

PROBLEMAS RESUELTOS

Presentamos a continuación las soluciones a los problemas 1, 2, 3 del número 1 de la Revista, que envía Carlos Marcelino Casas Cuadrado.

Problema 1

Resolver la ecuación en la incógnita x:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a+x & a+x^2 \\ a & 1 & a+x^2 & a+x \\ a+x & a+x^2 & 1 & a \\ a+x^2 & a+x & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(Absolutorial Aufgabe, Baviera, 1874)

Solución al problema 1

El término mayor grado del polinomio que resulta al desarrollar el determinante es x^8 , por lo que voy a intentar descomponerlo en el producto de cuatro polinomios de segundo grado (eso siempre es posible ya que si z (complejo) es raíz del polinomio, \bar{z} también lo es, y $(x-z)(x-\bar{z})$ tiene coeficientes reales). Para hacer esto, aplicamos las propiedades del determinante:

- Si se intercambian dos filas ó columnas, el determinante no varía (cambia de signo, pero al ser igual a cero no varía).
- Si se suma a una fila o columna una combinación lineal de las otras filas o columnas, el determinante no varía.
- Si se multiplica un número por un determinante, toda una fila (o una columna) queda multiplicada por ese número.

Aplicando eso vamos a operar el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a+x & a+x^2 \\ a & 1 & a+x^2 & a+x \\ a+x & a+x^2 & 1 & a \\ a+x^2 & a+x & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Sumando a la cuarta columna las otras tres queda:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a+x & x^2+x+3\cdot a+1 \\ a & 1 & a+x^2 & x^2+x+3\cdot a+1 \\ a+x & a+x^2 & 1 & x^2+x+3\cdot a+1 \\ a+x^2 & a+x & a & x^2+x+3\cdot a+1 \end{vmatrix} = 0$$

y como la cuarta columna está toda multiplicada por $x^2+x+3\cdot a+1$, sale fuera del determinante:

$$(x^2+x+3\cdot a+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a+x & 1 \\ a & 1 & a+x^2 & 1 \\ a+x & a+x^2 & 1 & 1 \\ a+x^2 & a+x & a & 1 \end{vmatrix} = 0$$

y restando a todas las filas la primera:

$$(x^2+x+3\cdot a+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & a+x & 1 \\ a-1 & 1-a & x^2-x & 0 \\ x+a-1 & x^2 & 1-a-x & 0 \\ x^2+a-1 & x & -x & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la cuarta columna:

$$(x^2+x+3\cdot a+1) \cdot \begin{vmatrix} a-1 & 1-a & x^2-x \\ x+a-1 & x^2 & 1-a-x \\ x^2+a-1 & x & -x \end{vmatrix} = 0$$

Sumando a la tercera fila la segunda menos la primera:

$$(x^2+x+3\cdot a+1) \cdot \begin{vmatrix} a-1 & 1-a & x^2-x \\ x+a-1 & x^2 & 1-a-x \\ x^2+x+a-1 & x^2+x+a-1 & -x^2-x-a+1 \end{vmatrix} = 0$$

y cambiando el signo a la tercera columna:

$$(x^2+x+3\cdot a+1) \cdot \begin{vmatrix} a-1 & 1-a & -x^2+x \\ x+a-1 & x^2 & a+x-1 \\ x^2+x+a-1 & x^2+x+a-1 & x^2+x+a-1 \end{vmatrix} = 0$$

sacando el factor $x^2+x+a-1$ fuera del determinante:

$$(x^2 + x + 3 \cdot a + 1) \cdot (x^2 + x + a - 1) \cdot \begin{vmatrix} a-1 & 1-a & -x^2+x \\ x+a-1 & x^2 & a+x-1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Restando a todas las columnas la primera:

$$(x^2 + x + 3 \cdot a + 1) \cdot (x^2 + x + a - 1) \cdot \begin{vmatrix} a-1 & 2-2 \cdot a & -x^2+x-a+1 \\ x+a-1 & x^2-x-a+1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

El valor del determinante es el producto de los elementos de la diagonal secundaria cambiado de signo, al ser cero todos los elementos por debajo de ella. Así, la descomposición final queda:

$$(x^2 + x + 3 \cdot a + 1) \cdot (x^2 + x + a - 1) \cdot (x^2 - x + a - 1) \cdot (x^2 - x - a + 1) = 0$$

La única posibilidad de que esa ecuación se cumpla es que al menos uno de los factores sea igual a cero. Vamos a analizarlos por separado:

$$\mathbf{x^2+x+3 \cdot a+1=0:}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (3 \cdot a + 1)}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 \cdot (1 + 4 \cdot a)}}{2}$$

que toma valores reales si $1 + 4 \cdot a \leq 0$, ó $a \leq -\frac{1}{4}$.

$$\mathbf{x^2+x+a-1=0:}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (a - 1)}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$

que toma valores reales si $5 - 4 \cdot a \geq 0$, ó $a \leq \frac{5}{4}$.

$$\mathbf{x^2-x+a-1=0:}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (a - 1)}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$

que toma valores reales si $5 - 4 \cdot a \geq 0$, ó $a \leq \frac{5}{4}$.

$x^2 - x - a + 1 = 0$:

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot (-a + 1)}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 + 4 \cdot a}}{2}$$

que toma valores reales si $4 \cdot a - 3 \geq 0$, ó $a \geq \frac{3}{4}$.

Soluciones reales:

Dependiendo del valor de a , la ecuación tiene diferente número de soluciones reales:

$a < -\frac{1}{4}$, 6 soluciones reales (y 2 complejas):

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 \cdot (1 + 4 \cdot a)}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$

$a = -\frac{1}{4}$, 5 soluciones reales, una de ellas doble (y 2 complejas):

$$x = -\frac{1}{2}, \text{ doble}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{6}}{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{2}$$

$-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$, 4 soluciones reales (y 4 complejas):

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$

$a = \frac{3}{4}$, 5 soluciones reales, una de ellas doble (y 2 complejas):

$$x = -\frac{1}{2}, \text{ doble}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$\frac{3}{4} < a < \frac{5}{4}$, 6 soluciones reales (y 2 complejas):

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 + 4 \cdot a}}{2}$$
$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5 - 4 \cdot a}}{2}$$

$a = \frac{5}{4}$, 4 soluciones reales, dos de ellas dobles (y 2 complejas):

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2}$$
$$x = \frac{1}{2}, \text{ doble}$$
$$x = -\frac{1}{2}, \text{ doble}$$

$a > \frac{5}{4}$, 2 soluciones reales (y 6 complejas):

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3 + 4 \cdot a}}{2}$$

Problema 2

Calcular el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2 \cdot n} + \cos \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot n} + \cos \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot n} + \dots + \cos \frac{n \cdot \pi}{2 \cdot n}}{\frac{\pi}{2 \cdot n} + \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot n} + \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot n} + \dots + \frac{n \cdot \pi}{2 \cdot n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N}{D}$$

(Absolutorial Aufgabe, Baviera 1874)

Solución al problema 2

Vamos a ver cómo se comportan el numerador y el denominador del límite cuando n tiende a infinito.

Denominador: Sacando factor común a $\frac{\pi}{2 \cdot n}$ queda:

$$D = \frac{\pi}{2 \cdot n} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

El interior del paréntesis es la suma de una progresión aritmética, con lo que queda:

$$D = \frac{\pi}{2 \cdot n} \cdot \frac{(1+n)}{2} \cdot n$$

y simplificando:

$$D = \frac{\pi \cdot (1+n)}{4}$$

con lo que D se comporta como $\frac{\pi \cdot n}{4}$ cuando n tiende a infinito.

Numerador: Llamo N al numerador. La fórmula de integración del trapecio dice que:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \lim_{h \rightarrow 0} \left[h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot f(a) + f(a+h) + f(a+2 \cdot h) + \dots + f(a+(n-1) \cdot h) + \frac{1}{2} \cdot f(a+n \cdot h) \right) \right]$$

siendo n el número de subintervalos equiespaciados y h el diámetro de cada intervalo ($h = \frac{b-a}{n}$). Si tomamos $f(x) = \cos(x)$, $a=0$ y $b = \frac{\pi}{2}$, la expresión queda:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \cdot dx = \lim_{h \rightarrow 0} \left[h \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \cos(0) + \cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot n}\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{(n-1) \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) + \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) \right) \right]$$

y operando:

$$1 = \lim_{n \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\pi}{2} - 0}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2 \cdot n}\right) + \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) + \dots + \cos\left(\frac{(n-1) \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) + \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) - \frac{1}{2} \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi}{2 \cdot n}\right) \right) \right]$$

$$1 = \lim_{n \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\pi}{2}}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} + N - 0 \right) \right] = \lim_{n \rightarrow 0} \left[\frac{\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + N \right)}{n} \right]$$

Entonces, cuando n tiende a infinito, $\frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} + N \right)$ se comporta como n, por lo que N se comporta como $\frac{2 \cdot n}{\pi} - \frac{1}{2} \approx \frac{2 \cdot n}{\pi}$.

Volviendo al límite inicial, y utilizando las aproximaciones de N y D obtenidas, queda:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2 \cdot n} + \cos \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot n} + \cos \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot n} + \dots + \cos \frac{n \cdot \pi}{2 \cdot n}}{\frac{\pi}{2 \cdot n} + \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot n} + \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot n} + \dots + \frac{n \cdot \pi}{2 \cdot n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \cdot n}{\pi}}{\frac{\pi \cdot n}{4}}$$

y simplificando:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos \frac{\pi}{2 \cdot n} + \cos \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot n} + \cos \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot n} + \dots + \cos \frac{n \cdot \pi}{2 \cdot n}}{\frac{\pi}{2 \cdot n} + \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot n} + \frac{3 \cdot \pi}{2 \cdot n} + \dots + \frac{n \cdot \pi}{2 \cdot n}} = \frac{8}{\pi^2}$$

Nota:

Para comprobar este resultado he hecho un programa, "limite.exe" que calcula la expresión del límite desde 1 hasta un n que hay que fijar, y

da la salida en “serie.txt”, y otro, “limite2.exe”, que halla el valor de la expresión para un solo n , y da la salida en “serie2.txt” (este último admite n 's más grandes). Para $n=1.000.000$, la expresión del límite es 0.81056802195074 , cercano a la solución, $\frac{8}{\pi^2} \approx 0.81056916913870$.

Problema 3

Por un punto P_0 de la curva de ecuación $y = x^3 + A \cdot x^2 + B \cdot x + C$ se traza una recta, que es tangente a la curva en otro punto P_1 .

Por P_1 se traza una recta, que es tangente a la curva en un nuevo punto P_2 , y así sucesiva e indefinidamente.

Demostrar que la sucesión de puntos P_0, P_1, P_2, \dots tiende hacia el punto de inflexión de la curva.

(Prueba de Bachillerato, Suecia 1964)

Solución al problema 3

Dado un punto $P_n(x_n, y_n)$ de esa sucesión vamos a ver qué expresión tiene el punto $P_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$. Para ello empezamos hallando la ecuación de la recta que pasa por P_n y P_{n+1} :

$$y - y_n = m \cdot (x - x_n)$$

Hallamos la intersección de esa recta con la curva:

$$y = m \cdot (x - x_n) + y_n = x^3 + A \cdot x^2 + B \cdot x + C$$

$$P(x) = x^3 + A \cdot x^2 + (B - m) \cdot x + (C + m \cdot x_n - y_n) = 0$$

Las raíces de $P(x)$ serán los puntos de intersección de la recta con la curva. Debe tener una raíz simple, x_n , que por suposición está en las dos, y una raíz, x_{n+1} , doble, por ser la curva y la recta tangentes (ésta última es la que buscamos).

Como x_n es raíz, dividimos $P(x)$ por $(x - x_n)$ por ruffini:

	1	A	B-m	C+m·x _n -y _n
x _n	x _n	Q ₁	Q ₃	
	1	A+x _n	Q ₂	0

Las expresiones Q_1 , Q_2 y Q_3 son datos que no necesitamos para la resolución del problema (con ellos se podría hallar m , la pendiente de la recta).

La división ha dado como resultado:

$$R(x) = \frac{P(x)}{x - x_n} = x^2 + (A + x_n) \cdot x + Q_2$$

$R(x)$ debe tener una raíz doble por lo dicho anteriormente, y esa es:

$$x = \frac{-A - x_n \pm 0}{2} = \frac{-A - x_n}{2}$$

por lo que tenemos la relación entre la coordenada 'x' de un punto y el siguiente:

$$x_{n+1} = \frac{-A - x_n}{2}$$

Hay que demostrar que x_n tiende a x_i cuando n tiende a infinito, siendo x_i la coordenada 'x' del punto de inflexión de la curva:

$$y(x_i) = x_i^3 + A \cdot x_i^2 + B \cdot x_i + C$$

$$y'(x_i) = 3 \cdot x_i^2 + 2 \cdot A \cdot x_i + B$$

$$y''(x_i) = 6 \cdot x_i + 2 \cdot A = 0$$

$$x_i = -\frac{A}{3}$$

$$y'''(x_i) = 6 \neq 0$$

con lo que hay un punto de inflexión en $x_i = -\frac{A}{3}$.

Para demostrar que x_n converge a x_i , voy a hallar la distancia que hay desde x_{n+1} a x_i en función de x_n :

$$D_{n+1} = |x_{n+1} - x_i| = \left| \frac{-A - x_n}{2} - \left(-\frac{A}{3}\right) \right| = \frac{1}{2} \cdot \left| x_n - \left(-\frac{A}{3}\right) \right| = \frac{1}{2} \cdot |x_n - x_i| = \frac{1}{2} \cdot D_n$$

por lo que la distancia de x_{n+1} a x_i es la mitad de la distancia de x_n a x_i . Si llamamos D_0 la distancia de x_0 a x_i , se tiene que:

$$|x_n - x_i| = \frac{D_0}{2^n}$$

x_n tiende a x_i si el límite cuando n tiende a infinito de la distancia entre x_n y x_i es cero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n - x_i| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{D_0}{2^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D_0}{2^n} = 0$$

por lo que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_i$$

y como para cada valor de 'x' en la curva inicial sólo hay un valor de 'y', y por lo tanto un punto:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_i}$$