Algunas técnicas de resolución de ecuaciones funcionales en problemas de Olimpiada (II): Funciones enteras de variable entera

En esta lección de preparación olímpica se pretende presentar e ilustrar con ejemplos algunas de las técnicas básicas de resolución de ecuaciones funcionales, o de técnicas para utilizar en problemas de Olimpiada en los que una ecuación funcional juega un papel clave. En esta segunda entrega, consideramos el caso de funciones de variable entera que toman valores enteros, después de haber estudiado en la primera el caso de funciones reales de variable real.

1.- Técnicas comunes a las funciones reales de variable real

Las funciones enteras de variable entera suelen tener rasgos particulares que las distinguen de las funciones reales de variable real, en el sentido de que algunas técnicas que se usan en las segundas no sirven para las primeras, o de que las primeras pueden disponer de técnicas específicas que no tienen sentido en las segundas. Sin embargo, las técnicas utilizadas en la resolución de ecuaciones funcionales sobre funciones reales de variable real también pueden ser muy útiles en el caso de funciones enteras de variable entera; si bien no siempre nos van a proporcionar la solución, si pueden simplificar mucho la ecuación a tratar, o por lo menos ofrecer resultados que nos permitan caracterizar o realizar hipótesis sobre la función solución buscada.

Comenzamos pues esta segunda parte de la lección de preparación olímpica presentando algunos casos de resolución de ecuaciones funcionales con funciones objetivo enteras de variable entera, en los cuáles las técnicas presentadas para las funciones reales de variable real, bien llevan directamente a la solución, bien permiten simplificar el problema hasta el punto de hacerlo “casi trivial”. Así, el problema 6 de la XXXVI Olimpiada Matemática Española (2000) se puede resolver utilizando sustituciones:

Demuestra que no existe ninguna función f:ℕ→ℕ que cumpla $f(f(n))=n+1$.

Asumimos que ℕ={1,2,3,…} (la demostración sería análoga si incluimos el 0 en el conjunto de los naturales), y suponemos que existe una tal función. Sustituyendo n por $f(m)$ para cualquier m natural, dependiendo de si lo tomamos como la función aplicada a $f(f(m))$, o como la función aplicada dos veces a $f(m)$, tenemos

$$f(m+1)=f\left(f\left(f(m)\right)\right)=f(m)+1.$$

Se puede entonces demostrar fácilmente por inducción que

$$f(n+1)=f(1)+n.$$

El resultado es trivialmente cierto para n=1 (nos basta hacer m=1 en la ecuación hallada), y si es cierto para n−1, entonces

$$f(n+1)=f(n)+1=f\left((n-1)+1\right)+1=n-1+f(1)+1=n+f(1).$$

Luego

$$n+1=f\left(f(n)\right)=f(n)-1+f(1)=n-1+f(1)-1+f(1)=n-2+2f(1).$$

Luego $f(1)=3/2$, que es absurdo porque $f(1)$ debe ser natural. Luego no existe ninguna función con la propiedad pedida.

El problema 3 de la XL Olimpiada Matemática Española (2004) se puede resolver también utilizando técnicas conocidas para las funciones reales de variable real. Se presenta una solución que utiliza fundamentalmente sustituciones de los valores de las variables, inyectividad y suprayectividad:

Se representa por ℤ el conjunto de todos los enteros. Hallar todas las funciones f:ℤ→ℤ tales que para cualesquiera x, y enteros se verifica:

$$f(x+f(y))=f(x)-y.$$

Haciendo x=0, se tiene que, para todo entero y,

$$f\left(f(y)\right)=f(0)-y.$$

De esta relación se deduce inmediatamente que f es inyectiva (pues si $f(x)=f(y)$, entonces $f(0)-x=f(0)-y$, luego $x=y$), y además que f es suprayectiva (nos basta tomar, para cualquier entero z, $y=f(0)-z$ en la relación hallada para comprobar que $f(f(0)-z)$ tiene por imagen z). Por lo tanto, existe un único λ tal que $f(\lambda)=0$, con lo que haciendo $y=\lambda$ en la ecuación original, se tiene que $f(x)=f(x)-\lambda$, con lo que queda probado que $\lambda=0$, y $f(0)=0$, siendo además $f(f(y))=-y$. Ahora bien, haciendo $x=f(-y)$ en el enunciado, se tiene que

$$0=y-y=f\left(f\left(-y\right)\right)-y=f\left(f\left(-y\right)+f\left(y\right)\right),$$

que por inyectividad nos lleva a que $f(-y)+f(y)=0$, es decir, $f(-y)=-f(y)$ para todo entero y. Procedemos ahora por inducción para demostrar que, para todo entero no negativo n,

$$f\left(x+nf\left(y\right)\right)=f\left(x\right)-ny\,.$$

La relación es trivialmente cierta para $n=0$, y está dada en el enunciado para $n=1$. Si se cumple para $n=m-1$, entonces se cumple para m:

$$\begin{aligned}f\left(x+mf\left(y\right)\right)&=f\left(x+\left(m-1\right)f\left(y\right)+f\left(y\right)\right)=f\left(x+\left(m-1\right)f\left(y\right)\right)-y\\&=f\left(x\right)-\left(m-1\right)y-y=f\left(x\right)-my.\end{aligned}$$

Luego se cumple para todo entero no negativo. En particular, si x toma un valor entero positivo cualquiera m, entonces haciendo $n=m$ en la relación demostrada,

$$f\left(m+mf\left(y\right)\right)=f\left(m\left(1+f\left(y\right)\right)\right)=f\left(m\right)-my\,.$$

Ahora bien, por la suprayectividad de f, existe un entero ρ tal que $f(\rho)=-1$, con lo que

$$0=f\left(0\right)=f\left(m\left(1+f\left(\rho\right)\right)\right)=f\left(m\right)-m\rho\,;\qquad\qquad f\left(m\right)=m\rho\,.$$

Nótese que esta relación es válida para todo m no negativo, pero si m es negativo, entonces $-m$ es positivo, con lo que $f(m)=f(-(-m))=-f(-m)=m\rho$, y la relación también se cumple. Se tiene entonces que, para todo entero y,

$$-y=f\left(f\left(y\right)\right)=f\left(\rho y\right)=\rho^2 y\,,\qquad\qquad \rho^2=-1\,.$$

Pero esta última relación es imposible para ρ entero, con lo que no existe ninguna función con las características dadas en el enunciado, y hemos terminado.

Combinando las técnicas de sustitución e inyectividad, se simplifica considerablemente el problema 3 de la VIII Olimpiada Iberoamericana de Matemática (1993). Este problema se puede finalizar utilizando la acotación superior e inferior:

Sea $\mathbb{N}^*=\{1,2,3,\ldots\}$. Halle todas las funciones $f:\mathbb{N}^*\rightarrow\mathbb{N}^*$ tales que:

i. Si $x>y$ entonces $f(x)>f(y)$,

ii. $f(yf(x))=x^2\cdot f(xy)$, para todos x,y en $\mathbb{N}^*$.

La función es obviamente inyectiva, pues si $f(x)=f(y)$, no puede ser ni $x>y$, ni $y>x$, luego es $x=y$. Es entonces trivial constatar que, haciendo $x=1$, ha de ser $f(yf(1))=f(y)$, luego $f(1)=1$. Sustituyendo además y, primero por 1, y luego por $f(z)$ para cualquier natural z, en la condición ii, se tiene que, para todo x y para todo z,

$$f\left(f\left(x\right)\right)=x^2 f\left(x\right),$$

$$f\left(f\left(z\right)f\left(x\right)\right)=x^2 f\left(xf\left(z\right)\right)=\left(xz\right)^2 f\left(xz\right)=f\left(f\left(xz\right)\right),$$

luego al ser f inyectiva, es $f(xz)=f(x)f(z)$.

Ahora supongamos que $f(x)>x^2$. Entonces,

$$x^2 f\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)>f\left(x^2\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2, \qquad f\left(x\right)<x^2,$$

llegándose a una contradicción. De forma similar, supongamos que $f(x)<x^2$. Entonces,

$$x^2 f\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)<f\left(x^2\right)=\left(f\left(x\right)\right)^2, \qquad f\left(x\right)>x^2,$$

nuevamente contradictorio. Luego sólo podría ser $f(x)=x^2$ para todo x. Pero esta función es obviamente creciente estrictamente, y además hace que ambos miembros en la condición ii sean iguales a x^4y^2, luego es solución, y es la única.

Otra técnica que también se vio en la primera lección, y que puede ser muy interesante también para funciones enteras de variable entera, es la de doble acotación. En el caso de funciones enteras de variable entera, esta acotación puede ser incluso más potente, ya que al poder tomar la función sólo valores enteros, si sabemos que $f(n)>m$ para enteros n y m cualesquiera, entonces $f(n)\geq m+1$. Esta técnica se ilustra con ayuda del problema 1 de la XXIII Olimpiada Matemática Internacional (1982):

La función $f(n)$ está definida para todos los enteros positivos n y toma valores enteros no negativos. Además, para cualesquiera m,n,

$$f(m+n)-f(m)-f(n)=0 \text{ o } 1,$$

$$\boldsymbol{f(2)=0, \quad f(3)>0, \quad f(9999)=3333.}$$

Determine *f*(1982).

Se comprueba fácilmente que $f(1)=0$, $f(3)=1$:

$$0=f(2)=2f(1)+0 \text{ o } 1, \qquad 0\le f(1)\le 0, \qquad f(1)=0;$$

$$0<f(3)=f(2)+f(1)+0 \text{ o } 1=0 \text{ o } 1, \qquad f(3)=1.$$

Se puede comprobar también fácilmente por inducción que, dado cualquier entero positivo p, y para cualquier entero positivo m, es $f(mp)\ge mf(p)$, dándose la igualdad si y sólo si $f(np)=nf(p)$ para todo $n=1,2,\dots,m$. Este resultado es trivialmente cierto para $m=1$. Si es cierto para $m=n-1$, entonces

$$\begin{aligned} f(np)&=f((n-1)p+p)=f((n-1)p)+f(p)+0 \text{ o } 1\ge f((n-1)p)+f(p)\\ &\ge (n-1)f(p)+f(p)=nf(p), \end{aligned}$$

Dándose la igualdad en la última desigualdad si y sólo si $f(np)=nf(p)$ para todo $n=1,2,\dots,m-1$ por hipótesis de inducción. Por lo tanto, como $f(3)=1$, y

$$3333=3333f(3)\le f(9999)=3333,$$

entonces se tiene que $f(3m)=mf(3)=m$ para todo $m=1,2,3,\dots,3333$, de donde se deduce que $f(1983)=f(3\cdot 661)=661$, luego $f(1982)=f(1983)-f(1)-0$ o $1=660$ o 661. Ahora bien,

$$3304=f(3\cdot 3304)=f(9912)=f(9910)+f(2)+0 \text{ o } 1\ge f(9910),$$

$$3304\ge f(9910)=f(5\cdot 1982)\ge 5f(1982),$$

$$f(1982)\le\frac{3304}{5}<\frac{3305}{5}=661.$$

Luego $f(1982)=660$.

Las técnicas basadas en la acotación pueden ser extraordinariamente potentes teniendo en cuenta propiedades específicas de los números enteros. El siguiente ejemplo pone de relevancia dos de ellas: la existencia de un mínimo o máximo en todo conjunto acotado inferior o superiormente de enteros, y el hecho de que dos enteros distintos tienen diferencia como mínimo de 1. Ambas propiedades se utilizan en esta solución del problema 6 de la XIX Olimpiada Matemática Internacional (1977):

Sea $f(n)$ una función definida sobre los enteros positivos y tomando valores enteros positivos. Demuestre que si

$$f(n+1)>f(f(n))$$

para cada entero positivo n, entonces

$$f(n)=n \quad \text{para cada } n.$$

Definiremos el conjunto F_m como $\{f(m),f(m+1),f(m+2),\dots\}$, y demostraremos por inducción que $f(m)$ es el único mínimo de F_m (el que todo F_m tiene mínimo es consecuencia trivial de ser un conjunto de enteros positivos, y por lo tanto acotado inferiormente – la unicidad de cada uno de estos mínimos se demuestra a lo largo de la solución que aquí se presenta).

El resultado es relativamente obvio para $m=1$, ya que para cualquier $n>1$, $f(n)>f(f(n-1))$, estando trivialmente $f(f(n-1))$ en F_1, pues F_1 contiene a todas las posibles imágenes de f, con lo que el mínimo no puede ser ningún $f(n)$ con $n>1$, y el único mínimo es $f(1)$.

Supongamos que el resultado es cierto hasta m. Entonces, $f(m)\geq m$, ya que al ser $f(p)$ el único mínimo de F_p para todo $p=1,2,\dots,m$, entonces es $f(1)<f(2)<f(3)<\dots<f(m)$, y por ser enteros, $f(1)\leq f(2)-1\leq f(3)-2\leq\dots\leq f(m)-(m-1)$. Pero como $f(1)\geq 1$ por ser entero positivo, es $f(m)\geq m$. Supongamos que $n>m+1$, con lo que $f(n-1)$ está en F_{m+1}, al ser $n-1\geq m+1$. Pero entonces, $f(n-1)>m$, ya que si está en F_{m+1}, también está en F_m, y además es mayor que $f(m)$, que era el único mínimo de F_m. Luego $f(n-1)\geq m+1$, con lo que $f(f(n-1))$ está en F_{m+1}, y al ser $f(n)>f(f(n-1))$, $f(n)$ no puede ser mínimo de F_{m+1}. Luego el único mínimo de F_{m+1} sólo puede ser $f(m+1)$, y hemos acabado esta demostración.

De la demostración se deduce trivialmente que, si $n>m$, entonces $f(n)>f(m)$, al ser $f(m)$ el único mínimo de F_m, estando $f(n)$ incluido en este conjunto. Supongamos entonces que $f(n)>n$. Pero entonces, $f(n)\geq n+1$, con lo que $f(f(n))\geq f(n+1)>f(f(n))$, que es absurdo. Luego $f(n)\leq n$. Supongamos finalmente que $f(n)<n$. Al ser entero, entonces $f(n)\leq n-1$. Pero como $f(n)>f(n-1)>\dots>f(1)$, y al ser enteros esto significa que $f(n)\geq f(n-1)+1\geq f(n-2)+2\geq\dots\geq f(1)+(n-1)$, entonces $f(1)\leq f(n)-(n-1)\leq 0$. Pero $f(1)$ es entero positivo, luego llegamos nuevamente a una contradicción. Luego sólo puede ser $f(n)=n$ para cada n, que además cumple trivialmente la condición propuesta en el enunciado, al ser $f(n+1)=n+1>n=f(n)=f(f(n))$.

La técnica del punto fijo es también aplicable en ciertos casos, como por ejemplo en la resolución del problema 3 de la XXXVII Olimpiada Matemática Internacional (1996):

Sea S el conjunto de los enteros no negativos. Encuentre todas las funciones f:$S\to S$ tales que

$$f\left(m+f\left(n\right)\right)=f\left(f\left(m\right)\right)+f\left(n\right), \qquad \forall m,n\in S.$$

Sustituyendo m=n=0, se encuentra que $f(f(0))$=$f(f(0))$+$f(0)$, de donde $f(0)$=0. Haciendo entonces n=0 en la ecuación original, se tiene que

$$f\left(m\right)=f\left(m+f\left(0\right)\right)=f\left(f\left(m\right)\right)+f\left(0\right)=f\left(f\left(m\right)\right),$$

Es decir, $f(m)$ es punto fijo de m para cualquier entero no negativo m. Como todas las imágenes de la función son puntos fijos, si no existen puntos fijos positivos, entonces el único punto fijo, y por lo tanto el único valor que toma la función, es 0, dándonos la solución trivial $f(n)$=0 para todo n.

Si por el contrario existen puntos fijos mayores que 0, entonces existe un punto fijo positivo mínimo, que llamaremos m. Veremos en primer lugar que, para cualquier entero no negativo a, $f(am)$=am, es decir, am es punto fijo para todo entero no negativo a. Esto se demuestra fácilmente por inducción, siendo el resultado trivialmente cierto cuando a=0, y consecuencia directa de la definición de m cuando a=1. Si es cierto para a−1, entonces haciendo n=$(a-1)m$ en la ecuación inicial, se tiene

$$\begin{aligned}f\left(am\right)&=f\left(m+\left(a-1\right)m\right)=f\left(m+f\left(\left(a-1\right)m\right)\right)=f\left(f\left(m\right)\right)+f\left(\left(a-1\right)m\right)\\&=m+\left(a-1\right)m=am,\end{aligned}$$

donde se ha usado que m y $(a-1)m$ son puntos fijos por hipótesis de inducción. Sea ahora cualquier entero n=am+b, donde b es un resto módulo m ($b\in\{0,1,2,\ldots,m-1\}$). Demostraremos que si n es un punto fijo, entonces b=0, es decir, que no hay más puntos fijos de f que los múltiplos enteros positivos de m. Para ello, consideraremos que, al ser $f(b)$ punto fijo por ser imagen de f, y am por ser múltiplo de m, entonces sustituyendo m por b, y n por am en la ecuación dada en el enunciado,

$$n=am+b=f\left(b+am\right)=f\left(b+f\left(am\right)\right)=f\left(f\left(b\right)\right)+f\left(am\right)=f\left(b\right)+am,$$

$$b=f\left(b\right).$$

Ahora bien, como $b<m$ y m es el menor punto fijo positivo, entonces $b=0$. Demostraremos también que, para cualquier a no negativo y b resto módulo m,

$$f(am+b)=am+f(b),$$

ya que utilizando que $f(b)$ y am son puntos fijos de f, se tiene que

$$f(am+b)=f(b+f(am))=f(f(b))+f(am)=am+f(b).$$

Finalmente, demostraremos que, con tal de que $f(b)$ sea un entero positivo múltiplo de m (y por lo tanto un punto fijo de f), la función está bien definida y cumple con la condición del enunciado. Para ello, escribimos $u=am+b$, $v=cm+d$ para u y v enteros no negativos cualesquiera, donde b y d son restos módulo m, y a y c son enteros no negativos. Entonces, $f(b)=pm$, $f(d)=qm$, para algunos enteros no negativos p y q, y

$$\begin{aligned} f(u+f(v)) &= f(am+b+cm+qm)=f((a+c+q)m+b)=(a+c+q)m+f(b) \\ &= am+f(b)+cm+f(d)=f(am+b)+f(cm+d)=f(u)+f(v) \\ &= f(f(u))+f(v), \end{aligned}$$

y hemos demostrado que todas las funciones con la forma definida son solución del problema, y no hay otras. Es decir, las soluciones son todas las funciones tales que, para algún m (fijo para cada solución, pero pudiendo tomar en principio cualquier valor), escribimos cualquier entero no negativo como $n=am+b$, donde a es un entero no negativo y b cualquier resto módulo m $(0,1,2,\ldots,m-1)$. Entonces, $f(n)=am+f(b)$, donde $f(b)$ es un entero no negativo múltiplo de m, con la única restricción de que $f(0)=0$.

