EXTREMOS RELATIVOS DE FUNCIONES FRACCIONARIAS.

La derivada del cociente de dos funciones suele ser "expansiva", por lo que el cálculo y simplificación de la derivada segunda puede resultar tediosa y dificultosa la evaluación de valores en ésta.

Sin embargo, para determinar los extremos relativos (máximos o mínimos) de una función $f(x)$, no es necesario calcular $f''(x)$, ya que es suficiente conocer su signo en las raíces de $f'(x)$.

Función signo de la segunda derivada.

Sea

$$f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}.$$

Por brevedad, escribiremos simplemente $f(x)=\frac{u}{v}$. Se tiene:

$$f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Si $f'(x_0)=0$, entonces $u'v-uv'=0$ en $x=x_0$. Por tanto,

$$f''(x_0)=\frac{(u''v+u'v'-u'v'-uv'')v^2-2vv'(u'v-uv')}{v^4}=\frac{(u''v-uv'')v^2-2vv'\overbrace{(u'v-uv')}^{0}}{v^4},$$

luego,

$$f'(x_0)=0\Rightarrow f''(x_0)=\frac{u''v-uv''}{v^2}.$$

Ahora bien, puesto que v^2 es no negativa (positiva, para que f esté definida en x_0), no tiene influencia en el signo de $f''(x_0)$. Así pues, a efectos de signo, $f''(x_0)$ es equivalente a la función

$$\boxed{s''(x_0)=u''(x_0)v(x_0)-u(x_0)v''(x_0)}$$

Evidentemente, s´´ es equivalente a cualquier función homotética a ella, con razón de homotecia positiva, es decir

$$s_1''(x_0)=ks''(x_0)\overset{k>0}{\Rightarrow} s_1''(x_0)\sim s''(x_0),$$

entendiendo que tal equivalencia es relativa al signo de éstas en las raíces de $f'(x)$. Esto permite, en ciertos casos, simplificar aún más la función signo asociada a f.

Ejemplo.

Comprobemos con un ejemplo la ventaja que puede suponer sustituir la segunda derivada de una función fraccionaria por su función signo asociada, cuando se trata simplemente de determinar extremos relativos.

Determínense los extremos relativos de la función $f(x)=\frac{(2x-5)^2}{x^2+9}$.

Después de algunas simplificaciones, se obtiene:

$$f'(x)=\frac{2(2x-5)(5x+18)}{(x^2+9)^2}=0\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{5}{2}\\ x=-\frac{18}{5}\end{cases}$$

$$f''(x)=\frac{2(20x^3+33x^2-540x-99)}{(x^2+9)^3}.$$

Jesús Álvarez Lobo. Oviedo. Asturias. España. lobo@matematicas.net.

Obtener f'' ha supuesto un trabajo tan ingrato como innecesario; pero aún nos aguarda lo peor: evaluar f'' en $x=\frac{5}{2}$ y $x=-\frac{18}{5}$. Esta tarea resulta realmente disuasoria, incluso disponiendo de calculadora.

Veamos qué fácil resulta todo esto mediante la función signo asociada, incluso sin calculadora, lo que resultaría realmente complicado por el método convencional, pues, por ejemplo

$$f''\left(-\tfrac{18}{5}\right)=-\frac{1250}{4941}.$$

He aquí el desarrollo completo de los cálculos necesarios para determinar si f tiene máximos relativos o mínimos relativos:

$$f'=0 \Leftrightarrow u'v-uv'=0 \Leftrightarrow 2\cdot 2(2x-5)(x^2+9)-(2x-5)^2\cdot 2x=0 \Leftrightarrow 2(2x-5)(5x+18)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ x=-\frac{18}{5} \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} u=(2x-5)^2 \Rightarrow u'=4(2x-5) \Rightarrow u''=8 \\ v=x^2+9 \Rightarrow v'=2x \Rightarrow v''=2 \end{array}\right\} \Rightarrow s''(x)=8(x^2+9)-2(2x-5)^2$$

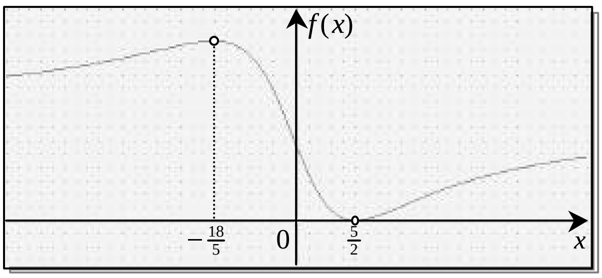
Despreciando el factor 2 en s'' (que no influye en el signo) y simplificando, se tiene ***la función signo canónica*** *asociada a f:*

$$\boxed{s_1''(x)=20x+11}$$

La evaluación del signo de f'' en $x=\frac{5}{2}$ y $x=-\frac{18}{5}$ mediante la función signo canónica resulta inmediato:

$$s_1''\left(\tfrac{5}{2}\right)>0 \quad \Rightarrow f''\left(\tfrac{5}{2}\right)>0 \quad \Rightarrow \textit{mínimo de } f \textit{ en } x=\tfrac{5}{2}$$

$$s_1''\left(-\tfrac{18}{5}\right)<0 \Rightarrow f''\left(-\tfrac{18}{5}\right)<0 \Rightarrow \textit{máximo de } f \textit{ en } x=-\tfrac{18}{5}$$



ꕤ

Jesús Álvarez Lobo. Oviedo. Asturias. España. lobo@matematicas.net.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI