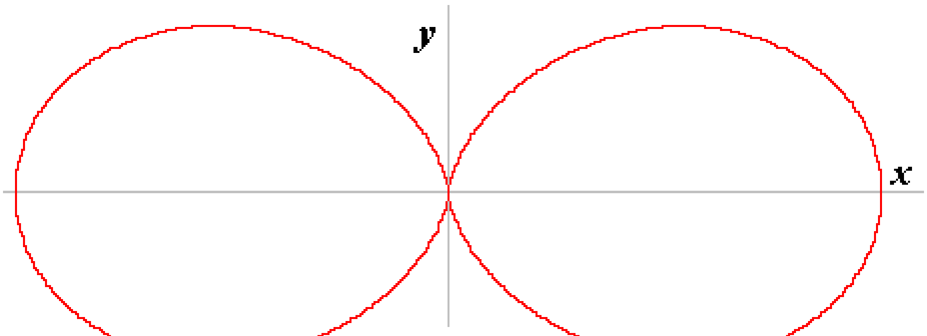
$$\left(x^2+y^2\right)^3 = \left[(d+1)\cdot x^2 - (d-1)y^2\right]^2$$

Dependiendo de los valores de d se tienen tres tipos de curva
Si d >1 la curva se llama cicloide de Ceva



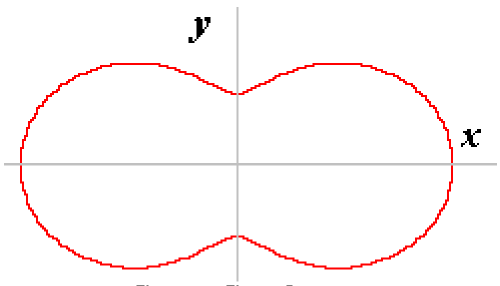
Cicloide de Ceva

si $d = 1$óvalo doble,



Ovalo Doble

y si d<1 curva cacahuete.

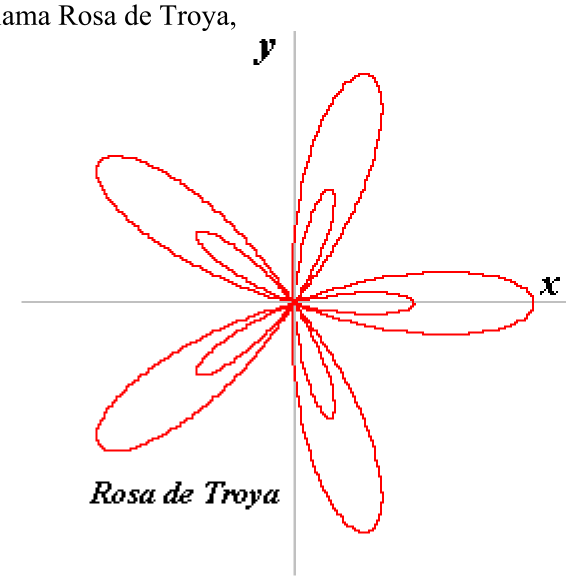


Curva Cacahuete

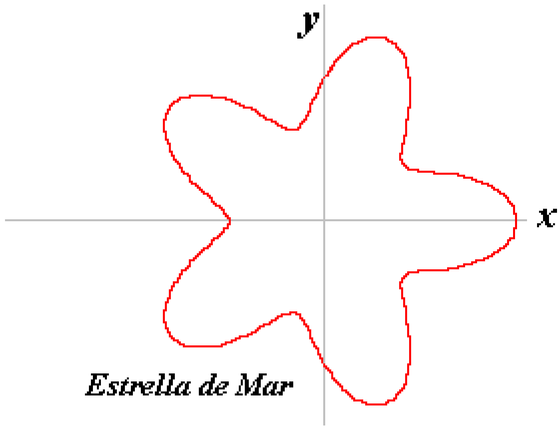
3) para m =5 se obtiene la ecuación de grado 12

$$\left(x^2+y^2\right)^5=\left[\left(x^2+y^2\right)^3-dx\left(x^4-10x^2y^2+5y^4\right)\right]^2$$

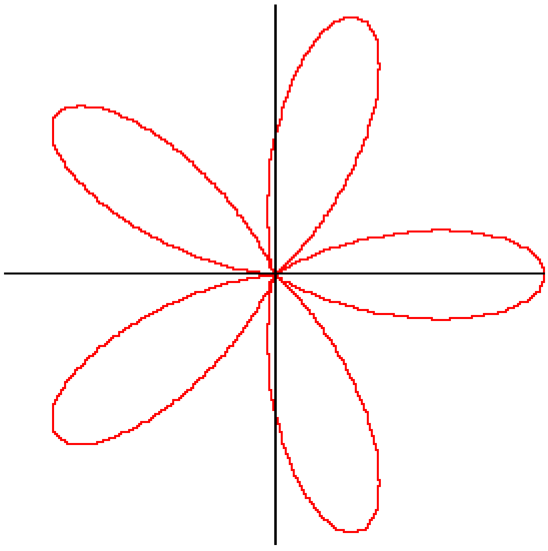
para $d > 1$ la curva se llama Rosa de Troya,



para $d < 1$ se llama Estrella de mar



y para d =1 no tiene nombre especial. La forma de esta curva botánica nos recuerda la Rosa de 5 pétalos que la genera.



Curvas Botánicas con valores fraccionarios del parámetro m.

Si $m = p/q$ el proceso de reducción se basa en racionalizar la siguiente fórmula

$$T_p\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = T_q\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{d}\right).$$

La deducción de la fórmula es un proceso análogo al seguido con las rosas y se deja su verificación al lector. Veamos algunos ejemplos de curvas notables

1) Para $m = 1/2$ la curva se llama la Nefroide de Freeth, su ecuación polar es

$$r = 1 + d \cdot cos\frac{\theta}{2}$$

y la ecuación cartesiana se obtiene racionalizando la ecuación

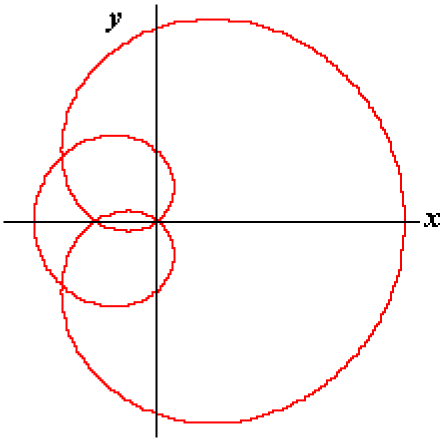
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 2\cdot\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-1}{d}\right)^2 - 1$$

Operando

$$\left(2x^2+2y^2+2-d^2\right)\sqrt{x^2+y^2} = d^2\cdot x + 4\left(x^2+y^2\right)$$

Elevando al cuadrado

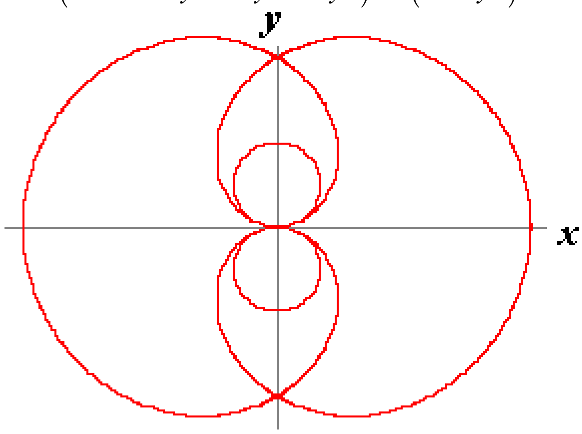
$$\left(2x^2+2y^2+2-d^2\right)^2\left(x^2+y^2\right) = \left[4x^2+4y^2+d^2\cdot x\right]^2.$$



Nefroide de Freeth

2) Para $m = 2/3$ la curva se llama el nudo de ocho y para el valor $d = 2$ la ecuación cartesiana queda una ecuación de décimo grado relativamente sencilla

$$\left(3x^4+6x^2y^2+3y^4-4y^2\right)^2 = \left(x^2+y^2\right)^5$$



Nudo de ocho

Ejercicio 7 Encontrar una formula para hallar la ecuación cartesiana de las curvas poligasteroides, tambien llamadas curvas de *m* vientres, de ecuación polar

$$r = \frac{1}{1 + k \cdot \cos m\theta}, \quad m \in Q$$

Estas curvas estudiadas por Gino Loria son una generalización de la ecuación polar de las cónicas.

Arañas

Hay dos familias de curvas arañas. Las arañas envueltas de ecuación polar

$$r = a\frac{sen\ n\theta}{sen(n-1)\theta}$$

y las arañas desenvueltas de ecuación polar

$$r = a\frac{sen\ n\theta}{sen(n+1)\theta}.$$

Las ecuaciones cartesianas de ambos tipos se expresan muy bien usando los polinomios de Chebyshev de segunda clase.

Las arañas desenvueltas cumplen la ecuación

$$r \cdot sen(n-1)\theta = a \cdot sen\ n\theta$$

por tanto

$$r \cdot sen\theta \cdot U_{n-2}(\cos\theta) = a \cdot sen\theta \cdot U_{n-1}(\cos\theta)$$

simplificando

$$r \cdot U_{n-2}(\cos\theta) = a \cdot U_{n-1}(\cos\theta)$$

Por tanto

$$\sqrt{x^2+y^2} \cdot U_{n-2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = a \cdot U_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

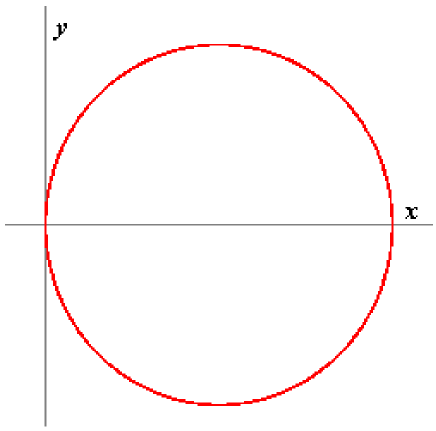
Multiplicando la ecuación por $\sqrt{x^2+y^2}^{\,n-1}$ tenemos

$$\left(x^2+y^2\right)^{n/2} \cdot U_{n-2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = a \cdot \left(x^2+y^2\right)^{(n-1)/2} U_{n-1}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

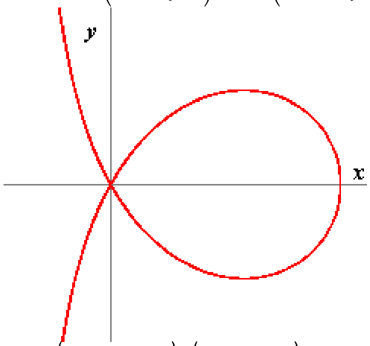
que es una ecuación de grado n.

Veamos algunos ejemplos

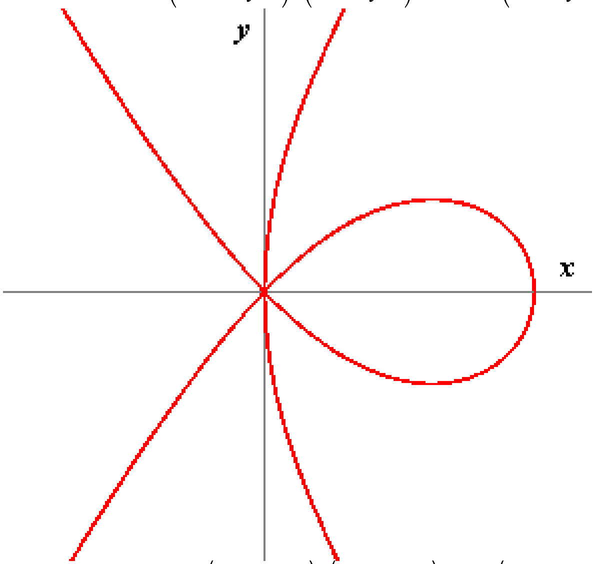
1) Para $n = 2$ obtenemos la ecuación $x^2 + y^2 = 2ax$. Circunferencia de centro $(a, 0)$ y radio a.



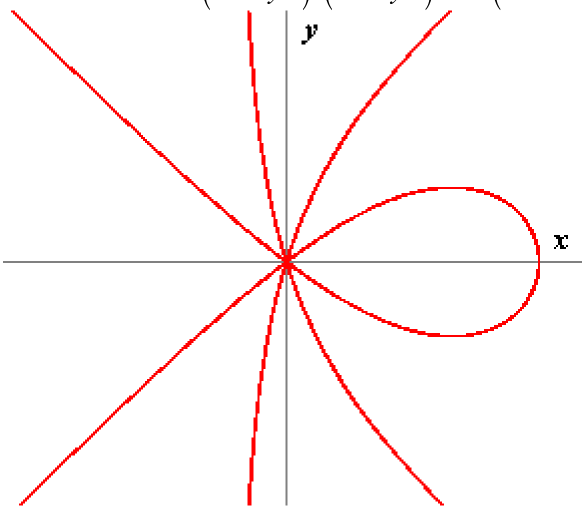
2) Para $n = 3$ obtenemos la ecuación $2x\cdot\left(x^2+y^2\right)=a\cdot\left(3x^2-y^2\right)$. La trisectriz de Maclaurin.



3) para $n = 4$ obtenemos la ecuación $\left(3x^2-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)=4xa\cdot\left(x^2-y^2\right)$.



4) Para $n = 5$ Obtenemos la ecuación $4x\left(x^2-y^2\right)\cdot\left(x^2+y^2\right)=a\cdot\left(5x^4-10x^2y^2+x^4\right)$.



Observemos que para n mayor que cuatro la araña envuelta tiene n-2 asíntotas de ecuaciones $y=x\cdot\tan k\dfrac{\pi}{n-1},\quad k=1,..,n-2$. Si n = 3 la trisectriz tiene una asíntota vertical de ecuación $x=1$.

Para las arañas desenvueltas se obtienen resultados análogos que se dejan como ejercicio al lector.

Nudos

Se llaman curvas nodales o nudos las de ecuación polar $r = a \cdot \cot k\theta$. Las ecuaciones cartesianas de estas curvas se obtienen usando las funciones de ángulo múltiple de la tangente.

En efecto

$$r = a \cdot \cot k\theta \Leftrightarrow R_n(\tan\theta) \cdot r = a \Leftrightarrow R_n\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = a$$

Elevando al cuadrado

$$\left(x^2 + y^2\right) \cdot R_n\left(\frac{y}{x}\right)^2 = a^2 .$$

Usando la expresión del ángulo múltiple podemos dar una fórmula polinómica equivalente a la expresión anterior. Esta es

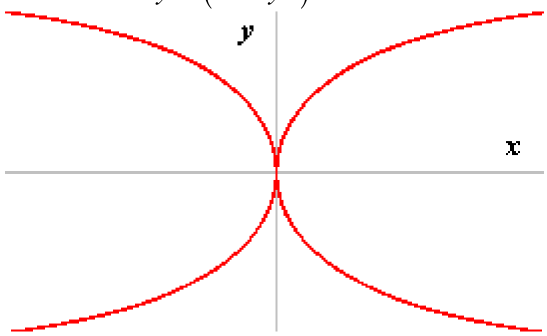
$$\left(x^2 + y^2\right) \cdot \left[\sum_{k=0}^{(n-1)/2} (-1)^k \binom{n}{2k+1} x^{n-(2k+1)} \cdot y^{2k+1}\right]^2 = a^2 \cdot \left[\sum_{k=0}^{n/2} (-1)^k \binom{n}{2k} x^{n-2k} \cdot y^{2k}\right]^2 .$$

Luego los nudos son curvas de orden $2n + 2$.

Veamos algunos ejemplos

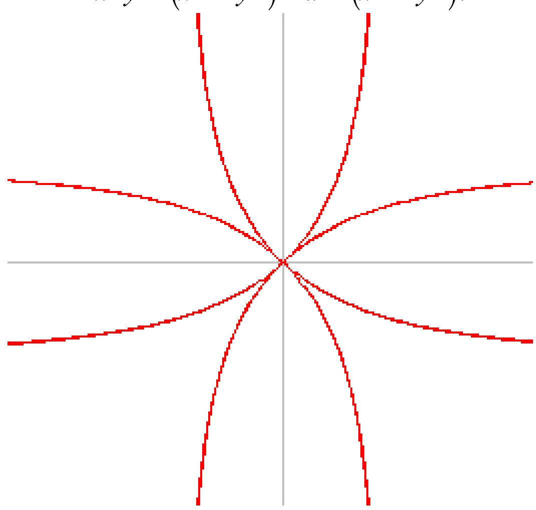
Si $n = 1$ la curva es una cuártica llamada kappa o curva de Gutschoven de ecuación

$$y^2 \cdot \left(x^2 + y^2\right) = a^2 x^2$$



Si $n = 2$ la curva es una séxtica llamada molino de viento de ecuación

$$4x^2 y^2 \cdot \left(x^2 + y^2\right) = a^2 \cdot \left(x^2 - y^2\right).$$



Si $n = 4$ la curva es de orden ocho y tiene por ecuación

$$y^2 \cdot \left(x^2 + y^2\right) \cdot \left(3x^2 - y^2\right)^2 = a^2 x^2 \cdot \left(x^2 - 3y^2\right)^2 .$$

Ejercicio 8-Hallar las ecuaciones de los nodos si el parámetro k es racional.

Curvas de Lissajous

Las curvas de Lissajous se pueden definir por las ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = cos(m \cdot t + p) \\ y = sen(n \cdot t + q) \end{cases}.$$

Fueron descubiertas por el matemático norteamericano Nataniel Bodwitch en 1815 cuando estudiaba el movimiento del péndulo compuesto. Posteriormente el físico francés Jules Antoine las estudió en sus investigaciones sobre óptica.

El proceso de eliminación del parámetro t es, salvo en los casos triviales, más complicado que en los casos anteriores y excesivamente laborioso y complejo si se utilizan las técnicas de eliminación algebraica. Los dos teoremas explicados mas abajo resuelven fácilmente la cuestión.

Teorema 1. Dada la curva de Lissajous

$$\begin{cases} x = cos(m \cdot t + p) \\ y = sen(n \cdot t + q) \end{cases}$$

$0 \le t \le 2\pi$, donde p, q son números reales y m impar.

Llamemos $\delta = \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}$. Las coordenadas x, e y de la curva de Lissajous satisfacen la ecuación

a) $T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2 \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_n(x) T_m(y) \cdot sen\delta - cos^2 \delta = 0$, cuando $cos\,\delta \ne 0$.

b) $\sin\delta \quad T_n(x) - (-1)^{(m-1)/2} T_m(y) = 0$, cuando $cos\,\delta = 0$.

Demostración.

Aplicando la propiedad característica de los polinomios de Chebyshev y la correspondiente para m impar para la función seno tenemos que

$$\begin{cases} T_n(x) = T_n(cos(mt+p)) = cos[n \cdot (mt+p)] = cos(mn \cdot t + n \cdot p) \\ T_m(y) = T_m(sen(nt+q)) = sen[m \cdot (nt+q)] = sen(mn \cdot t + m \cdot q) \end{cases}$$

Aplicando las fórmulas de la suma de dos ángulos

$$\begin{cases} cos\,mnt \cdot cos\,np - sen\,mnt \cdot sen\,np \ = T_n(x) \\ cos\,mnt \cdot sen\,mq + sen\,mnt \cdot cos\,mq = (-1)^{(m-1)/2} T_m(x) \end{cases}$$

Este es un sistema lineal en las incógnitas $cos\,mnt$ y $sen\,mnt$ con determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} cos\,np & -sen\,np \\ sen\,mq & cos\,mq \end{vmatrix} = cos\,mq \cdot cos\,np + sen\,mq \cdot sen\,np = cos(mq - np) = cos\,\delta$$

Si $\Delta = cos\,\delta \ne 0$, aplicando la regla de Cramer

$$\begin{cases} cos\,\delta \cdot cos\,mnt = cos\,mq \cdot T_n(x) - (-1)^{(m-1)/2} \cdot sen\,np \cdot T_m(y) \\ cos\,\delta \cdot sen\,mnt = -sen\,mq \cdot T_n(x) + (-1)^{(m-1)/2} \cdot cos\,np \cdot T_m(y) \end{cases}$$

elevando al cuadrado y sumando miembro a miembro

$$cos^2\delta = T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2 \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_n(x) T_m(y) \cdot (sen\,mq \cdot cos\,np - cos\,mq \cdot sen\,np)$$

luego

$$T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2 \cdot (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_n(x) T_m(y) \cdot sen\delta - cos^2\delta = 0$$

quedando así demostrada la primera fórmula.

Si $\Delta = cos\,\delta = 0$ el sistema anterior es compatible sólo cuando los coeficientes son proporcionales, es decir cuando

$$\frac{\cos np}{\operatorname{sen} mq}=\frac{-\operatorname{sen} np}{\cos mq}=\frac{T_n(x)}{(-1)^{(m-1)/2}\,T_m(y)}$$

por tanto

$$\begin{cases}\operatorname{sen} mq\cdot T_n(x)-(-1)^{(m-1)/2}\cdot\cos np\cdot T_m(y)=0\\ \cos mq\cdot T_n(x)-(-1)^{(m-1)/2}\cdot\operatorname{sen} np\cdot T_m(y)=0\end{cases}$$

Multiplicando la primera por cos np y la segunda por sen np y restando ambas ecuaciones queda

$$(\operatorname{sen} mq\cdot\cos np-\cos mq\cdot\operatorname{sen} np)\cdot T_n(x)-(-1)^{(m-1)/2}\cdot\left(\cos^2 np+\operatorname{sen}^2 np\right)\cdot T_m(x)=0$$

por tanto

$$\operatorname{sen}\delta\cdot T_n(x)-(-1)^{(m-1)/2}\cdot T_m(x)=0$$

c.q.d.

Es natural preguntarnos si el recíproco del teorema anterior es cierto, es decir si un punto que satisface la ecuación cartesiana satisface las ecuaciones paramétricas. La respuesta es "sí" en el primer caso y este hecho se demuestra en el teorema 2.

Teorema 2. Si un punto (a, b) satisface la ecuación cartesiana

$$T_n(x)^2+T_m(y)^2-2\cdot(-1)^{(m-1)/2}\cdot T_n(x)T_m(y)\cdot\operatorname{sen}\delta-\cos^2\delta=0$$

con m impar y $\cos\delta\neq 0$,

existe un t_0 tal que $\begin{cases}a=\cos\left(\dfrac{m}{d}\cdot t_0+\dfrac{2\pi}{n}k\right)\\ b=\operatorname{sen}\left(\pm\dfrac{n}{d}\cdot t_0+\dfrac{\delta}{m}+\dfrac{2\pi}{m}l\right)\end{cases}\quad k,l\in Z$,

donde $d=m.c.d.(m,n)$

.

Es decir la curva descrita por la ecuación dada es una unión finita de curvas de Lissajous.

Observaciones:

1) Notemos que en una curva de Lissajous siempre podemos tomar p = 0. Basta realizar el cambio de parámetro $t=u-\dfrac{p}{m}$.

2) La ecuación cartesiana nos determina n, p y $\operatorname{sen}\delta$. El ángulo δ puede tomar una infinidad de valores. Una vez elegido uno cualquiera de ellos $q=\dfrac{\delta}{m}$.

Demostración

Sabemos que

$$T_n(a)^2+T_m(b)^2-2\cdot(-1)^{(m-1)/2}\cdot T_n(a)T_m(b)\cdot\operatorname{sen}\delta-\cos^2\delta=0$$

Teniendo en cuenta la identidad trigonométrica $\cos^2\delta+\operatorname{sen}^2\delta=1$ tenemos

$$\cos^2\delta\cdot T_n(a)^2+\operatorname{sen}^2\delta\cdot T_n(a)^2-2\cdot\operatorname{sen}\delta\cdot T_n(a)\cdot(-1)^{(m-1)/2}\cdot T_m(b)\cdot+T_m(b)^2=\cos^2\delta$$

Por tanto

$$(\cos\delta\cdot T_n(a))^2+\left(\operatorname{sen}\delta\cdot T_n(a)-(-1)^{(m-1)/2}\cdot T_m(b)\right)^2=\cos^2\delta$$

Dividiendo por $\cos^2\delta$

$$T_n(a)^2+\left[\frac{\operatorname{sen}\delta\cdot T_n(a)-(-1)^{(m-1)/2}\cdot T_m(b)}{\cos\delta}\right]^2=1$$

Luego existe un valor θ tal que

$$\begin{cases} T_n(a) = cos\theta \\ \dfrac{sen\delta \cdot T_n(a) - (-1)^{(m-1)/2} \cdot T_m(b)}{cos\delta} = -sen\theta \end{cases}$$

Despejando

$$T_m(b) = (-1)^{(m-1)/2} \cdot (sen\delta \cdot cos\theta - cos\delta \cdot sen\theta) = (-1)^{(m-1)/2} \cdot sen(\delta + \theta)$$

Luego

$$\begin{cases} T_n(a) = cos\theta \\ T_m(b) = (-1)^{(m-1)/2} \cdot sen(\delta + \theta) \end{cases}$$

Por tanto podemos haciendo $a = cos\,\alpha$ y $b = sen\beta$ tenemos que

$$T_n(cos\alpha) = cos\theta \Rightarrow cosn\alpha = cos\theta \Rightarrow \alpha = \pm\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot k \quad k \in Z$$

y

$$T_m(sen\beta a) = sen(\delta + \theta) \Rightarrow senm\beta = sen(\delta + \theta) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{\theta}{m} + \dfrac{\delta}{m} + \dfrac{2\pi}{m} \cdot l \\ \alpha = \pi - \dfrac{\theta}{m} + \dfrac{\delta}{m} + \dfrac{2\pi}{m} \cdot l \end{cases} \quad l \in Z,$$

Sea $d = m.c.d.(m,n)$. Haciendo $\theta = \dfrac{m \cdot n \cdot t_0}{d}$ se deduce el resultado enunciado.

Cuando *m* es par se tienen resultados análogos que se enuncian en los teoremas siguientes.

Teorema. 3 Dada la curva de Lissajous

$$\begin{cases} x = cos(m \cdot t + p) \\ y = sen(n \cdot t + q) \end{cases}$$

$0 \le t \le 2\pi$, donde *p*, *q* son números reales y m par.

Llamemos $\delta = \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix}$. Entonces la ecuación cartesiana de la curva de Lissajous es

a) $T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2(-1)^{m/2} T_n(x) T_m(y) \cos\delta - \sin^2\delta = 0$ cuando $\sin\delta \neq 0$,

b) $\cos\delta \;\; T_n(x) - (-1)^{m/2} T_m(y) = 0$ cuando $sin\,\delta = 0$.

Teorema 4. Si un punto (a, b) satisface la ecuación cartesiana

$$T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2(-1)^{m/2} T_n(x) T_m(y) \cos\delta - \sin^2\delta = 0$$

con *m* par y $sen\delta \neq 0$,

existe un t_0 tal que $\begin{cases} a = cos\left(\dfrac{m}{d} \cdot t_0 + \dfrac{2\pi}{n} k\right) \\ b = sen\left(\pm\dfrac{n}{d} \cdot t_0 + \dfrac{\delta}{m} + \dfrac{2\pi}{m} l\right) \end{cases} \quad k, l \in Z$,

donde $d = m.c.d.(m,n)$
.
Es decir la curva descrita por la ecuación dada es una unión finita de curvas de Lissajous.

Las demostraciones de los teoremas 3 y 4 son análogas a las de los teoremas 1 y 2 y no las haremos. El lector interesado puede consultar el artículo **[3].** Resumiendo la curva de Lissajous definida por la ecuación paramétrica coincide con la definida por su ecuación cartesiana cuando *m* es impar y $cos\,\delta$ es distinto de cero o cuando *m* es par y $sen\ \delta$ es distinto de cero Diremos entonces que la curva de Lissajous es no degenerada y en caso contrario decimos que es degenerada. Cuando la curva de Lissajous es degenerada la ecuación paramétrica es sólo un arco de la curva definida por la ecuación cartesiana. Ver los casos degenerados de los ejemplos 1 y 2.

Ejercicio 9. Demostrar los siguientes hechos en una curva de Lissajous degenerada
a) La curva queda determinada con un intervalo de longitud π.
b) La curva es un arco con un origen y un extremo.
c) Los puntos singulares son nodos
Ejercicio 10 Demostrar lo siguiente hechos en una curva de Lissajous no degenerada
a) La curva queda determinada con un intervalo de longitud 2π.
b) La curva es curva cerrada y todos los puntos singulares son nodos.

Apliquemos los teoremas a algunos ejemplos seleccionados

1. Alforja

La alforja es la curva de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = c\cdot cos\left(t-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = -\dfrac{c}{2}\cdot sen(2t+\beta)+\dfrac{c}{2}sen\beta \end{cases}$$

En este caso *m* =1 es impar y $\delta = \begin{vmatrix} 1 & \dfrac{-\pi}{2} \\ 2 & \beta \end{vmatrix} = \beta + \pi$. Cuando $cos(\beta+\pi)=0$, es decir cuando

$\beta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in Z$ podemos aplicar la formula

$$sen\,\beta \cdot T_2\left(\frac{x}{c}\right) - T_1\left(\frac{-2y}{c} + sen\,\beta\right) = 0$$

es decir

$$sen\,\beta \cdot \left(2\left(\frac{x}{c}\right)^2 - 1\right) - \left(\frac{-2y}{c} + sen\,\beta\right) = 0$$

operando nos queda

$$y = \frac{sen\beta}{c}x^2$$

como $cos\,\beta = 0$ tenemos que la ecuación de la curva es

$$y = \frac{x^2}{c} \quad ó \quad y = -\frac{x^2}{c}$$

que es la ecuación de una parábola.

Observemos que en este caso la curva parametrizada es un arco de parábola.

Cuando $cos\,\beta \neq 0$ tenemos

$$T_1\left(\frac{x}{c}\right)^2 + T_2\left(\frac{-2y}{c}+sen\beta\right)^2 - 2\cdot T_1\left(\frac{x}{c}\right)T_2\left(\frac{-2y}{c}+sen\beta\right)\cdot sen\beta - cos^2\beta = 0$$

Operando queda

$$\frac{4x^4}{c^4} - \frac{8sen\,\beta\cdot x^2 y}{c^3} - \frac{4cos^2\beta\cdot x^2}{c^2} + \frac{4y^2}{c^2} = 0$$

Multiplicando por $\frac{c^4}{4}$

$$x^4 - 2c\,sen\beta \cdot x^2 y - c^2 \cos^2 \beta \cdot x^2 + c^2 y^2 = 0$$

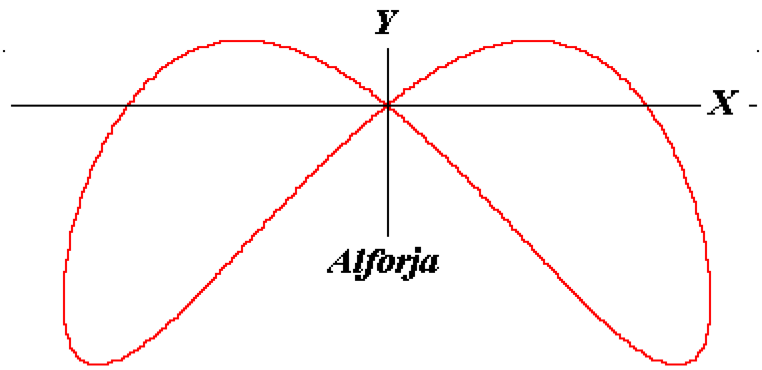
llamando $a = c \cdot \cos \beta$ y $b = c \cdot sen\,\beta$ queda

$$x^4 - 2b \cdot x^2 y - a^2 \cdot x^2 + \left(a^2 + b^2\right)^2 y^2 = 0$$

o bien

$$\left(x^2 - by\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$$

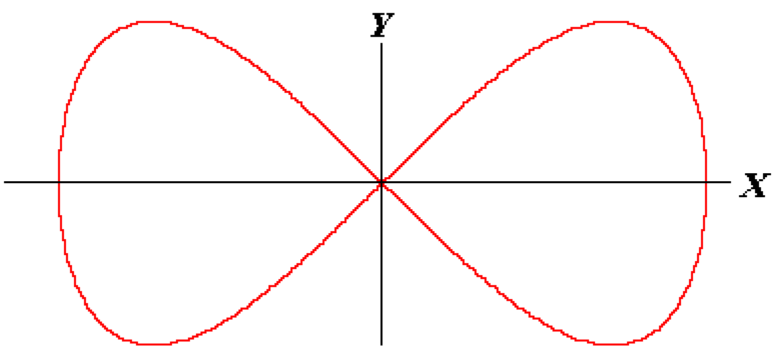
que es la ecuación cartesiana de la alforja



Alforja

Cuando b=0 la alforja se llama Lemniscata de Gerono

$$x^4 = a^2\left(x^2 - y^2\right) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = c \cdot \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ y = \frac{-c}{2} sen\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$



Lemniscata de Gerono

2) Cúbica Crunodal

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = sen\left(3t + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

En este caso m =2 es par y $sen\,\delta = sen\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & \frac{\pi}{2} \end{vmatrix} = 0$, la fórmula es por tanto

$$\cos\delta \;\; T_n(x) - (-1)^{m/2} T_m(y) = 0$$

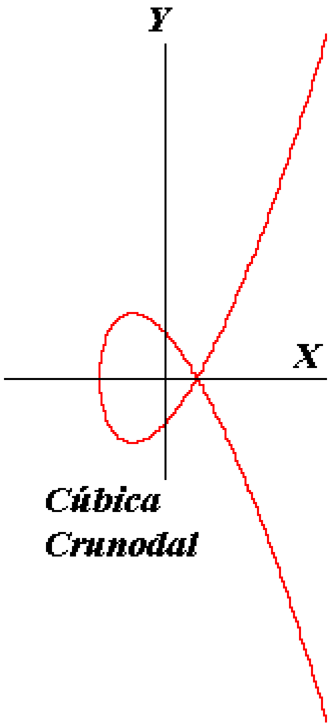
Sustituyendo

$$cos\left(\frac{\pi}{2}\right)T_3(x)-(-1)T_2(y)=0$$

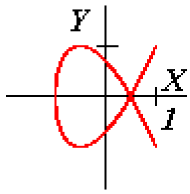
Operando

$$2y^2 = 4x^3 - 3x + 1$$

Esta curva se llama cúbica con punto doble o cúbica crunodal.



Observemos que es una curva de Lissajous degenerada y que la curva parametrizada es un arco de la cúbica con forma de letra alfa.



Otro Ejemplo con m par

$$\begin{cases} x = cos\,2t \\ y = sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

En este caso m =2 es par y $sen\,\delta = sen\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & \frac{\pi}{4} \end{vmatrix} = 1$, la fórmula es por tanto

$$T_n(x)^2 + T_m(y)^2 - 2\cdot(-1)^{m/2}\cdot T_n(x)T_m(y)\cdot cos\,\delta - sin^2\delta = 0$$

sustituyendo

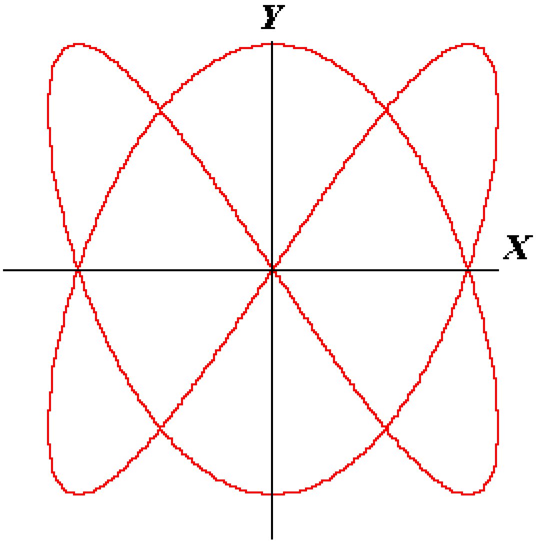
$$T_3(x)^2 + T_2(y)^2 - 2\cdot(-1)\cdot T_n(x)T_m(y)\cdot cos\frac{\pi}{2} - sin^2\frac{\pi}{2} = 0$$

Operando

$$\left(4x^3 - 3x\right)^2 + \left(2y^2 - 1\right) = 1$$

o bien

$$\left(4x^3-3x\right)^2=4\left(y^2-y^4\right).$$



Ejemplo de curva reducible

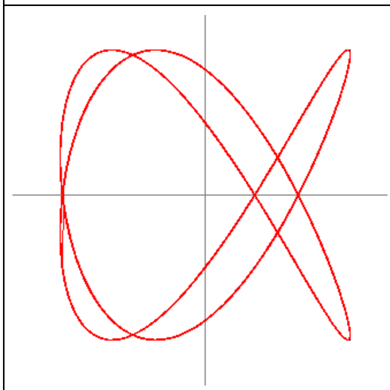
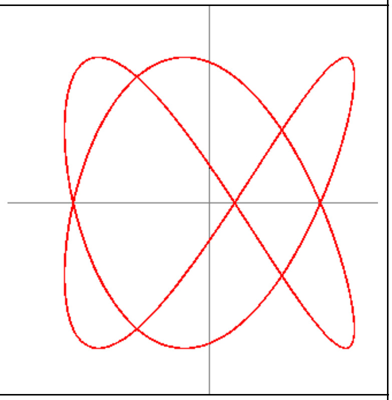
La curva definida por las ecuaciones

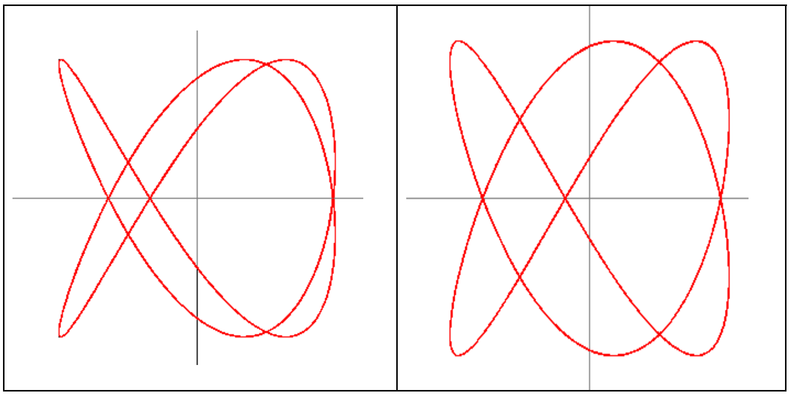
$$\begin{cases} x = cos\left(8t+\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = sen\left(12t+\dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Satisface la ecuación

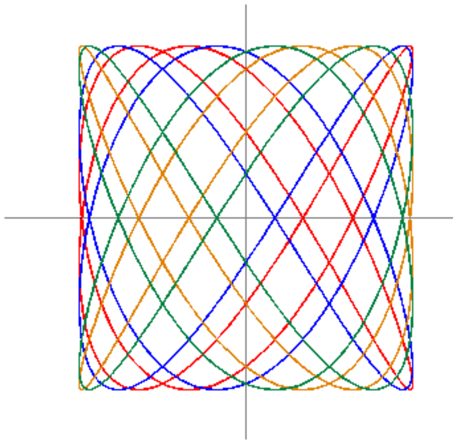
$$T_{12}(x)^2+T_8(y)^2+T_{12}(x)\cdot T_8(y)-\frac{3}{4}=0.$$

Esta ecuación nos determina cuatro componentes irreducibles que corresponden a las cuatro curvas de Lissajous siguientes:

$\begin{cases} x = cos\,2t \\ y = sen\left(3t-\dfrac{5\pi}{12}\right) \end{cases}$	$\begin{cases} x = cos\left(2t+\dfrac{\pi}{6}\right) \\ y = sen\left(3t-\dfrac{5\pi}{12}\right) \end{cases}$
	
$\begin{cases} x = cos\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right) \\ y = sen\left(3t-\dfrac{5\pi}{12}\right) \end{cases}$	$\begin{cases} x = cos\left(2t+\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = sen\left(3t-\dfrac{5\pi}{12}\right) \end{cases}$



Las cuatro gráficas juntas



Observemos que la curva parametrizada inicial satisface también las ecuaciones

$$\begin{cases} x = cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = sen\left(3t + \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

o eligiendo el parámetro p =0

$$\begin{cases} x = cos\, 2t \\ y = sen\left(3t - \dfrac{5\pi}{12}\right) \end{cases}.$$

Cualquiera de estas dos ecuaciones paramétricas nos generan

$$T_3(x)^2 + T_2(y)^2 - \sqrt{3}T_3(x) \cdot T_2(y) - \frac{1}{4} = 0 \, .$$

Referencias

1. R. L. Burden y J. D. Faires, *Análisis Numérico*, Grupo Editorial IberoAmericana, 1985.
2. F. Cajori, *A History of Mathematics* , Chelsea, 1999)
3. J. Castiñeira Merino, *Lissajous Figures and Chebyshev Polynomials*, The College Mathematics Journal 34 (2003) #2, 122-127.
4. Eli Maor, *Trigonometric Delights*, Princenton University Press, 1998.
5. J. W. Rutter, *Geometry of Curves*, Chapman & Hall, 2000.
6. Vinogradov y otros, *Enciclopedia de las Matemáticas*, Editorial Mir-Rubiños, 1994.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI