

# CUATRO SUCESIONES INUSUALES TRATADAS ELEMENTALMENTE

LAURENȚIU MODAN

Department of Mathematics, Faculty of Computer Science

Academy of Economic Studies, Bucharest

E-mail: modanl@infosec.ase.ro

*Abstract.* This note develops the solutions of 4 difficult sequence problems, through an elementary level.

*MR classification:* 40A05.

En [1], aparecen 3 sucesiones complicadas para las que se pide estudiar su convergencia. Les he añadido otra, la cuarta, inspirada por las tres primeras, cuyas soluciones se encuentran en [2]. Pero esas soluciones, por otra parte muy elegantes, utilizan nociones del nivel del Análisis Real avanzado. Esta es la razón que me ha llevado a buscar algunas justificaciones elementales para esas soluciones, para que puedan quedar al alcance de un público más amplio.

Los 4 problemas están basados en dos constante de Euler:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \cong 2,71 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (1),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = \gamma \cong 0,57 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (2),$$

en el siguiente límite conocido:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2 \quad (3),$$

y en la *formula de Stirling* para el factorial:

$$n! = \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}}, \quad \theta \in (0,1) \quad (4).$$

**Problema 1.** Estudiar la convergencia de la sucesión  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , definida recurrentemente por las relaciones:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+x_{2n+1}} = e, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1+x_{2n}} = e, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (5).$$

De (5), encontramos inmediatamente:

$$n + x_{2n+1} = n + 1 + x_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

o lo que es lo mismo:

$$x_{2n+1} = 1 + x_{2n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (6).$$

Iterando (6), tenemos:

$$x_{2n+1} = 2n + 1 + x_0, \quad n \in \mathbb{N}^*, x_0 \in \mathbb{R},$$

de donde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad x_0 \in \mathbb{R}$$

y por lo tanto,  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  es divergente. ■

**Problema 2.** Estudiar la convergencia de la sucesión  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , definida por la recurrencia:

$$\left[ \frac{n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \right]^{n+y_n} = n!, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (7).$$

Con (1) y (4), en (7), tomando límites, obtenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{e} \right)^{n+y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \left( \frac{n}{e} \right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \quad (8).$$

Pero como:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\theta}{12n}} = 1,$$

la relación (8) se convierte en:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{e} \right)^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} \quad (9).$$

Tomando logaritmos en (9), se tiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln n - 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \ln n \right),$$

o, lo que es equivalente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \ln n}{\ln n - 1} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, concluimos que la sucesión  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge hacia  $1/2$ . ■

**Problema 3.** Consideramos la sucesión  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , definida mediante la recurrencia:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} = \log_{u_n} \left( \frac{2n+1}{n} \right), \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (10).$$

Nos proponemos estudiar su convergencia.

De (10), consecutivamente, encontramos:

$$(u_n)^{\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}} = \frac{2n+1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

$$\left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \right) \ln u_n = \ln \left( \frac{2n+1}{n} \right), \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (11).$$

Con (3), la relación (11) se convierte en:

$$\ln 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \ln u_n = \ln 2.$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = e$$

y concluimos la convergencia de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  hacia  $e$ . ■

**Problema 4.** Consideramos la sucesión  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , definida por la recurrencia:

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n + v_n) = \gamma, \quad n \in \mathbb{N}^* \quad (12).$$

Estudiaremos la convergencia de  $(v_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

En el límite, con (2), la relación (12) nos da:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left( \frac{n + v_n}{n} \right) = 0,$$

o lo que es lo mismo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n + v_n}{n} \right) = 1,$$

de donde:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n} = 0.$$

En consecuencia, la sucesión  $(v_n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  es convergente hacia 0. Como observación, añadamos que en [2], se estudia la convergencia de  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , utilizando nociones de la teoría de series y sus desarrollos asintóticos.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] **Bencze M.** “ *OQ: 784, 803, 804, 805*”, *Octogon, Mathematical Magazine*, v.9, nr.2, 2001, Braşov;
- [2] **Sándor J.** “ *On the open problems OQ: 784, 803, 804, 805*”, pg.410–1,413-6, *Octogon, Mathematical Magazine*, v.10, nr.1, 2002, Braşov.