2.- Definición de funciones auxiliares

La idea principal detrás de esta técnica es la simplificación de la ecuación a través de la definición de una función auxiliar, resultado de aplicar alguna operación o transformación sobre la función a hallar, de forma que esta última satisface la ecuación funcional dada, si y sólo si la función auxiliar satisface una ecuación funcional más sencilla, resolviéndose entonces esta segunda. Si bien esta técnica no se ilustró a través de su uso con funciones reales de variable real, también sería aplicable a estas.

Se ilustra esta técnica a través de una posible solución del problema 5 de la XXXIV Olimpiada Matemática Española (1998):

Hallar todas las funciones f:ℕ→ℕ estrictamente crecientes y tales que

$$f(n+f(n))=2f(n)$$

para n=1,2,3,…

Si definimos la función auxiliar $g(n)=f(n)-n$, se tiene que, para todo entero positivo n,

$$g\left(n+f\left(n\right)\right)=f\left(n+f\left(n\right)\right)-n-f\left(n\right)=f\left(n\right)-n=g\left(n\right).$$

Ahora bien, como la función f es estrictamente creciente, $f(n)>f(n-1)$, y como ambos deben ser enteros, entonces $f(n)-f(n-1)\geq 1=n-(n-1)$, es decir, $g(n)\geq g(n-1)$, dándose la igualdad si y sólo si $f(n)$ y $f(n-1)$ son enteros consecutivos. Se demuestra fácilmente por inducción que, para todo entero positivo m, $g(n+m)\geq g(n)$, dándose la igualdad si y sólo si $g(n+p)=g(n)$ para todo $p=1,2,\ldots,m$. La hipótesis de inducción ha sido ya demostrada para $m=1$, y si es cierta para $m-1$, entonces $g(n+m)\geq g(n+m-1)\geq g(n)$, siendo cierta la segunda desigualdad si y sólo si $g(n+p)=g(n)$ para todo $p=1,2,\ldots,m-1$, es decir, siendo el primer y el tercer términos iguales si y sólo si $g(n+p)=g(n)$ para todo $p=1,2,\ldots,m$. Sea entonces la sucesión definida por $n_{m+1}=n_m+f(n_m)$ para $m\geq 1$, siendo $n_1=1$. Como $g(n)=g(n+f(n))$, es trivial que $g(n_m)=g(n_1)$ para todo entero positivo m. Como además la sucesión $\{n_i\}$ es una sucesión estrictamente creciente de enteros ($f(n)$ es un entero positivo para todo n), entonces no está acotada, y para todo N, existe un $n_i\geq N$, con lo que al ser $g(n_i)=g(n_1)$, es $g(N)=g(1)$ para todo entero positivo N, es decir, g es constante. Luego como g toma un valor entero constante k, entonces $f(n)=n+k$. Como f toma valores enteros positivos cuando n toma valores enteros positivos, k debe ser no negativo (en caso contrario $f(1)$ sería no positivo). Sustituyendo esta expresión en la ecuación dada, se obtiene que

$$f\left(n+f\left(n\right)\right)=f\left(2n+k\right)=2n+2k=2\left(n+k\right)=2f\left(n\right),$$

con lo que k puede tomar cualquier valor entero no negativo, y hemos acabado.

3.- Expresión del conjunto de imágenes como unión de subconjuntos disjuntos

En principio esta técnica no es exclusiva de funciones enteras de variable entera, pero puede resultar más sencilla de utilizar cuando el conjunto de valores que toma la imagen es discreto (caso de enteros y racionales). La idea principal es comprobar que el conjunto de imágenes (que puede ser desconocido a priori) puede dividirse, mediante alguna condición aplicada a la función, en diferentes subconjuntos disjuntos, para a través de las propiedades de dichos conjuntos, poder acotar las soluciones, o bien probar o refutar hipótesis acerca del conjunto de valores que toma la función. También puede utilizarse esta técnica de otra forma: dividiendo ciertos conjuntos de enteros (o todos ellos), en diferentes conjuntos disjuntos, según sean o no imágenes de la función, y a partir nuevamente de propiedades de estos conjuntos o de sus elementos, llegar a comprobar cuáles sí podrían ser imágenes de la función, cuáles no, o simplemente probar o refutar hipótesis acerca de dichos valores.
Un caso en el que la división del conjunto de los enteros en dos conjuntos disjuntos se presenta en la siguiente solución del problema 3 de la XX Olimpiada Matemática Internacional (1978), aunque en este caso es el propio enunciado el que impone esta división:

El conjunto de los enteros positivos es la unión de dos subconjuntos disjuntos $\{f(1),f(2),\dots,f(n),\dots\}$, $\{g(1),g(2),\dots,g(n),\dots\}$, donde

$$f(1)<f(2)<\dots<f(n)<\dots,$$

$$g(1)<g(2)<\dots<g(n)<\dots,$$

y

$$g(n)=f(f(n))+1 \quad \text{para todo } n\geq 1.$$

Determine $f(240)$.

Sean F y G los conjuntos de las imágenes de f y g, respectivamente. Obviamente, un entero pertenece a F si y sólo si no pertenece a G. Es también obvio que, si un entero positivo m pertenece a G, ni $m+1$ ni $m-1$ pertenecen a G. Para ello, es trivial comprobar que, si m pertenece a G, existe un entero positivo n tal que $m-1=g(n)-1=f(f(n))$, luego $m-1$ pertenece a F. Entonces, si $m+1$ perteneciera a G, entonces $(m+1)-1=m$ no podría pertenecer a G. Es también obvio que 1 no puede pertenecer a G, pues entonces existiría un entero positivo n tal que $0=g(n)-1=f(f(n))$, que es absurdo ya que 0 no pertenece ni a F ni a G. Luego $f(1)=1$, ya que 1 es el mínimo de F, y $g(1)=f(f(1))+1=2$. Como no puede haber dos enteros consecutivos en G, entonces 3 está en F, y es el menor elemento de F distinto de $f(1)=1$, con lo que $f(2)=3$.

Sea ahora, para cualquier entero positivo n, $f(n)=m$. Entonces, $g(n)=f(m)+1$. Ahora bien, hay n valores en G menores o iguales que $g(n)$, que son obviamente $g(1),g(2),\ldots,g(n)$, y m valores en F menores que $f(m)+1$, que son $f(1),f(2),\ldots,f(m)$, ya que $f(m+1)\geq f(m)+1$ pertenece a G, y no a F. Además, como $f(p)>f(m+1)$ para todo $p>m$, entonces hay exactamente m valores en F menores que $f(m)+1$, y como $g(p)>g(n)=f(m)+1$, hay exactamente n valores en G menores o iguales que $f(m)+1$, con lo que hay $m+n$ valores en $F\cup G$ menores o iguales que $f(m)+1$. Luego al ser $F\cup G$ igual al conjunto de los enteros positivos, y ser F y G disjuntos, entonces $f(m)+1=m+n$, y $f(m)=m+n-1$ donde $m=f(n)$. Se tiene entonces que

$$f(3)=3+2-1=4, \qquad f(4)=4+3-1=6, \qquad f(6)=6+4-1=9,$$

$$f(9)=9+6-1=14, \qquad f(14)=14+9-1=22, \qquad f(22)=22+14-1=35,$$

$$f(35)=35+22-1=56, \qquad f(56)=56+35-1=90, \qquad f(90)=90+56-1=145,$$

$$f(145)=145+90-1=234.$$

Ahora bien,

$$g(35)=f(f(35))=f(56)+1=91,$$

con lo que 92 está en F, y al ser el menor elemento de F mayor que $f(56)$, es $f(57)$, luego

$$f(57)=92, \qquad f(92)=92+57-1=148, \qquad f(148)=148+92-1=239,$$

$$f(239)=239+148-1=386, \qquad g(148)=f(f(148))+1=f(239)+1=387,$$

y al ser 388 el menor elemento de F (pues no puede estar en G) que es mayor que $f(239)$, entonces es $f(240)$, luego el resultado buscado es $f(240)=388$.

Esta técnica se aplica también en una posible solución al problema 4 de la XXVII Olimpiada Matemática Internacional (1987), tomándose las imágenes de un conjunto de valores de la variable, y razonándose sobre su paridad:

Demuestre que no existe ninguna función *f* del conjunto de los enteros no negativos en sí mismo tal que, para cada *n*, $f(f(n))=n+1987$.

Supongamos que existe una tal función f. En primer lugar, es trivial constatar que la función es inyectiva, ya que si $f(n)=f(m)$, entonces $n+1987=m+1987$. Luego dado cualquier conjunto X de enteros no negativos, X y $f(X)$ tienen mismo cardinal (número de elementos), definiéndose

$$f(X)=\{f(x)|x\in X\}.$$

Ahora bien, es también sencillo constatar que

$$f(n)+1987=f(f(f(n)))=f(n+1987),$$

donde se ha entendido el término del medio, bien como la función aplicada dos veces a $f(n)$, bien como la función aplicada a $f(f(n))=n+1987$. Sería entonces sencillo, a partir de los valores de $f(A)$, donde $A=\{0,1,2,\ldots,1986\}$ es el conjunto de restos módulo 1987, hallar $f(n)$ para cualquier n. Dividimos el conjunto A en dos subconjuntos disjuntos, B y C, tales que si n está en B, entonces n está en A y $f(n)$ está en A, y si n está en C, entonces n está en A y $f(n)$ no está en A. Definimos también el conjunto $A+1987$ como

$$A+1987=\{n+1987|n\in A\}=\{1987,1988,1989...,3973\}.$$

Se tiene entonces que $f(f(A))=A+1987$, pues si $m\in A+1987$, existe $n\in A$ tal que $m=n+1987=f(f(n))$, y si $n\in A$, entonces $f(f(n))=n+1987\in A+1987$. Ahora bien,

$$A+1987=f(f(A))=f(f(B\cup C))=f(f(B)\cup f(C))=f(f(B))\cup f(f(C)),$$

Siendo además las uniones disjuntas siempre, por ser B y C disjuntos, y f inyectiva. Además, $f(f(B))\cap A=\emptyset$ y $f(f(C))\cap A=\emptyset$, por ser $A+1987\cap A=\emptyset$.

Sea ahora $m\in B$. Entonces, $f(m)\in A$, y $f(f(m))\notin$ A, luego $f(m)\in C$, y el cardinal de C es mayor o igual que el cardinal de $f(B)$, luego por inyectividad es mayor o igual que el cardinal de B.

Sea finalmente $m\in C$. Obviamente, $f(m)\geq 1987$, pues no pertenece a A, luego existe un entero no negativo $n=f(m)-1987$ tal que $f(f(n))=n+1987=f(m)$, y por inyectividad $m=f(n)$. Supongamos que $n\geq 1987$. Entonces, existiría un entero no negativo $p=n-1987$ tal que $f(f(p))=n$. Luego $m=f(f(f(p)))=f(p)+1987$, que es absurdo pues $m\in A$ y $f(p)$ es un entero no negativo. Luego pertenece a A el entero n tal que $m=f(n)$. Pero $m=f(n)\in A$, luego $n\in B$, y el cardinal de B es mayor o igual que el cardinal de C.

Luego B y C tienen el mismo cardinal, y al ser disjuntos, y su unión igual a A, el cardinal de A es el doble que el cardinal de B. Pero el cardinal de A es impar, y hemos llegado a una contradicción. Luego no existe ninguna tal función f.

Otro problema en el que la división de la imagen en conjuntos disjuntos puede ayudar notablemente es el problema 6 de la X Olimpiada Iberoamericana de Matemática (1995). En la solución que se propone, se realiza una hipótesis sobre las propiedades de la función f, y a partir de ahí se comprueba que el conjunto de imágenes queda dividido, de forma natural, en ciertos subconjuntos, que a su vez se utilizan para probar o refutar la hipótesis inicial:

Una función f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ es circular si para cada p en $\mathbb{N}$ existe n en $\mathbb{N}$ con $n\leq p$ tal que

$$f^n(p)=f(f(\ldots\ n \text{ veces } \ldots f(p)))=p.$$

La función f tiene grado de repulsión k, $0<k<1$, si para cada p en $\mathbb{N}$, $f^i(p)\neq p$ para $i=1,2,\ldots,[kp]$.

Determine el mayor grado de repulsión que puede tener una función circular.

Nota (*): $[x]$ indica el mayor entero menor o igual que x.

Es trivial comprobar que, al ser la función circular, ha de ser $f(1)=1$, pues $n=1$ es el único natural menor o igual que $p=1$. Llamaremos $C_0=\{1\}$, y en general, definiremos $C_q=\{2^q,f(2^q),f(f(2^q)),\ldots,f^{n-1}(2^q)\}$ donde $f^n(2^q)=2^q$ con $n\leq 2^q$. Obviamente, el cardinal de C_q es igual a $n\leq 2^q$, siendo además $n-1\geq[2^q k]$ por definición de grado de repulsión. Por circularidad, cualquier $f^m(2^q)$ está en C_q, como se puede demostrar trivialmente por inducción ya que, si p está en C_q, también lo está $f(p)$. Además, si p es un elemento cualquiera de C^q, entonces existe un entero no negativo m tal que $2^q=f^m(p)$.

Supongamos ahora que la función tiene grado de repulsión $k\geq 1/2$. Demostraremos que $C_0,C_1,C_2,\ldots$ y en general los C_q, para todo entero no negativo q, son conjuntos disjuntos (lema 1), siendo además (lema 2)

$$C_0\cup C_1\cup C_2\cup\ldots\cup C_q=\left\{1,2,3,\ldots,2^{q+1}-1\right\}=\left\{p\in\mathbb{N}\,\middle|\,p\leq 2^{q+1}-1\right\}.$$

El lema 1 es relativamente sencillo de demostrar: supongamos que existe un entero p que pertenece a la vez a C_q y C_r con $q\neq r$. Entonces, existen m y n tales que $2^q=f^m(p)$ por circularidad, y a la vez $p=f^n(2^r)$. Entonces $f^{n+n}(2^r)=2^q$, y $2^q \in C_r$, luego por circularidad, $2^r \in C^q$, con lo que $C_q=C_r$. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que $q>r$, con lo que al ser enteros, $q \geq r+1$. Ahora bien, por tener la función grado de repulsión $k \geq 1/2$, entonces el cardinal de $C_q=C_r$, que es n, cumple que $n-1 \geq [2^q k] \geq [2^{r+1}k] \geq 2^r$, mientras que por ser f circular, el cardinal de C_r debe ser $n \leq 2^r$. Contradicción, luego C_q y C_r son disjuntos para cualesquiera enteros no negativos distintos q y r.

El lema 2 se cumple trivialmente para $q=0$, pues $C_0=\{1\}$. Supongamos que se cumple para $1,2,3,\ldots,q-1$, y veamos que se cumple también para q. Sea n el cardinal de C_q. Entonces, como C_q no puede contener a ningún natural menor o igual que 2^q-1 (pues todos estos elementos pertenecen por hipótesis de inducción a conjuntos que son disjuntos con C_q), entonces el máximo M de C_q es mayor o igual que 2^q+n-1. Por tener la función grado de repulsión $k \geq 1/2$, y al ser $f^n(m)=m$ para todo m de C_q, y al ser M entero (con lo que $[M/2]=M/2$ si M es par, $[M/2]=(M-1)/2$ si M es impar), se tiene que

$$n-1 \geq [kM] > kM-1 \geq \frac{M}{2}-1 \geq \frac{2^q+n-1}{2}-1, \qquad n > 2^q-1.$$

Pero $n \leq 2^q$ por definición de función circular, con lo que $n=2^q$, y $M \geq 2^{q+1}-1$, con igualdad si y sólo si C_q está formado por $n=2^q$ enteros consecutivos. Supongamos finalmente que $M>2^{q+1}-1$. Entonces, $M \geq 2^{q+1}$, con lo que $[kM] \geq 2^q=n$, que es absurdo, pues entonces debería ser $f^n(M) \neq M$, que es falso por estar M en C_q. Luego C_q está formado por los 2^q enteros positivos consecutivos comprendidos entre 2^q y $2^{q+1}-1$, ambos inclusive, de donde trivialmente

$$C_0 \cup C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_q = \{1,2,3,\ldots,2^q-1\} \cup C_q = \{1,2,3,\ldots,2^{q+1}-1\}.$$

Una función con las características pedidas podría estar definida como sigue:

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & \text{si } n \neq 2^q-1, \\ 2^{q-1}, & \text{si } n = 2^q-1, \end{cases}$$

siendo 2^q la menor potencia entera de 2 mayor que n. Por lo tanto, existen funciones con grado de repulsión $k \geq 1/2$, de las cuáles se ha dado un ejemplo, y todas las cuáles cumplen los dos lemas probados. Veremos ahora que ninguna de tales funciones tiene grado de repulsión $k>1/2$. Para ello, consideramos que, como M pertenece a C_q, con lo que $f^n(M)=M$ para $n=2^q$, entonces por definición del grado de repulsión,

$$2^q-1 = n-1 \geq [kM] = \left[k\left(2^{q+1}-1\right)\right] = 2^q-1+\left[\left(2^{q+1}-1\right)k-\left(2^q-1\right)\right].$$

Por lo tanto, el contenido del último corchete debe ser menor que 1, con lo que

$$k < \frac{2^q}{2^{q+1}-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\left(2^{q+1}-1\right)}.$$

Pero al tender q a infinito, el segundo sumando se hace arbitrariamente pequeño, con lo que existirán valores de q tales que el miembro de la izquierda será menor que cualquier $k>1/2$. Luego como ninguna función circular puede tener grado de repulsión $k>1/2$, pero sí puede tener grado de repulsión $k=1/2$ (como la función dada en el ejemplo), éste es el valor buscado, y hemos acabado.

Finalmente, se propone otro problema donde la división del conjunto de imágenes se realiza de acuerdo a su pertenencia a determinadas sucesiones definidas recursivamente, cuyas propiedades vienen establecidas por la propia ecuación funcional. Se trata del problema 5 de la XXXIV Olimpiada Matemática Internacional (1993):

¿Existe una función $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ tal que $f(1)=2$, $f(f(n))=f(n)+n$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y $f(n)<f(n+1)$ para cada $n\in\mathbb{N}$?

Es trivial comprobar que $f(2)=f(1)+1=3$, $f(3)=f(2)+2=5$, $f(5)=f(3)+3=8$, etc., pudiéndose demostrar fácilmente por inducción que $f(F_m)=F_{m+1}$ para $m\geq 1$ donde F_m es el m-ésimo término de la sucesión de Fibonacci, definida como $F_0=1$, $F_1=1$, $F_{m+1}=F_m+F_{m-1}$ para todo $m\geq 1$. Para demostrar que existe una función como la pedida en el enunciado, dividiremos el conjunto de naturales en subconjuntos disjuntos, de tal forma que cada uno de ellos sea una sucesión construida mediante la relación recursiva $G_{m+1}=G_m+G_{m-1}$, pero cada uno de ellos con condiciones iniciales G_0 y G_1 distintas. Para ello, demostraremos el siguiente lema: todo entero positivo se puede expresar de una única forma como la suma de elementos distintos y no consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Es decir, todo natural se puede escribir de una única manera como

$$\sum_{i=1}^{I} F_{n_i},$$

con la condición de que los n_i sean enteros positivos distintos, no habiendo dos de ellos consecutivos. El que todo natural se puede expresar como la suma de elementos distintos no consecutivos de la sucesión de Fibonacci es relativamente sencillo por inducción; supongamos que la hipótesis de inducción es cierta para todo entero menor o igual que F_m para algún m (la hipótesis es trivialmente cierta para m=1 pues $1=F_1$). Si $n=F_{m+1}$, la suma tiene un único sumando, que es F_{m+1}. Si $F_m<n<F_{m+1}$, entonces se tiene que $n-F_m<F_{m+1}-F_m=F_{m-1}$, luego por hipótesis de inducción $n-F_m$ se puede expresar como suma de términos distintos y no consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Además, ninguno de ellos puede ser mayor o igual que F_{m-1}, luego ninguno de ellos puede ser consecutivo con F_m, y n se puede expresar como F_m más la suma que da lugar a $n-F_m$. Para demostrar la unicidad, demostremos en primer lugar por inducción que

$$\sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n} - 1, \qquad \sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+1} - 1.$$

La hipótesis de inducción es trivialmente cierta para n=1, ya que $F_2-1=F_2-F_0=F_1$, y que $F_3-1=F_3-F_1=F_2$. Si la hipótesis de inducción es cierta hasta n, entonces

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i-1} = F_{2n+1} + \sum_{i=1}^{n} F_{2i-1} = F_{2n+1} + F_{2n} - 1 = F_{2n+2} - 1 = F_{2(n+1)} - 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} F_{2i} = F_{2n+2} + \sum_{i=1}^{n} F_{2i} = F_{2n+2} + F_{2n+1} - 1 = F_{2n+3} - 1 = F_{2(n+1)+1} - 1.$$

Sea entonces m el menor entero que se puede escribir de dos maneras distintas como suma de elementos distintos y no consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Si el mayor de los elementos en cada suma es el mismo (supongamos que es F_M), entonces $m-F_M$ se puede expresar de dos formas como suma de elementos distintos y no consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Pero entonces m no sería el menor natural con esta propiedad. Luego las dos sumas tienen un elemento mayor distinto. Supongamos que el máximo de los elementos que intervienen en ambas sumas es F_M. Entonces, $m\geq F_M$, por poder ser expresado como la suma cuyo mayor elemento es F_M. Pero al mismo tiempo,

$$m \leq F_{M-1} + F_{M-3} + F_{M-5} + \ldots = F_M - 1,$$

ya que esta es la máxima suma de elementos distintos no consecutivos de la sucesión de Fibonacci tales que ninguno de ellos es mayor o igual que F_M. Hemos llegado a una contradicción, luego la suma es única para todo entero.

Sean ahora $m_{1,1}$, $m_{2,1}$, $m_{3,1}$,… los enteros tales que, en dicha suma, interviene $F_1=1$. Para cada uno de ellos, construimos el siguiente conjunto: si

$$m_{j,1} = \sum_{i=1}^{I} F_{n_i},$$

donde sin pérdida de generalidad los n_i están en sucesión creciente, con lo que n_1=1, entonces

$$m_{j,k} = \sum_{i=1}^{I} F_{n_i+k-1} .$$

Demostraremos entonces que el conjunto de naturales es la unión disjunta de los conjuntos $\{m_{j,1}, m_{j,2}, m_{j,3}, \ldots\}$. El que todo natural pertenece a uno de estos conjuntos es relativamente trivial: si la expresión de este natural N como suma de elementos distintos de la sucesión de Fibonacci, no dos de ellos disjuntos, entonces bien $F_1=1$ está en la suma, bien no está. En el primer caso, N es uno de los $m_{j,1}$. En caso contrario, sea F_k el menor de los elementos de la sucesión de Fibonacci que está en la suma. Entonces, podemos expresar

$$N = \sum_{i=1}^{I} F_{n'_i} ,$$

donde cada uno de los n'_i es mayor o igual que k, siendo todos ellos distintos y no consecutivos, y habiendo exactamente uno que es igual a k. Sea entonces el número

$$\sum_{i=1}^{I} F_{n'_i-k+1} = \sum_{i=1}^{I} F_{n_i} = m_{j,1} .$$

que obviamente está bien definido así porque, al ser uno de los n'_i igual a k, entonces uno de los $n_i=n'_i-k+1$ es igual a 1, y todos los n_i son distintos y no consecutivos. Entonces, $N=m_{j,k}$, y pertenece a uno de los conjuntos que hemos construido. Como además la expresión de N como suma de elementos distintos no consecutivos de la sucesión de Fibonacci es única, también lo es el $m_{j,1}$ al que se llega por la anterior manipulación, con lo que los conjuntos son disjuntos, y hemos acabado.

Finalmente, definimos f tal que $f(m_{j,k})=m_{j,k+1}$ para todo $k\geq1$, y hemos acabado, ya que entonces, como todo n se puede escribir como $m_{j,k}$ para algún j, k, se tiene

$$f(n)+n = f(m_{j,k})+m_{j,k} = m_{j,k+1}+m_{j,k} = \left(\sum_{i=1}^{I} F_{n_i+k}\right)+\left(\sum_{i=1}^{I} F_{n_i+k-1}\right) = \sum_{i=1}^{I}\left(F_{n_i+k}+F_{n_i+k-1}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{I} F_{n_i+k+1} = m_{j,k+2} = f(m_{j,k+1}) = f(f(m_{j,k})) = f(f(n)).$$

4.- Factorización en números primos

Esta técnica (exclusiva de funciones que tomen valores enteros y/o para variables que tomen valores enteros, o a lo sumo racionales) es especialmente potente cuando la función del producto de dos valores se puede relacionar con las imágenes de dichos valores. Por ejemplo, cuando la función satisface $f(mn)=f(m)f(n)$, o $f(mn)=f(m)+f(n)$, para cualesquiera m y n, aunque ante otras posibles expresiones similares también se podría utilizar esta técnica. En este contexto, hay que tener cuidado con la definición de "función multiplicativa", pues si bien para las funciones reales de variable real se definían como aquellas para las que, para cualesquiera x, y reales, $f(xy)=f(x)f(y)$, en el contexto de los números enteros se definen como aquellas para las que, para cualesquiera m y n primos entre sí, $f(mn)=f(m)f(n)$. Las funciones para las que $f(mn)=f(m)f(n)$ para cualesquiera m y n sin restricciones, se suelen denominar completamente multiplicativas. En el contexto de funciones de variable entera se suelen definir también las funciones aditivas como aquellas para las que, para cualesquiera m y n primos entre sí, $f(mn)=f(m)+f(n)$, a diferencia de la definición que se suele dar en el contexto de funciones reales de variable real.

Una primera forma de aplicar esta técnica sería, caso de que f satisfaga alguna de las relaciones anteriores o una similar, hallar el valor de f en todos los números primos, y a partir de ahí, utilizando probablemente inducción, llegar a hallar el valor de f para todo natural. Esto se ilustra con una posible solución del problema 5 de la I Olimpiada Iberoamericana de Matemática (1987):

A cada entero positivo n se le asigna un entero no negativo $f(n)$ de tal manera que se satisfagan las siguientes condiciones:

- **i.** $f(rs)=f(r)+f(s)$,
- **ii.** $f(n)=0$ **siempre que la cifra en las unidades de** n **sea 3,**
- **iii.** $f(10)=0$.

Halle $f(1985)$. Justifique su respuesta.

Haciendo $s=1$ en la condición i se comprueba trivialmente que $f(1)=0$. Además, si $f(rs)=0$ para enteros positivos r y s, entonces $f(r)=f(s)=0$, ya que $f(r)$ y $f(s)$ son enteros no negativos de suma nula por la condición i. En concreto, $f(2)=f(5)=0$ al ser $f(10)=0$. Sea ahora p un primo cualquiera distinto de 2 y 5. Por ser distinto de 2, es impar, y por ser distinto de 5, no acaba en 5, luego acaba en 1, 3, 7 o 9. Pero entonces $3p$, p, $9p$ y $7p$ respectivamente acaban en 3. Luego al ser respectivamente $f(3p)=0$, $f(p)=0$, $f(9p)=0$ y $f(7p)=0$, entonces $f(p)=0$ para cualquier primo. De aquí es trivial comprobar, por inducción sobre el número de factores primos de n, que $f(n)=0$ para todo n. El resultado es obvio cuando n tiene un único factor primo (n sería primo). Si la hipótesis de inducción es cierta para todo natural con q factores primos, y n tiene $q+1$ factores primos, lo podemos escribir como $n=pm$, donde p es primo y m tiene q factores primos, con lo que $f(n)=f(p)+f(m)=0$. Como caso particular, $f(1985)=0$.

Hay veces que no sólo interesa considerar los factores primos de la variable; también puede interesar considerar la descomposición en factores primos de los valores que toma la propia función. Como ejemplo, se presenta una posible solución al problema 6 de la XXXIX Olimpiada Matemática Internacional (1998):

Sean todas las funciones f del conjunto $\mathbb{N}$ de todos los enteros positivos en sí mismo, y que satisfacen $f(t^2f(s))=s(f(t))^2$ para cada s y t de $\mathbb{N}$. Determine el mínimo valor posible de $f(1998)$.

Llamemos $f(1)=\lambda$. Tomando $t=1$, se tiene que

$$f\left(f\left(s\right)\right)=s\left(f\left(1\right)\right)^2=s\lambda^2.$$

En particular, tomando $s=1$ se tiene que $f(\lambda)=\lambda^2$, y tomando $s=f(1)=\lambda$, se tiene que $f(f(\lambda))=f(\lambda^2)=\lambda^3$. Ahora bien,

$$\left(f\left(\lambda t\right)\right)^2=f\left(\left(\lambda t\right)^2 f\left(1\right)\right)=f\left(\lambda^3t^2\right)=f\left(t^2 f\left(\lambda^2\right)\right)=\lambda^2\left(f\left(t\right)\right)^2, \qquad f\left(\lambda t\right)=\lambda f\left(t\right).$$

Por inducción trivial, se comprueba que, para cualquier entero positivo n,

$$f\left(\lambda^n t\right)=\lambda^n f\left(t\right).$$

El resultado está demostrado para $n=1$, y si es cierto para $n=m-1$, entonces

$$f\left(\lambda^m t\right)=f\left(\lambda\left(\lambda^{m-1}t\right)\right)=\lambda f\left(\lambda^{m-1}t\right)=\lambda\lambda^{m-1}f\left(t\right)=\lambda^m f\left(t\right).$$

Además,

$$\lambda f\left(t^2\right)=f\left(\lambda t^2\right)=f\left(t^2 f(1)\right)=\left(f(t)\right)^2 .$$

A partir de aquí, no es complicado demostrar por inducción que

$$\lambda^{n-1} f\left(t^n\right)=f\left(\lambda^{n-1} t^n\right)=\left(f(t)\right)^n .$$

El resultado es trivialmente cierto para $n=1$ y está demostrado para $n=2$. Si es cierto para $n=m-1$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda^m f\left(t^{m+1}\right)&=f\left(\lambda^m t^{m+1}\right)=f\left(t^2\lambda^2\left(\lambda^{m-2} t^{m-1}\right)\right)=f\left(t^2 f\left(f\left(\lambda^{m-2} t^{m-1}\right)\right)\right)\\&=f\left(\lambda^{m-2} t^{m-1}\right)\left(f(t)\right)^2=\left(f(t)\right)^{m-1}\left(f(t)\right)^2=\left(f(t)\right)^{m+1} .\end{aligned}$$

Sea entonces p un factor primo de λ con multiplicidad α. Es obvio que, como λ divide a $(f(t))^2$ para cualquier entero positivo t, entonces p divide a $(f(t))^2$, luego divide a $f(t)$, parar cualquier entero positivo t. Supongamos que la menor multiplicidad con la que p divide a cualesquiera de los $f(t)$, es β. Entonces, para todo entero positivo n,

$$p^{\alpha(n-1)}\left|\lambda^{n-1} f\left(t^n\right)=\left(f(t)\right)^n ; \qquad n\beta \geq \alpha(n-1); \qquad \alpha \geq (\alpha-\beta)n .\right.$$

Pero como n puede tomar cualquier valor entero positivo, no puede estar acotado superiormente, luego $\alpha-\beta\leq 0$. Como cualquier primo que divide a λ, también divide a $f(t)$ con la misma o mayor multiplicidad, entonces λ divide a $f(t)$ para todo t. Podemos entonces definir, para todo entero positivo t, $g(t)=f(t)/\lambda$. Ahora bien, g también cumple la condición del enunciado, pues

$$f\left(t^2 f(s)\right)=f\left(\lambda\left(t^2 g(s)\right)\right)=\lambda f\left(t^2 g(s)\right)=\lambda^2 g\left(t^2 g(s)\right),$$

$$s\left(g(t)\right)^2=\frac{s\left(\lambda g(t)\right)^2}{\lambda^2}=\frac{s\left(f(t)\right)^2}{\lambda^2}=g\left(t^2 g(s)\right).$$

Supongamos que el valor mínimo de $f(1998)$ se alcanza cuando $f(1)=\lambda>1$. Entonces, $g(1998)=f(1998)/\lambda<f(1998)$, que es absurdo. Luego el mínimo sólo se puede alcanzar cuando $f(1)=1$. Por una parte, haciendo entonces $s=1$ en el enunciado, se obtiene

$$f\left(t^2\right)=f\left(t^2 f(1)\right)=\left(f(t)\right)^2$$

Por otra parte, $f(f(s))=s$, con lo que sustituyendo s por $f(s^2)$ en la relación dada en el enunciado,

$$\left(f(st)\right)^2=f\left(s^2t^2\right)=f\left(t^2 f\left(f\left(s^2\right)\right)\right)=f\left(s^2\right)\left(f(t)\right)^2=\left(f(s)f(t)\right)^2,$$

$$f(st)=f(s)f(t).$$

Se comprueba entonces trivialmente por inducción que expresando cualquier entero s como producto de sus factores primos

$$f(s) = f(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r) = f(p_1) \cdot f(p_2) \cdot \ldots \cdot f(p_r).$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación del enunciado, se llega, después de simplificar los valores de las imágenes de los factores primos de t, a que

$$f(f(p_1)) \cdot f(f(p_2)) \cdot \ldots \cdot f(f(p_r)) = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_r.$$

Como este resultado debe ser cierto para todo entero positivo, y en particular para los enteros positivos primos, se tiene que, para todo primo p_i, $f(f(p_i))=p_i$.

Luego definiendo cualquier función f tal que su efecto en los números primos sea el descrito, y tal que la imagen de un entero sea igual al producto de las imágenes de sus factores primos, ésta cumplirá la hipótesis del enunciado, y además, si f cumple la hipótesis del enunciado y $f(1998)$ toma un valor mínimo, entonces es de esta forma. Luego nos basta buscar el mínimo valor que pueden tomar $f(1998)=f(2\cdot3^3\cdot37)$.

Es trivial constatar que $f(p)$ debe ser primo para todo primo p, pues si se pudiera expresar como mn, con m y n enteros positivos, entonces $f(f(p))=f(mn)=f(m)f(n)$, con lo que una de estas dos imágenes debe ser 1 y la otra p. Como además f es inyectiva por ser $f(f(s))=s$, entonces o m o n es 1.

Por lo tanto, $f(1998)=pq^3r=q^2(pqr)$ donde $p=f(2)$, $q=f(3)$, $r=f(37)$ son primos. Luego el valor mínimo que puede tomar $f(1998)$ es igual al cuadrado de un primo (que será por lo tanto mayor o igual que $2^2=4$), multiplicado por el producto de tres primos distintos (que será por lo tanto mayor o igual que el producto de los tres menores primos, es decir, mayor o igual que $2\cdot3\cdot5=30$). Luego $f(1998)\geq120$. Sea $f(3)=2$, $f(2)=3$, $f(37)=5$, $f(5)=37$, y ordenando el resto de los números primos de forma aleatoria $\{p_1,p_2,p_3,\ldots\}$, sea $f(p_{2n-1})=p_{2n}$, y $f(p_{2n})=p_{2n-1}$ para todo entero positivo n. Esta función cumple obviamente los requisitos pedidos, y $f(1998)=2^3\cdot3\cdot5=120$. Luego éste es el mínimo valor posible.

Se propone como último ejemplo de este apartado una ecuación funcional donde el objetivo es construir una función racional de variable racional. Sin embargo, se comprueba inmediatamente que la construcción de la función se simplifica considerablemente definiendo una función para los números primos, extendiéndola luego a enteros y racionales. Es el problema 4 de la XXXI Olimpiada Matemática Internacional (1990):

Sea $\mathbb{Q}^+$ el conjunto de los números racionales positivos. Construya una función f:$\mathbb{Q}^+\rightarrow\mathbb{Q}^+$ tal que

$$f\left(xf\left(y\right)\right)=\frac{f\left(x\right)}{y}$$

para cada x,y de $\mathbb{Q}^+$.

Sea una función definida de la siguiente manera:

$$f\left(x\right)=f\left(\frac{m}{n}\right)=\frac{f\left(m\right)}{f\left(n\right)}=\frac{f\left(p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r\right)}{f\left(q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_s\right)}=\frac{f\left(p_1\right)\cdot f\left(p_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(p_r\right)}{f\left(q_1\right)\cdot f\left(q_2\right)\cdot\ldots\cdot f\left(q_s\right)},$$

donde m y n son enteros tales que $x=m/n$, $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r$ y $q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_s$ son las factorizaciones respectivas de m y n, y sus imágenes respecto a f toman valores racionales, y distintos para cada factor primo distinto (por coherencia se define $f(1)=1$). Nótese que ésta es de hecho una función de los racionales en los racionales, ya que está bien definida, pues para cada dos posibles expresiones de m y n, las imágenes de los factores primos comunes a ambos aparecen un número de veces igual a la multiplicidad común de dicho factor en m y n, en numerador y denominador del último miembro, cancelándose. Así mismo, al ser la imagen de cada primo un número racional, el último miembro es un cociente de productos de racionales, luego es racional. Si además se tiene que $f(f(p))=1/p$ para cada primo p, entonces f satisface la condición del enunciado. Para constatar este hecho, definimos x como cociente de productos de primos como antes, y tomamos

$$y=\frac{m'}{n'}=\frac{p'_1\cdot p'_2\cdot\ldots\cdot p'_{r'}}{q'_1\cdot q'_2\cdot\ldots\cdot q'_{s'}}.$$

Además, es sencillo constatar que la imagen de un cociente es igual al cociente de imágenes, y la imagen de un producto es igual al producto de imágenes:

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(\frac{m\cdot n'}{n\cdot m'}\right)=\frac{f\left(p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_r\cdot q'_1\cdot q'_2\cdot\ldots\cdot q'_{s'}\right)}{f\left(q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_s\cdot p'_1\cdot p'_2\cdot\ldots\cdot p'_{r'}\right)}$$
$$=\frac{f(p_1)\cdot f(p_2)\cdot\ldots\cdot f(p_r)\cdot f(q'_1)\cdot f(q'_2)\cdot\ldots\cdot f(q'_{s'})}{f(q_1)\cdot f(q_2)\cdot\ldots\cdot f(q_s)\cdot f(p'_1)\cdot f(p'_2)\cdot\ldots\cdot f(p'_{r'})}$$
$$=\frac{f(p_1)\cdot f(p_2)\cdot\ldots\cdot f(p_r)}{f(q_1)\cdot f(q_2)\cdot\ldots\cdot f(q_s)}\cdot\frac{f(q'_1)\cdot f(q'_2)\cdot\ldots\cdot f(q'_{s'})}{f(p'_1)\cdot f(p'_2)\cdot\ldots\cdot f(p'_{r'})}=\frac{f(x)}{f(y)},$$

y de forma similar para llegar a $f(xy)=f(x)f(y)$. Por inducción sobre el número de factores en el producto, este último resultado se puede extender al producto de un número arbitrario de racionales. Se tiene entonces que, para una función así definida, y si se cumpliera que $f(f(y))=1/y$ para todo y racional, se tendría

$$f\left(xf(y)\right)=f(x)\cdot f\left(f(y)\right)=f(x)\cdot\frac{1}{y}=\frac{f(x)}{y}.$$

Pero con las características definidas,

$$f\left(f(y)\right)=f\left(f\left(\frac{m'}{n'}\right)\right)=f\left(\frac{f(p'_1)\cdot f(p'_2)\cdot\ldots\cdot f(p'_{r'})}{f(q'_1)\cdot f(q'_2)\cdot\ldots\cdot f(q'_{s'})}\right)$$
$$=\frac{f\left(f(p'_1)\cdot f(p'_2)\cdot\ldots\cdot f(p'_{r'})\right)}{f\left(f(q'_1)\cdot f(q'_2)\cdot\ldots\cdot f(q'_{s'})\right)}$$
$$=\frac{f\left(f(p'_1)\right)\cdot f\left(f(p'_2)\right)\cdot\ldots\cdot f\left(f(p'_{r'})\right)}{f\left(f(q'_1)\right)\cdot f\left(f(q'_2)\right)\cdot\ldots\cdot f\left(f(q'_{s'})\right)}=\frac{q'_1\cdot q'_2\cdot\ldots\cdot q'_{s'}}{p'_1\cdot p'_2\cdot\ldots\cdot p'_{r'}}=\frac{1}{y},$$

y la función así definida efectivamente cumple las condiciones del enunciado. Se podría además demostrar, aunque no es necesario para la resolución del problema, que todas las funciones definidas de esta forma son además las únicas que cumplen la condición del enunciado. Para ello se comienza demostrando que existe algún valor para el que la función toma valor 1 (basta hacer $y=f(x)$ en la ecuación inicial), y ver que si $f(\lambda)=1$ debe ser $\lambda=1$ (tomando $y=\lambda$ en la ecuación inicial). A partir de ahí, haciendo $x=1$ en la ecuación inicial, $y=1/z$ en la ecuación inicial, y $y=f(1/z)$ en la ecuación inicial, se demuestra respectivamente que $f(f(y))=1/y$ (este resultado debe ser cierto en particular cuando y es un entero positivo primo), que $f(x/z)=f(x)/f(z)$, y que $f(xz)=f(x)f(z)$. Expresando entonces x como cociente de dos enteros, y luego cada uno de ambos como producto de primos, se llega necesariamente a la expresión que habíamos dado para la función f que hemos construido.

Finalmente, para hacer entonces que $f(f(p))=1/p$ para todo primo, numeramos los primos en cualquier orden, $p_1,p_2,p_3,\ldots$, y tomamos $f(p_{2r-1})=p_{2r}$, y $f(p_{2r})=1/p_{2r-1}$, para todo entero positivo r, con lo que

$$f\left(f\left(p_{2r-1}\right)\right)=f\left(p_{2r}\right)=\frac{1}{p_{2r-1}}, \qquad f\left(f\left(p_{2r}\right)\right)=f\left(\frac{1}{p_{2r-1}}\right)=\frac{f(1)}{f\left(p_{2r-1}\right)}=\frac{1}{p_{2r}},$$

y hemos terminado la construcción de la función pedida.

5.- Expresión en bases distintas de la decimal

En ciertas ecuaciones funcionales con origen e imagen en el conjunto de los naturales, puede ser conveniente realizar un cambio de base para simplificar su resolución, ya que, en la base adecuada, algunas funciones se expresan a través de relaciones muy sencillas. Obviamente, esta técnica es de aplicación por lo menos muy difícil en funciones reales de variable real. Como ejemplo se ofrece una posible solución del problema 6 de la XXXVII Olimpiada Matemática Española (2001):

Determinar la función f:$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ (siendo $\mathbb{N}=\{1,2,3,\ldots\}$ el conjunto de los números naturales) que cumple, para cualesquiera $s,n\in\mathbb{N}$, las siguientes condiciones: $f(1)=f(2^s)=1$, y si $n<2^s$, entonces $f(2^s+n)=f(n)+1$.
Calcular el valor máximo de $f(n)$ cuando $n\leq 2001$.
Hallar el menor número natural n tal que $f(n)=2001$.

La función f es aquella que, a cada número n, le asocia el número de unos que tiene la expresión en base 2 de n. Vamos a demostrarlo por inducción sobre el número de cifras en la expresión de n en base 2: el resultado es obvio para números de una cifra en base 2, ya que sólo existe $n=1$, y $f(1)=1$, y 1 tiene, en su expresión binaria (que es también 1), un único uno. Si el resultado se cumple para números cuya expresión binaria tiene m o menos dígitos, entonces n con expresión binaria de $m+1$ dígitos se puede escribir como 2^m+p, donde $0\leq p<2^m$, y p tiene como máximo m dígitos. Por lo tanto, como la expresión binaria de 2^m+p, que es igual a un uno seguido de la expresión binaria de p

(completada con ceros entre el primer y el segundo uno si es necesario hasta que dicha expresión binaria tenga m+1 dígitos), entonces la expresión binaria de 2^m+p tiene exactamente un uno más que la de p. Pero $f(2^m+p)=f(p)+1$, luego como $f(p)$ es el número de unos en la expresión binaria de p, $f(2^m+p)$ es el número de unos en la expresión binaria de 2^m+p, y hemos acabado.

Ahora bien, si $n\leq 2001$, entonces la expresión binaria de n tiene como máximo 11 cifras, no todas las cuales pueden ser uno, ya que $n<2047=2^{11}-1$, siendo la expresión binaria de 2047 igual a once unos. Luego $f(n)$ puede tomar como máximo el valor 10. Pero $1023=2^{10}-1$ tiene por expresión binaria exactamente 10 unos, luego el valor máximo de $f(n)$ es 10 cuando $n\leq 2001$.

El número $2^{2001}-1$ es el menor tal que su imagen es 2001, ya que su expresión binaria tiene 2001 cifras, todas iguales a uno, y cualquier otro número distinto, cuya expresión binaria contenga 2001 cifras, contendrá al menos un cero, con lo que su expresión binaria tendría por lo menos 2002 cifras, y el número sería mayor que $2^{2001}-1$.

A veces puede ser interesante expresar los valores de la variable y de la imagen en distinta base, como sucede en una posible solución del problema 5 de la IV Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas (1989):

Sea la función f definida sobre el conjunto {1,2,3,…} tal que

i. $f(1)=1$,

ii. $f(2n+1)=f(2n)+1$,

iii. $f(2n)=3f(n)$.

Determinar el conjunto de valores que toma f.

La función f asocia, a un número n, una imagen $f(n)$, de tal forma que la expresión en base 3 de $f(n)$ coincide con la expresión en base 2 de n. Demostrémoslo por inducción sobre el número m de cifras binarias de n. Para m=1, el resultado es trivialmente cierto, ya que 1 se expresa de igual forma en base 2 y en base 3. Si es resultado es cierto para números cuya expresión binaria tiene m cifras, sea p un número cuya expresión binaria tiene m+1 cifras. Entonces, si es par, lo podemos escribir como $2n$, en cuyo caso

$f(p)=f(2n)=3f(n)$, es decir, la expresión ternaria de $f(p)$ es igual a la expresión ternaria de n seguida de un 0. Pero la expresión binaria de $2n$ es igual a la expresión binaria de n seguida de un 0, luego como la expresión binaria de n y la ternaria de $f(n)$ eran iguales, también lo son la expresión binaria de p y la ternaria de $f(p)$. De forma análoga, si p es impar lo podemos escribir como $2n+1$, en cuyo caso se tiene que $f(p)=3f(n)+1$, con lo que la expresión ternaria de $f(p)$ sería igual a la expresión ternaria de $f(n)$ seguida de un cero, a la cuál se le sumaría uno, es decir, sería igual a la expresión ternaria de $f(n)$ seguida de un uno. Pero la expresión binaria de $2n+1$ también es igual a la expresión binaria de n seguida de un uno, y hemos acabado.

Por lo tanto, la expresión ternaria de cualquier $f(n)$, al ser igual a la expresión binaria de n, contiene sólo ceros y unos. Recíprocamente, si un número tiene en su expresión ternaria sólo ceros y unos, y n es el número cuya expresión binaria es igual a dicha expresión ternaria (que existe, al contener ésta sólo ceros y unos), entonces el número dado se puede escribir como $f(n)$. Luego el conjunto de valores que toma f es igual al conjunto de enteros positivos cuya expresión en base 3 contiene sólo ceros y unos, es decir, es el conjunto de números que se pueden escribir como suma de potencias distintas de 3.

Como último ejemplo para ilustrar la técnica del cambio de base, se propone el problema 3 de la XXIX Olimpiada Matemática Internacional (1988)

Una función está definida sobre los enteros positivos mediante

$$\boldsymbol{f(1)=1, \quad f(3)=3,}$$

$$\boldsymbol{f(2n)=f(n),}$$

$$\boldsymbol{f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),}$$

$$\boldsymbol{f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n),}$$

Para cada entero positivo n.

Determine el número de enteros positivos n, menores o iguales que 1988, para los que $f(n)=n$.

Demostraremos por inducción que la expresión binaria de $f(n)$ es el resultado de tomar la expresión binaria de n (sin añadir ceros a la izquierda) e invertir su orden. Así, por ejemplo, $f(11)=13$, siendo la expresión binaria de 11 igual a 1011, y la de 13 igual a 1101; obviamente, también sería $f(13)=11$. Esto se puede comprobar sin más que hallar que $f(11)=f(4\cdot 2+3)=3f(5)-2f(2)=15-2=13$, donde $f(5)=f(4\cdot 1+1)=2f(3)-f(1)=6-1=5$, y que $f(13)=f(4\cdot 3+1)=2f(7)-f(3)=14-3=11$, donde $f(7)=f(4\cdot 1+3)=3f(3)-2f(1)=9-2=7$. El resultado se demuestra muy fácilmente para números de hasta dos cifras binarias, ya que $f(1)=f(2)=1$, siendo las expresiones binarias de 1 y 2 respectivamente iguales a 1 y 10 (al invertir el orden en esta segunda queda 01=1), y $f(3)=3$, siendo la expresión binaria de 3 igual a 11 (queda invariante al invertir su orden).

Supongamos entonces que la hipótesis de inducción se cumple para números de hasta m cifras binarias. Entonces, sea un entero con $m+1$ cifras binarias. Si es par, lo podemos llamar $2n$, siendo n un entero positivo con m cifras binarias, y siendo la expresión binaria de $2n$ igual a la de n seguida de 0. Luego el resultado de invertir la expresión binaria de $2n$ es igual al resultado de invertir la expresión binaria de n (salvo un 0 a la izquierda), con lo que su valor es igual a $f(n)=f(2n)$. Si el entero de $m+1$ cifras binarias es impar, lo podemos escribir como $4n+1$ o $4n+3$, donde n tiene $m-1$ cifras binarias y $2n+1$ tiene m cifras binarias. Ahora bien, por hipótesis de inducción, $f(2n+1)$ es el resultado de invertir la expresión binaria de $2n+1$, siendo esta última, antes de la inversión, igual a la expresión binaria de n seguida de un 1. Luego $f(2n+1)=2^{m-1}+f(n)$, ya que el resultado de invertir la expresión binaria de $2n+1$ es igual a un 1 seguido de la expresión binaria de n invertida, ocupando este 1 la primera posición en una expresión binaria de m cifras. Por lo tanto,

$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)=2\big(f(2n+1)-f(n)\big)+f(n)=2^m+f(n),$$

$$\begin{aligned} f(4n+3)&=3f(2n+1)-2f(n)=3\big(f(2n+1)-f(n)\big)+f(n)=3\cdot 2^{m-1}+f(n)\\ &=2^m+2^{m-1}+f(n). \end{aligned}$$

Pero como $f(n)$ es el resultado de invertir la expresión binaria de n, y por lo tanto tiene $m-1$ cifras binarias, entonces $f(4n+1)=2^m+f(n)$ tiene por expresión binaria 10 seguido del resultado de invertir la expresión binaria de n, o lo que es lo mismo, el resultado de invertir lo que queda tras añadir 01 al final de la expresión binaria de n, es decir, el resultado de invertir la expresión binaria de $4n+1$. Además, $f(4n+3)=2^m+2^{m-1}+f(n)$ es el resultado de invertir lo que queda tras añadir 11 al final de la expresión binaria de n, es decir, el resultado de invertir la expresión binaria de $4n+3$, y hemos terminado.

Por lo tanto, los números tales que $f(n)=n$ son aquellos cuya expresión binaria (sin añadir ceros a la izquierda) es capicúa o palíndroma, es decir, que se lee igual al derecho o al revés, y por lo tanto es invariante a inversión en su orden. Calculemos pues el número de enteros menores o iguales que 1988 con expresión binaria capicúa, y esta es la respuesta al problema. Para ello, consideremos que, si un número tiene $2p$ cifras binarias (sin ceros a la izquierda), y es capicúa, entonces sus p primeras cifras determinan biunívocamente las p últimas, siendo además la primera y la última iguales a 1. Luego hay $p-1$ cifras que pueden tomar cualquier valor, con lo que hay exactamente 2^{p-1} tales números. Por lo tanto, como 1988 tiene expresión binaria 11111000010, con 11 cifras, hay $2^4+2^3+2^2+2^1+2^0=2^5-1=31$ enteros cuya expresión binaria es capicúa y tienen 10, 8, 6, 4 y 2 cifras binarias. Obviamente, sólo hay un entero (que es 1) con expresión binaria de 1 cifra, y es capicúa. Si un entero tiene un número impar $2p+1$ de cifras binarias ($p\geq 1$), entonces las p primeras determinan biunívocamente las p últimas, siendo además la primera y la última iguales a 1. Además, la cifra $p+1$-ésima puede tomar valores 0 o 1, al igual que las $p-1$ anteriores, con lo que hay exactamente 2^p enteros positivos distintos cuya expresión tiene $2p+1$ cifras binarias y son capicúas. Luego si tomamos los números capicúas con expresiones binarias de 1, 3, 5, 7 y 9 cifras binarias, obtenemos $1+2+2^2+2^3+2^4=31$ enteros menores que 1988 y con expresión binaria capicúa. Los únicos números enteros capicúas mayores que 1986 (que tiene por expresión binaria 11111000000), tienen obviamente por expresiones binarias 11111011111 y 11111111111, siendo iguales a $2047-2^5=2015$ y 2047, respectivamente, y son por lo tanto mayores que 1988. Cualquier otro número capicúa de 11 cifras binarias es menor que 1988. Luego hay $2^5-2=30$ tales números, con lo que hay un total de $31+31+30=92$ números menores o iguales que 1988 y tales que $f(n)=n$.

6.- Inducción

Cada vez que tenemos alguna cantidad o expresión que depende de números enteros, y existe una definición recursiva, la inducción puede ser un arma muy potente, como se muestra en el último ejemplo que se presenta en esta lección de preparación olímpica, en concreto el problema 6 de la XXII Olimpiada Matemática Internacional (1981):

La función $f(x,y)$ satisface

(1) $f(0,y)=y+1$,

(2) $f(x+1,0)=f(x,1)$,

(3) $f(x+1,y+1)=f(x,f(x+1,y))$,

para cualesquiera enteros no negativos x,y. Determine $f(4,1981)$.

Es trivial comprobar por inducción que

$$f(1,y)=y+2\,.$$

El resultado es obvio para $y=0$, ya que aplicando (2),

$$f(1,0)=f(0,1)=1+1=0+2\,.$$

Si el resultado se cumple para $x=1$ y para un y dado, entonces aplicando (3),

$$f(1,y+1)=f(0,f(1,y))=f(1,y)+1=y+2+1=(y+1)+2\,.$$

Utilizando este resultado, y aplicando nuevamente (2),

$$f(2,0)=f(1,1)=1+2=2\cdot 0+3\,.$$

Se demuestra entonces de forma sencilla por inducción que

$$f(2,y)=2y+3\,.$$

El resultado ha sido ya probado para $y=0$, y si se cumple para un y dado, entonces aplicando (3) se obtiene

$$f(2,y+1)=f(1,f(2,y))=f(2,y)+2=2y+3+2=2(y+1)+3\,.$$

Aplicando nuevamente (2),

$$f(3,0)=f(2,1)=2\cdot 1+3=2^{0+3}-3\,.$$

Se puede entonces demostrar por inducción que

$$f(3,y)=2^{y+3}-3.$$

El resultado ha sido ya probado para y=0, y si se cumple para un y dado, entonces aplicando (3) se obtiene

$$f(3,y+1)=f(2,f(3,y))=2f(3,y)+3=2^{y+4}-6+3=2^{(y+1)+3}-3.$$

Tenemos entonces finalmente que

$$f(4,0)=f(3,1)=2^{1+3}-3=2^{2^2}-3.$$

Se demuestra entonces por inducción que

$$f(4,y)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3,$$

donde la torre de doses tiene y+3 doses. El resultado ya ha sido probado para y=0, y si es cierto para algún y, entonces aplicando (3),

$$f(4,y+1)=f(3,f(4,y))=2^{f(4,y)+3}-3=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}-3+3}-3=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3,$$

donde la torre de doses tiene un dos más que en el caso de y, es decir, tiene (y+1)+3 doses, y hemos acabado. Luego

$$f(4,1981)=2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}-3,$$

donde la torre de doses tiene 1984 doses.

Referencias: Varios de los problemas propuestos en las Olimpiadas Matemáticas Española, Iberoamericana e Internacional se pueden encontrar en http://platea.pntic.mec.es/csanchez/olimmain.htm, http://www.oei.es/oim/problemas.htm y http://imo.math.ca, respectivamente.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI