ALGUNOS PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS

Por Juan Bosco Romero Márquez

Dedicado a la memoria del Prof. Miguel de Guzmán Ozámiz.

1 Introducción

En este trabajo, presentamos dos cuestiones matemáticas en forma de problemas como un homenaje a la memoria del admirado y querido, Profesor. Miguel de Guzmán Ozámiz, gran matemático y mejor persona que cautivaba con su entrañable personalidad a todos los que fuimos alumnos y amigos suyos.

Su gran sencillez y fácil accesibilidad, le hacía rebosar de una entrañable personalidad humana y científica que hacía que su áurea de ser humano bueno se proyectara en todo lo que hacía, con un amor sin límites, en su Fe inquebrantable, y en su entrega y ayuda a los demás de una forma desinteresada.

El primer problema que voy a proponer y resolver cae dentro del ámbito del Análisis Matemático, y más concretamente, se trata de probar una desigualdad con cota inferior y superior de la Función Gamma de Euler.

El segundo problema versa sobre un resultado elemental de la Geometría del Triangulo que se resuelve dentro de diferentes contextos : Geometría Sintética, Analítica sin DERIVE, y, con DERIVE siguiendo la línea de [1] .

Ambas partes de la Matemática, el Análisis y la Geometría, que eran las más queridas por el Prof. Miguel de Guzmán Ozámiz, a las que dedicaba sus investigaciones matemáticas de cualquier nivel.

Además, entre otras muchas cosas, una fundamental y principal para él, era enseñar y aprender la Matemática a través del juego como una aventura, y la belleza a conseguir como un premio, por eso hizo una ingente labor de investigación metodológica y didáctica, de enseñar a los futuros profesores de cómo descubrir estos dos parámetros en sus clases, que junto con la divulgación matemática en sus libros y en revistas, las aplicaba con gran entrega a la formación de los futuros profesores porque tenía una gran preocupación por la enseñanza de la matemática en todos los niveles educativos.

Estas dos cuestiones en forma de problemas que le dedico a él, como un modesto homenaje y tributo a su vida, a su obra hecha con un gran amor y desarrollada con juego y belleza, y con a su entrañable y lucida personalidad tanto humana como científica con la que siempre me sentía arropado y ayudado.

2 Resultados.

Comenzamos esta sección enunciado y resolviendo cada uno de los dos problemas que presentamos en este trabajo.

Problema 1

Sean a, b, y c números reales fijos, tales que b ≥ 0, **a** $\geq c - \frac{3}{2}$, **x** $\geq c \geq 1$, **probar que :**

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{x-c}\left(\frac{x}{c}\right)^{-b} \leq \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(c)} \leq \left(\frac{x}{e}\right)^{x-c}\left(\frac{x}{c}\right)^{a+1}.$$

donde $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt,$ **con x >0, real es la función gamma de Euler, llamada integral euleriana de segunda especie.**

Demostración.

Es un buen ejercicio elemental de Análisis Matemático, en que estudiamos la monotonía de dos funciones continuas e infinitamente derivables f y g, que construimos al efecto utilizando una forma equivalente la desigualdad propuesta, a través de la función logaritmo, si para ello, utilizamos como resultado clave para resolver este problema la desigualdad de Minc-Sathre-Alzer, ver $[2]-[7]$.
y que dice así, en la parte que nos interesa aquí :

Lema. (Desigualdad de Minc-Sathre-Alzer)

Si $x \geq 1$, es un número real, entonces se verifica :

$$\frac{1}{2x} < Lx - \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} < \frac{1}{x}. \quad (1)$$

Definimos la función f de variable real con valores reales, para $c \geq 1$, como sigue :

$$f : [c, \infty[\to \Re, \quad f(x) = L\Gamma(x) - L\Gamma(c) - (x-c)(Lx-1) + b(Lx - Lc),$$

para $x \geq c \geq 1$. Esta función se obtiene de forma equivalente al tomar la función logaritmo en el miembro de la izquierda de la desigualdad propuesta.

La función f así construida, en el intervalo considerado es continua e infinitamente derivable en (c, ∞). Además, f(c) = 0

Estudiemos ahora su monotonía en el intervalo en que está definida utilizando para ello, la derivada primera.

La derivada primera de f viene dada en ese intervalo :

$$f'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} - \left(Lx - 1 + \frac{x-c}{x} \right) + \frac{b}{x} = \left(\frac{b+c-1}{x} \right) + \left(\frac{1}{x} - Lx + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} \right) \geq 0,$$

ya que cada sumando entre paréntesis en la expresión anterior, el primero es positivo por las hipótesis dadas sobre b y c, y el segundo es positivo por la desigualdad de Minc-Sathre-Álzer, del lema, puesta en la forma :

$$0 < \frac{1}{x} - Lx + \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}, \quad \text{para } x \geq c \geq 1.$$

De aquí , la función f monótona creciente en $[c, \infty[$, y por lo tanto,

$0 = f(c) \leq f(x)$, para $x \geq c \geq 1$.

Por consiguiente, pasando mediante la función exponencial inversa de la función logaritmo, tenemos probado la desigualdad equivalente siguiente :

$$\left(\frac{x}{e}\right)^{x-c}\left(\frac{x}{c}\right)^{-b} \le \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(c)}, \qquad b \ge 0, \quad x \ge c \ge 1. \quad (2)$$

Similarmente, definimos la función g de variable real con valores reales, para $c \ge 1$, como sigue :

g: $[c,+\infty[\ \to \Re$, g(x)=(a+1)(Lx-Lc)+(x-c)(Lx-1)- $(L\Gamma(x) - L\Gamma(c),)$

$x \ge c \ge 1.$

La función g es continua en el intervalo dado e infinitamente derivable en (c, ∞).

Veamos ahora su monotonía a través de la derivada primera en (c, ∞).

La derivada primera viene dada por la siguiente expresión :

$$g´(x)=\left(\frac{a+1}{x}\right)+\left(Lx-1+\frac{x-c}{x}\right)-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}=\frac{a+1-c}{x}+\left(Lx-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right).$$

Ahora acotemos g'(x), en (c, $+\infty$), utilizando para ello, las hipótesis sobre a y c, y la desigualdad de Minc-Sathre-Álzer, en el miembro de la izquierda del lema.

En efecto, llegamos a :

$$g´(x) = ,\ \frac{a+1-c}{x}+\left(Lx-\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) \ge \frac{a+1-c}{x}+\frac{1}{2x}=\frac{2a-2c+3}{2x} \ge 0.$$

ya que, por hipótesis, $a \ge c-\frac{3}{2}$, $x \ge c \ge 1$, $\frac{1}{2x} < Lx - \frac{\Gamma`(x)}{\Gamma(x)}$.

De aquí, obtenemos que la función g es monótona creciente en el intervalo definida. Como, además, 0= g(c) $\le g(x)$, para $x \ge c \ge 1$, $a \ge c-\frac{3}{2}$.

Por todo lo anterior tenemos demostrada la desigualdad de la derecha propuesta en nuestro problema. Es decir :

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(c)} \le \left(\frac{x}{e}\right)^{x-c}\left(\frac{x}{c}\right)^{a+1}, \qquad x \ge c \ge 1, \quad a \ge c-\frac{3}{2}, \quad (3).$$

Finalmente, de las desigualdades demostradas en (2) y (3), llegamos al resultado propuesto en nuestro problema.

Nuestra desigualdad probada en el problema anterior, es un caso más general de la desigualdad propuesta por mí, en el Problema 11016, publicado en la American Mathematical Monthly, Vol.110, N.5, May. 2003, cuando ponemos c = 1.

Nota.- Ya que la desigualdad demostrada en el problema 1, depende de los parámetros reales, a, b y c, un problema abierto interesante a resolver sería el siguiente :

¿ Entre qué intervalos deben tomarse a , b y c, y qué tipo de relaciones deben verificarse entre ellos, para que las cotas propuestas en nuestro problema sean las mejores posibles?

El siguiente problema que proponemos y resolveremos cae dentro del marco de la Geometría Elemental del triángulo, y, ha tenido una creación, proposición y resolución paulatina del mismo .

Problema 2

Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Denotamos por D, E y F a los puntos de tangencia de su círculo inscrito de incentro I , a sus lados BC, AB y AC, respectivamente.

Designamos por J al centro del cuadrado IEAF, y por K,G, y H , los puntos de intersección de la recta DF con las prolongaciones si son necesarias de el lado AB, la recta DE con el lado AC, y la recta FE con el lado BC, respectivamente.

Probar que :

a) Los triángulos JBG y JKC, son ambos rectángulos e isósceles.

b) Los puntos K, G, y H son colineales.

Demostración.

a) Método Sintético.

Demostraremos que los triángulos JBG, JKC, son ambos rectángulos e isósceles, en el vértice J. Por simetría en las construcciones geométricas basta que lo probemos para JBG, siendo el razonamiento similar para el segundo.

De otra parte, construimos el punto L, obtenido como la intersección de la bisectriz BI con la recta DE.

Los triángulos rectángulos AGE y LBE son semejantes. Luego entonces el ángulo B/2 es igual al ánguloAGE.Tenemos así que los dos triángulos rectángulos BEI y GAE son iguales, de este modo AG = BE.

De lo anterior consideramos ahora la igualdad de los triángulos GAJ y BEJ, y así tenemos que BJ =GJ. Y por consiguiente el triángulo BGJ es isósceles con lados iguales BJ = GJ.

Por último, demostremos que el triángulo JBG es rectángulo en el vértice, J.

En efecto:

Consideremos el ángulo $w =< AJG$ =<EJB.

Como sabemos que < AJE = $p/2$, entonces :

$$<GJB =(<AJE - <AJG) + <EJB = (p/2 - w) + w = p/2.$$

Por tanto, el triángulo JBG es rectángulo e isósceles en J. q**.q.d**

b) Método Analítico o Geometría con coordenadas .

De lo demostrado en el apartado a) sabemos que se tienen las siguientes igualdades entre las longitudes de los segmentos, EB = AG y AK = FC .Este hecho nos permitirá elegir el siguiente sistema de coordenadas cartesianas :
Tomamos los catetos AB y AC como loe ejes X e Y , respectivamente de nuestro sistema de referencia cartesiano, donde los vértices del triángulo dado, tienen como coordenadas, A(0,0), B(b,0) y C(c.0), con b distinto de c. Es decir, que el triángulo rectángulo dado no es isósceles..
De otra parte si r es radio del círculo inscrito al triángulo dado, tenemos para los puntos relevantes en el problema, las siguientes coordenadas :

E(r,0) , F(0,r) , G(0,r-c) y K(r-b,0), respectivamente.

Determinemos ahora las coordenadas del punto H. Como H es el punto de intersección de las rectas BC y EF , hallemos en primer lugar las ecuaciones de cada de estas rectas :

$$r(E,F) : \quad x + y = 0 \quad ; \quad r(B,C) : \quad bx + cy = bc. \quad (1).$$

El punto H se obtiene por construcción como intersección de las rectas r(E,F) y r(B,C), que es equivalente a resolver el sistema algebraico lineal de sus respectivas ecuaciones e incógnitas, y obtenemos que :

$$H\left(\frac{c(r-b)}{c-b},\frac{b(c-r)}{c-b}\right) \quad (2).$$

Calculemos ahora la recta que pasa por los puntos G y K, que es :

$$r(G,K) : \quad \frac{x}{r-b}+\frac{y}{r-c}=1. \quad (3).$$

Comprobemos que, los puntos G, K, y H están alineados o son colineales, sustituyendo las coordenadas de H , en la recta, r(G,K) . Esto es :

$$\frac{c(r-b)}{(r-b)(c-b)}+\frac{b(c-r)}{(r-c)(c-b)}=\frac{c-b}{c-b}=1. \quad (4).$$

Hemos de concluir de(4), que los puntos G, K y H están siempre alineados.**q.q.d**

Nota. En el caso de que el triángulo rectángulo dado ABC sea isósceles, esto es b = c, el resultado sigue siendo cierto con respecto a la colineación de los puntos G, K y H, ya que este último al ser la recta FE paralela a BC, H, es el punto del infinito.

Agradecimientos.

La solución geométrica de este problema propuesto y también resuelto por mí, junto con la solución con DERIVE siguiendo la línea del libro , junto con otras consideraciones y generalizaciones, salvo pequeñas modificaciones se debe a mi amigo y colega, Floro Damián Aranda Ballesteros, por su colaboración, ya que él, también quería aportar su granito de arena, en este homenaje a la memoria del Prof. Miguel de Guzmán Ozámiz.

Bibliografía.

[1] Miguel de Guzmán Ozámiz.: La experiencia de descubrir en Geometría, Editorial Nivola, Madrid, 2002.

[2] H. Minc and L. Sathre.: Some Inequalities involving $(r!)^{\frac{1}{r}}$, Proc. Edinburgh Math.Soc.14(1965/66), . 41-46.

[3] D.S. Mitrinovic.: Analytic Inequalities, Springer, Berlín, 1970.

[4] H. Alzer.: On some gamma function inequalities, Math.Comp.60(1993), 337-346

[5] H. Alzer.: On some inequalities for the gamma and psi functions, Math.Comp.66(1997), 373-389 .

[6] Juan Bosco Romero Márquez.: Mathematics Magazine, Problem 1657, Vol. 75, N.3, June 2002, 227.

[7] Juan Bosco Romero Márquez.: America Mathematical Monthly, Problem 11016, Vol. 110, N.5, May, 2003.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI