Problema 145
Propuesto por José Hernández Santiago, Oaxaca, México

Demostrar que existen $a, b \in \mathbb{N}$ tales que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$b\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k} \leq 4^{n+1} - a\,.$$

Solución por Daniel Lasaosa Medarde, Pamplona, España
Hallaremos todos los pares de naturales (a,b) tales que se da la desigualdad del enunciado. Para n=0, es trivial comprobar que debe cumplirse

$$b\sum_{k=0}^{0}\binom{2k}{k} = b \leq 4^{0+1} - a = 4 - a\,; \qquad a + b \leq 4\,.$$

Comprobaremos que con tal de que se dé esta relación entre a y b, la desigualdad se cumple, dándose la igualdad, sólo para n=0, si y sólo si a+b=4.
El que la igualdad se da para n=0, si y sólo si a+b=4, se deduce trivialmente de lo visto hasta ahora. Es trivial comprobar que, para k>0,

$$\binom{2k}{k} < \sum_{m=0}^{2k}\binom{2k}{m} = 2^{2k} = 4^{k}\,.$$

Por lo tanto, para n>0,

$$b\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k} < b\sum_{k=0}^{n} 4^{k} = \frac{b}{3}\left(4^{n+1} - 1\right).$$

Por lo tanto, si b=3, y a=0 o 1, se cumple para n>0 que

$$b\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k} < 4^{n+1} - 1 \leq 4^{n+1} - a\,.$$

Si 0≤b≤2 y 0≤a≤4, se cumple para n>0 que

$$b\sum_{k=0}^{n}\binom{2k}{k} < \frac{2}{3}\left(4^{n+1} - 1\right) = 4^{n+1} - 4 - \frac{4^{n+1} - 10}{3} < 4^{n+1} - 4 \leq 4^{n+1} - a\,.$$

Luego siempre que a y b sean naturales tales que a+b≤4, se cumple estrictamente la desigualdad para todo n>0, y hemos terminado.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI