

Problema 143: sea $\ell \geq 0$ un número natural. Calcular

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n + 2\ell + 1) - \gamma \right),$$

donde γ es la constante de Euler-Mascheroni.

Solución: sumemos los términos $2k - 1$ y $2k$. Así,

$$\begin{aligned} & (-1)^{2k-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \ln(2k-1 + 2\ell + 1) - \gamma \right) + \\ & + (-1)^{2k} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2k} - \ln(2k + 2\ell + 1) - \gamma \right) = \\ & = \frac{1}{2k} + \ln(2k + 2\ell) - \ln(2k + 2\ell + 1) \end{aligned}$$

De esta manera, la suma propuesta, si la llamamos S , puede escribirse como

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2k} + \ln(2k + 2\ell) - \ln(2k + 2\ell + 1) \right)$$

Para ver cuanto vale esta suma, veremos primero como expresar una suma parcial S_n de los primeros n términos e intentaremos después calcular el límite para $n \rightarrow \infty$. Así,

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} + \sum_{k=1}^n \ln(2k + 2\ell) - \sum_{k=1}^n \ln(2k + 2\ell + 1)$$

Recordemos en este punto que la constante de Euler-Mascheroni se define como

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

Así, sumando y restando $\frac{1}{2} \ln n$ a S_n obtenemos

$$S_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right) + \frac{1}{2} \ln n + \sum_{k=1}^n \ln(2k + 2\ell) - \sum_{k=1}^n \ln(2k + 2\ell + 1)$$

Vemos claramente que el primer sumando de esta nueva expresión tiende a $\frac{\gamma}{2}$, luego el problema se reduce a calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \ln n + \sum_{k=1}^n \ln(2k + 2\ell) - \sum_{k=1}^n \ln(2k + 2\ell + 1) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{(2k + 2\ell)}{(2k + 2\ell + 1)}$$

Ahora intentaremos expresar este producto en una forma más cerrada para n . Si lo observamos, notemos que multiplicando y dividiendo por el numerador obtenemos, mediante algunas manipulaciones, expresiones que sólo dependen de factoriales:

$$\begin{aligned} \prod_{k=1}^n \frac{(2k+2\ell)}{(2k+2\ell+1)} &= \frac{[(2+2\ell)(4+2\ell)\cdots(2n+2\ell)]^2}{(2+2\ell)(2+2\ell+1)(4+2\ell)\cdots(2n+2\ell)(2n+2\ell+1)} = \\ &= \frac{\left[2^n \frac{(\ell+n)!}{\ell!}\right]^2}{\frac{(2n+2\ell+1)!}{(2\ell+1)!}} = \frac{2^{2n}(2\ell+1)![(n+\ell)!]^2}{[\ell!]^2(2n+2\ell+1)!} \end{aligned}$$

Si ahora volvemos al límite que teníamos, usando las propiedades del logaritmo tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{(2k+2\ell)}{(2k+2\ell+1)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{(2\ell+1)!}{\ell!^2} \cdot \frac{2^{2n}(n+\ell)!^2 \sqrt{n}}{(2n+2\ell+1)!} \right] = \\ &= \ln \frac{(2\ell+1)!}{\ell!^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2^{2n}(n+\ell)!^2 \sqrt{n}}{(2n+2\ell+1)!} \end{aligned}$$

Esto último podemos hacerlo porque el primer sumando no depende de n , luego puede salir fuera del límite. Ahora, observemos que en la expresión que nos ha quedado tenemos varios factoriales, una exponencial y un factor \sqrt{n} . Esto nos motiva a usar la fórmula de Stirling para los factoriales. Recordemos que esta fórmula nos dice que si x es entero y suficientemente grande entonces

$$\Gamma(x+1) = x! \approx \sqrt{2\pi x} x^x e^{-x},$$

donde Γ representa la *función gamma de Euler*. Por claridad en la exposición, tendremos en cuenta tan sólo el cociente para el cálculo, de manera que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}(n+\ell)!^2 \sqrt{n}}{(2n+2\ell+1)!} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} [e^{-n-\ell}(n+\ell)^{n+\ell} \sqrt{2\pi(n+\ell)}]^2 \sqrt{n}}{e^{-2n-2\ell-1} (2n+2\ell+1)^{2n+2\ell+1} \sqrt{2\pi(2n+2\ell+1)}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n} e^{-2n-2\ell} (n+\ell)^{2n+2\ell} 2\pi(n+\ell) \sqrt{n}}{e^{-2n-2\ell-1} (2n+2\ell+1)^{2n+2\ell+1} \sqrt{2\pi(2n+2\ell+1)}} \end{aligned}$$

Ahora, multiplicamos y dividimos por $2^{2\ell}$ y reunimos convenientemente los términos, de forma que cada uno de los límites sea fácil de resolver, y obtenemos:

$$\frac{e}{2^{2\ell}} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2\ell}{2n+2\ell+1} \right)^{2n+2\ell} \frac{2\pi(n+\ell)\sqrt{n}}{(2n+2\ell+1)\sqrt{2\pi(2n+2\ell+1)}}$$

Es ahora trivial ver que la primera fracción tiende a $\frac{1}{e}$ y la segunda a $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, por lo cual el cociente entero tiende a $\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\ell+1}}$. Volviendo atrás,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{(2k+2\ell)}{(2k+2\ell+1)} &= \ln \frac{(2\ell+1)!}{\ell!^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{2^{2n}(n+\ell)!^2 \sqrt{n}}{(2n+2\ell+1)!} \implies \\ \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{n} \prod_{k=1}^n \frac{(2k+2\ell)}{(2k+2\ell+1)} &= \ln \frac{(2\ell+1)!}{\ell!^2} + \ln \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\ell+1}} = \ln \frac{(2\ell+1)! \sqrt{\pi}}{\ell!^2 2^{2\ell+1}} \end{aligned}$$

Y por fin para acabar,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\gamma}{2} + \ln \frac{(2\ell+1)! \sqrt{\pi}}{\ell!^2 2^{2\ell+1}}$$

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

<http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/>

Edita:

