Problemas propuestos 141-145

Problema 141, propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España.

Sea $\binom{n}{i}$ un número combinatorio, $n, i \in \mathbb{N}; n \geq i$.Demostrar entonces que

$$\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \cdots \cdot \binom{n}{n}$$

y $e^{\frac{1}{2}n^2}$ son dos infinitos asintóticamente equivalentes, es decir,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{\frac{1}{2}n^2}}{\binom{n}{1} \cdot \binom{n}{2} \cdot \cdots \cdot \binom{n}{n}} = 1.$$

Problema 142, propuesto por José Luis Díaz Barrero, Barcelona, España

Sean a, b, c tres números positivos distintos de suma 1. Demostrar que

$$\frac{(a+bc)\,bc}{(a-b)\,(a-c)} + \frac{(b+ca)\,ca}{(b-a)\,(b-c)} + \frac{(c+ab)\,ab}{(c-a)\,(c-b)} < \frac{1}{3}.$$

Problema 143, propuesto por Ovidiu Furdui, Kalamazoo, USA

Sea $\ell \geq 0$ un número natural. Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n + 2\ell + 1) - \gamma\right),$$

siendo γ la constante de Euler-Mascheroni.

Problema 144, propuesto por Vicente Vicario García, Huelva, España

Dados los números α y β siguientes, probar o refutar que $\alpha = \beta$.

$$\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{13} + \sqrt{10 + 2\sqrt{13}} \\ \beta &= \sqrt{5 + 2\sqrt{3}} + \sqrt{18 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{65 - 26\sqrt{3}}}. \end{aligned}$$

***Problema 145, propuesto por José Hernández Santiago, Oaxaca, México**

Demostrar que existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$b \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \leq 4^{n+1} - a.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita: