

**Problem 2**

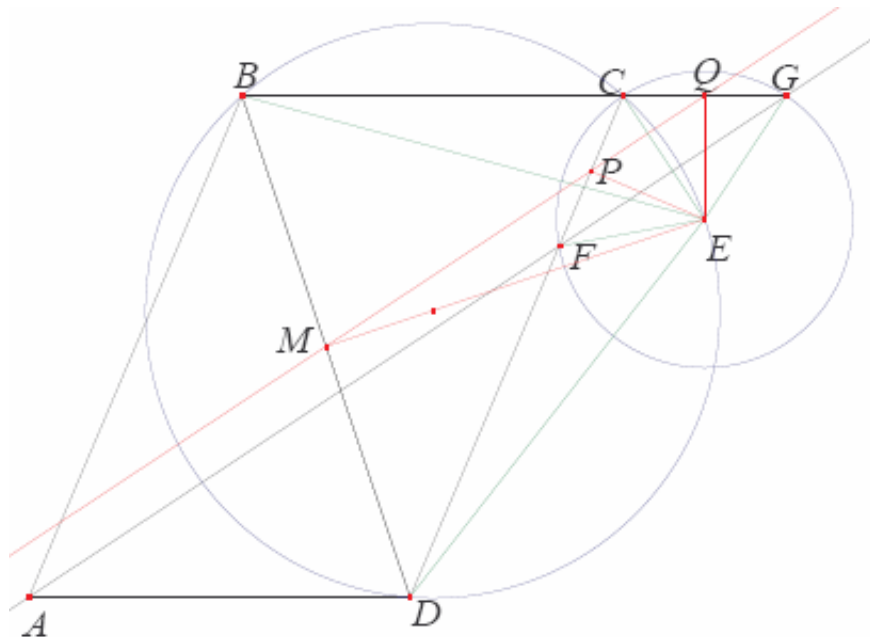
Consider five points  $A, B, C, D$  and  $E$  such that  $ABCD$  is a parallelogram and  $BCED$  is a cyclic quadrilateral. Let  $l$  be a line passing through  $A$ . Suppose that  $l$  intersects the interior of the segment  $DC$  at  $F$  and intersects line  $BC$  at  $G$ . Suppose also that  $EF=EC=EG$ . Prove that  $l$  is the bisector of angle  $\angle DAB$ .

Como  $\triangle CEF$  y  $\triangle CEG$  son isósceles por ser  $EC=EF=EG$ , los pies de las perpendiculares desde  $E$  sobre las rectas  $CD$  y  $BC$  son los puntos medios respectivos  $P$  y  $Q$  de  $CF$  y  $CG$ . La recta que pasa por ellos (recta de Simson de  $E$  con respecto a  $\triangle BCD$ , por estar  $E$  en la circunferencia circunscrita a  $\triangle BCD$ ), pasa también por el pie de la perpendicular desde  $E$  sobre  $BD$ . Ahora bien, por ser  $ABCD$  paralelogramo,  $\angle DAF=\angle CGF$ , mientras que  $\angle AFD=\angle GFC$  por construcción. Luego  $\triangle FAD$  y  $\triangle FGC$  son semejantes, con lo que

$$\frac{DF}{BC} = \frac{DF}{AD} = \frac{CF}{CG}, \quad \frac{DP}{CP} = \frac{DF + FP}{CP} = \frac{2DF + CF}{CF} = \frac{2BC + CG}{CG} = \frac{BC + CQ}{CQ} = \frac{BQ}{CQ},$$

$$\frac{DP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QB} \cdot \frac{BM}{MD} = 1,$$

donde  $M$  es el punto medio de  $BD$ . Luego la recta que pasa por  $P$  y  $Q$  corta a  $BD$  al mismo tiempo en el pie de la perpendicular a  $BD$  desde  $E$ , y en el punto medio de  $BD$ , con lo que ambos puntos coinciden y  $\triangle BED$  es isósceles en  $E$ , de donde  $BE=DE$ .



Por lo tanto, las potencias de  $B$  y  $D$  respecto de la circunferencia circunscrita a  $\triangle CFG$  son iguales, y

$$AD \cdot CG = BC \cdot CG = DF \cdot FC .$$

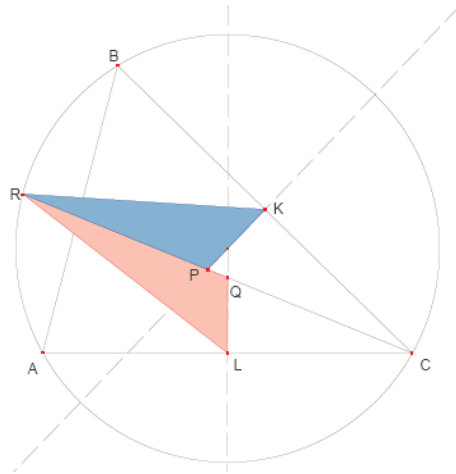
Luego unido a la relación hallada por la proporcionalidad de  $\triangle FAD$  y  $\triangle FGC$ , obtenemos que  $AD=DF$ ,  $CF=CG$ , de donde  $\triangle ADF$  es isósceles en  $D$ , y

$$\angle DAF = \frac{\pi - \angle ADF}{2} = \frac{\pi - \angle ADC}{2} = \frac{\angle DAB}{2},$$

qed, y donde se ha utilizado nuevamente que  $ABCD$  es paralelogramo.

#### Problem 4

In triangle  $ABC$  the bisector of angle  $\angle BCA$  intersects the circumcircle again at  $R$ , the perpendicular bisector of  $BC$  at  $P$ , and the perpendicular bisector of  $AC$  at  $Q$ . The midpoint of  $BC$  is  $K$  and the midpoint of  $AC$  is  $L$ . Prove that the triangles  $RPK$  and  $RQL$  have the same area.



**Solución de Daniel Lasosa Medarde, Pamplona, España**

Como  $\angle QLC$  es recto y  $\angle QCL=C/2$ , es obvio que

$$\angle RQL = \pi - \angle LQC = \angle QLC + \angle QCL = \frac{\pi}{2} + \frac{C}{2}.$$

Al mismo tiempo, nuevamente por ser  $\angle QLC$  recto y  $\angle QCL=C/2$ , y al ser  $L$  el punto medio de  $AC$ , aplicando el teorema del seno se obtiene que

$$\tan\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{QL}{LC} = \frac{2QL}{b},$$

luego

$$QL \operatorname{sen}(\angle RQL) = \frac{b}{2} \tan\left(\frac{C}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{b}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right).$$

De forma completamente análoga se obtiene que

$$PK \operatorname{sen}(\angle RPK) = \frac{a}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right).$$

Además,

$$\angle CAR = \angle CAB + \angle BAR = A + \angle BCR = A + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{A-B}{2},$$

$$CR = 2r \operatorname{sen}(\angle CAR) = 2r \cos\left(\frac{A-B}{2}\right),$$

donde  $r$  es el circunradio de  $ABC$ , mientras que

$$CQ = \frac{CL}{\cos\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{b}{2 \cos\left(\frac{C}{2}\right)}.$$

Luego

$$RQ \cos\left(\frac{C}{2}\right) = (CR - CQ) \cos\left(\frac{C}{2}\right) = 2r \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) - \frac{b}{2}.$$

Pero

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) &= \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) \\ &= \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B+C}{2}\right) + \cos\left(\frac{A}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{A}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right) \cos\left(\frac{C}{2}\right) \\ &= \frac{\operatorname{sen}(A)}{2} + \operatorname{sen}\left(\frac{B}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{A+C}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}(A) + \operatorname{sen}(B)}{2} = \frac{a+b}{4r}, \end{aligned}$$

luego

$$RQ \cos\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{a+b}{2} - \frac{b}{2} = \frac{a}{2}.$$

De forma enteramente análoga se obtiene que

$$RP \cos\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{b}{2}.$$

Luego

$$\begin{aligned} [RPK] &= \frac{1}{2} RP \cdot PK \operatorname{sen}(\angle RPK) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b}{2 \cos\left(\frac{C}{2}\right)} \cdot \frac{a}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right) = \frac{1}{8 \cos^2\left(\frac{C}{2}\right)} \cdot \frac{ab \operatorname{sen}(C)}{2} \\ &= \frac{[ABC]}{8 \cos^2\left(\frac{C}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2 \cos\left(\frac{C}{2}\right)} \cdot \frac{b}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{C}{2}\right) = RQ \cdot QL \operatorname{sen}(\angle RQL) = [RQL], \end{aligned}$$

qed.

### Problem 5

Let  $a$  and  $b$  be positive integers. Show that if  $4ab-1$  divides  $(4a^2-1)^2$ , then  $a=b$ .

**Solución de Daniel Lasosa Medarde, Pamplona, España**

Si  $4ab-1$  divide a  $(4a^2-1)^2=16a^4-8a^2+1$ , también dividirá a

$$2b^2(16a^4-8a^2+1)=32a^4b^2-16a^2b^2+2b^2=(4ab-1)(8a^3b+2a^2-4ab)+2(a-b)^2.$$

Como  $4ab-1$  es necesariamente impar, entonces ha de dividir a  $(a-b)^2$ . Luego siendo  $\rho$  el cociente en cuestión (que es obviamente no negativo al ser el cociente de un cuadrado entre un número que es mayor o igual que  $4-1=3$  por ser  $a$  y  $b$  positivos), se tiene que

$$a^2-2ab+b^2=\rho(4ab-1), \quad b^2-2ab(2\rho+1)+a^2+\rho=0.$$

Para un valor dado, entero no negativo cualquiera de  $\rho$ , consideremos esta última relación como una ecuación diofántica en  $a$  y  $b$ , y supongamos que tiene al menos una solución en enteros positivos  $(a,b)$ . Obviamente, si  $(a,b)$  es solución, también lo es  $(b,a)$  por simetría entre las variables. Es también trivial observar que, si tomamos la ecuación diofántica como de segundo grado en  $b$ , entonces la suma de las dos raíces es el entero positivo  $2a(2\rho+1)$ , mientras que el producto de las dos raíces es el entero positivo  $a^2+\rho$ , luego si una de las dos raíces es un entero positivo, entonces la otra también lo es. De todas las posibles soluciones, elijamos aquella que tiene un valor mínimo de  $a$  (esta solución existe ya que el conjunto de valores que toma  $a$  es un subconjunto no vacío de los enteros positivos). Entonces,  $b \geq a$ , pues en caso contrario,  $(b,a)$  sería una solución con un valor de  $a$  menor que el mínimo (absurdo). La ecuación cuadrática en  $b$  tiene entonces dos raíces enteras positivas no inferiores a  $a$ . Definiendo entonces  $c=b-a$ , se tiene que la ecuación cuadrática

$$0=(c+a)^2-2a(c+a)(2\rho+1)+a^2+\rho=c^2-4\rho ac-\rho(4a^2-1)$$

debe tener dos raíces enteras no negativas. Pero el producto de dichas raíces es  $-\rho(4a^2-1)$ , que no es positivo. Luego ha de ser nulo, y como  $4a^2-1 \geq 3$ , necesariamente ha de ser  $\rho=0$ , con lo que la ecuación diofántica se transforma en  $(a-b)^2=0$ , con solución única  $a=b$ , qed.

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

[http://www.campus-oei.org/oim/revista\\_oim/](http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/)

Edita:

