Catorce problemas del *Court*

Francisco Javier García Capitán

11 de febrero de 2009

1. Introducción

Stephen Hawking fue avisado de que su libro *Historia del Tiempo* tendría la mitad de ventas por cada ecuación que incluyera en el libro. En relación con los problemas de Geometría, yo creo las soluciones más bellas son aquellas que no usan ninguna ecuación o fórmula, o incluso que no necesitan letras que nombren a los elementos que intervienen en la misma.

A este tipo de soluciones se presta el método analítico para resolver problemas geométricos. Hacemos razonamientos sobre la figura o solución que se busca y de ella deducimos una construcción o forma de resolver el problema. En muchos casos, no necesitamos efectuar prácticamente ningún cálculo para escribir la solución.

Presentamos aquí las soluciones de los problemas propuestos en la sección "General Method of Solution of Construction Problems" del libro *College Geometry* de Nathan Altshiller-Court.

De estos problemas presentaremos:

1. Un análisis, en el que estudiaremos la figura que se busca para determinar en ella alguna propiedad que nos permita llegar a ella a partir de los datos del problema.

2. Una construcción, que detalla los pasos a seguir para llegar a la solución.

3. Una discusión, que determina en qué casos el problema tiene solución y cuántas soluciones tiene en cada caso.

Aunque pueda parecer contradictorio, las soluciones de los problemas que siguen están escritas no para ser leídas, sino sólo por el placer de escribirlas. Se recomienda al lector que, en cuanto le sea posible, deje de serlo, y pase de leer las soluciones a escribir las suyas propias, y será en ese momento cuando obtenga el máximo provecho y satisfacción.

Usaremos el siguiente código de colores en las figuras: en azul, los datos; en negro, los cálculos intermedios; y en rojo, la solución.

2. Los problemas

1. Trazar una recta por un punto dado que forme ángulos iguales con los lados de un ángulo dado.

2. Trazar, por un punto dado, una recta, de manera que dos rectas paralelas dadas determinen sobre ella un segmento de longitud dada.

3. Trazar dos cuerdas iguales por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias iguales, una en cada circunferencia, y formando un ángulo dado.

4. Por un punto dado de una circunferencia trazar una cuerda cuya longitud sea el doble que la distancia que la separa del centro de la circunferencia.

5. Hallar un punto sobre la prolongación de un diámetro dado de una circunferencia tal que las tangentes trazadas desde este punto sean iguales al radio de la circunferencia.

6. Trazar, con centro en un punto dado, una circunferencia que biseque a una circunferencia dada, es decir, tal que la cuerda común sea un diámetro de la circunferencia dada.

7. Trazar una circunferencia por dos puntos dados de forma que la cuerda común con una circunferencia dada sea paralela a una recta dada.

8. Construir un paralelogramo tal que tres de los puntos medios de sus lados son tres puntos dados.

9. Hallar, sobre un cateto de un triángulo rectángulo, un punto equidistante de la hipotenusa y del vértice del ángulo recto.

10. Trazar, con centros dos puntos dados, dos circunferencias iguales tales que una de sus tangentes comunes

    a) pasen por un tercer punto dado.

    b) sea tangente a una circunferencia dada.

11. Por un punto dado, trazar una recta que intercepte a dos circunferencias iguales dadas en dos cuerdas iguales.

12. Dada una circunferencia situada entre dos rectas paralelas, trazarle una tangente que intercepte a las dos rectas paralelas en un segmento de longitud dada.

13. Construir un triángulo rectángulo dados la hipotenusa y la distancia del punto medio de la hipotenusa a un cateto.

14. Construir un triángulo conociendo una altura y los circunradios (es decir, los radios de las circunferencias circunscritas) a los dos triángulos en que esta altura divide al triángulo buscado.

3. Las soluciones

1. Trazar una recta por un punto dado que forme ángulos iguales con los lados de un ángulo dado.

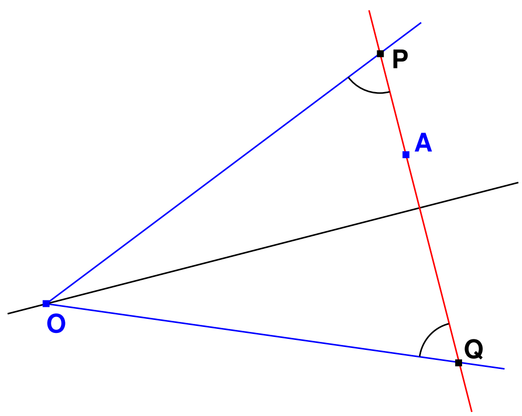

Figura 1

Análisis: Sea, como en la Figura 1, A el punto dado. Si la recta buscada forma ángulos iguales con los lados del ángulo dado, el triángulo OPQ formado por ambos será isósceles. Deducimos entonces que la recta buscada debe ser perpendicular a la bisectriz interior del ángulo dado.

Construcción: Bastará trazar por A una perpendicular a la bisectriz interior del ángulo dado.

Discusión: Para que el problema tenga solución es necesario que la perpendicular a la bisectriz interior por el punto A corte a los lados del ángulo. En consecuencia, de los semiplanos determinados por la bisectriz exterior del ángulo dado, el punto A deberá estar en aquél que contenga a los lados del ángulo. Así, el problema no tendría solución.

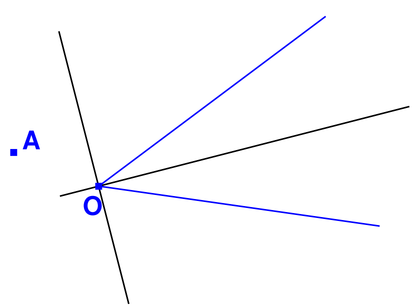

Figura 2

2. Trazar, por un punto dado, una recta, de manera que dos rectas paralelas dadas determinen sobre ella un segmento de longitud dada.

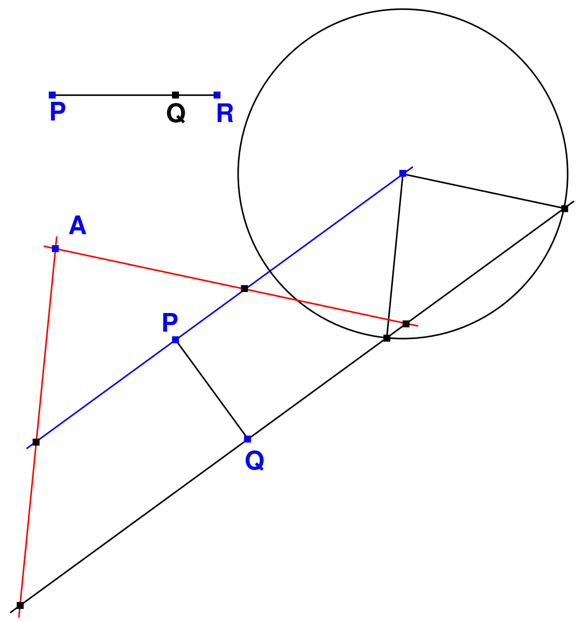

Figura 3

Análisis: En la Figura 3 tenemos el punto dado A, dos rectas paralelas cuya distancia está dada por los puntos P y Q sobre ellas, y una longitud dada $a = PR > PQ$. Observamos que la longitud del segmento interceptado por las dos rectas paralela para una recta cualquiera que pase por A será invariable si cambiamos esta recta por cualquier otra paralela a ella.

Construcción: Trazamos, con centro en cualquier punto de una de las rectas paralelas dadas, una circunferencia con radio la longitud dada. En general, esta circunferencia cortará a la otra recta paralela dada en dos puntos, y estos puntos determinan con el centro dos segmentos de la longitud dada. Ahora bastará trazar paralelas por el punto dado a estos segmentos para obtener dos rectas que son las soluciones del problema.

Discusión: Las dos soluciones mencionadas se convierten en una sola si la longitud dada es igual a la distancia que separa las dos rectas paralelas dadas, y no habrá ninguna solución si la longitud dada es menor a la distancia entre las dos rectas paralelas dadas.

3. Trazar dos cuerdas iguales por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias iguales, una en cada circunferencia, y formando un ángulo dado.

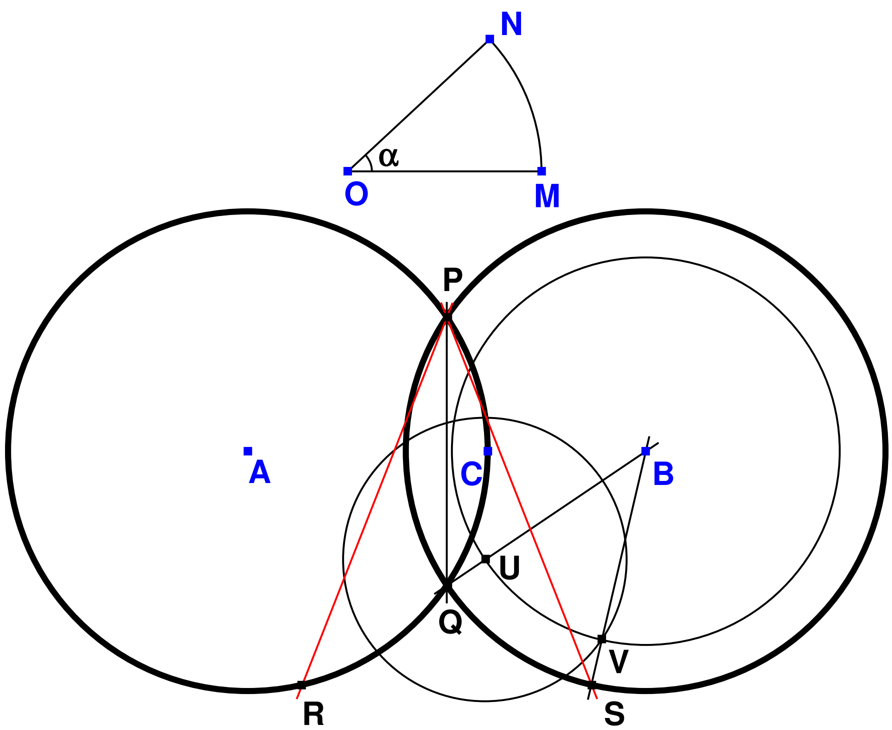

Figura 4

Análisis: En la Figura 4 tenemos dos circunferencias iguales (A) y (B) que se cortan en P y Q. Hemos construido las cuerdas PR y PS formando el ángulo dado $\angle RPS = \alpha$. Observamos que el ángulo inscrito QPW será la mitad del ángulo central QBW, por lo que será suficiente construir un ángulo QBW igual al dado.

Construcción: Dado el ángulo $\alpha = \angle MON$ (con $OM = ON$), trazamos una circunferencia con centro B y radio OM que corta al segmento BQ en U. Ahora con centro en U trazamos un arco con radio MN que corta en V a esa circunferencia con centro en B y radio OM. La intersección de la recta OV con la circunferencia dada de centro B nos da el punto S sobre ella. Si S es el punto simétrico de S respecto de la recta PQ tendremos que $\angle RPS = 2\angle QPS = \angle QBS = \angle UBV = \angle MON = \alpha$.

Discusión: La construcción será posible en todos los casos.

4. Por un punto dado de una circunferencia trazar una cuerda cuya longitud sea el doble que la distancia que la separa del centro de la circunferencia.

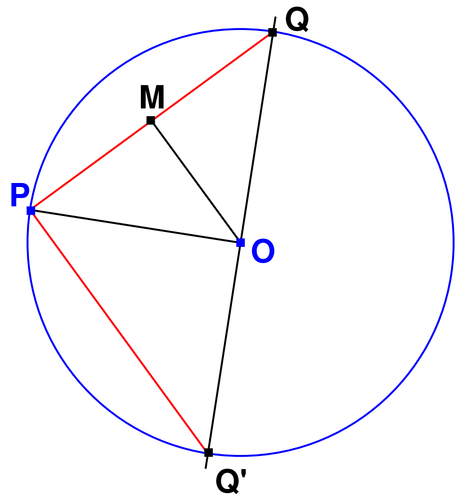

FIGURA 5

ANÁLISIS: Sean P el punto dado sobre una circunferencia (O), PQ la cuerda buscada, y M el punto medio de PQ. Tendremos $2PM = PQ = 2MO$, por lo que $PM = MO$ y el triángulo PMO es rectángulo e isósceles. Entonces es $\angle OPQ = 45°$, y por lo mismo, también es $\angle OQP = 45°$. En consecuencia, el ángulo QOP es recto.

CONSTRUCCIÓN: Unimos PO y trazamos por O la perpendicular a OP. Esta perpendicular cortará a la circunferencia en el punto Q y en su antípoda Q', dando lugar a dos cuerdas solución del problema.

DISCUSIÓN: La construcción será posible en todos los casos, habiendo siempre dos soluciones.

5. Hallar un punto sobre la prolongación de un diámetro dado de una circunferencia tal que las tangentes trazadas desde este punto sean iguales al radio de la circunferencia.

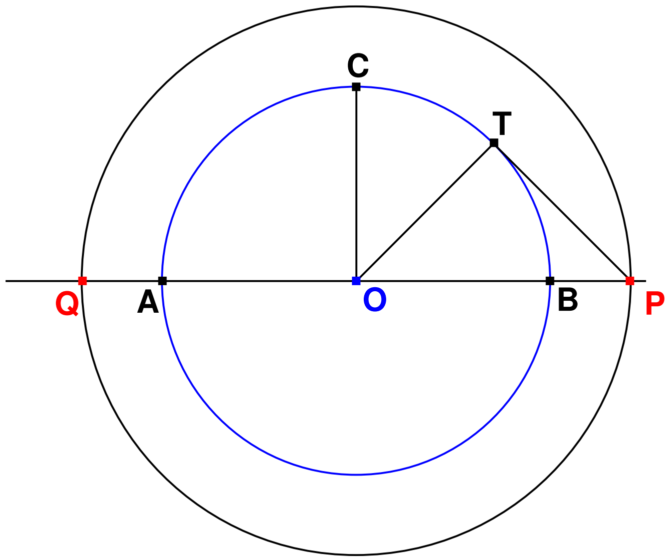

Figura 6

Análisis: En la figura tenemos el diámetro AB de la circunferencia (O) y P es un punto sobre la semirrecta AB cumpliendo la solución, es decir $PT = OT$. Como sabemos, es $\angle OTP = 90°$, por lo que $OP = \sqrt{2} \cdot OT = BC$, siendo OC un radio perpendicular a OB.

Construcción: Trazamos el diámetro OC perpendicular a OB. Con centro O y radio BC trazamos una circunferencia, que cortará a la recta AB en los puntos P y P', soluciones del problema.

Discusión: La construcción será posible en todos los casos, habiendo siempre dos soluciones.

6. Trazar, con centro en un punto dado, una circunferencia que biseque a una circunferencia dada, es decir, tal que la cuerda común sea un diámetro de la circunferencia dada.

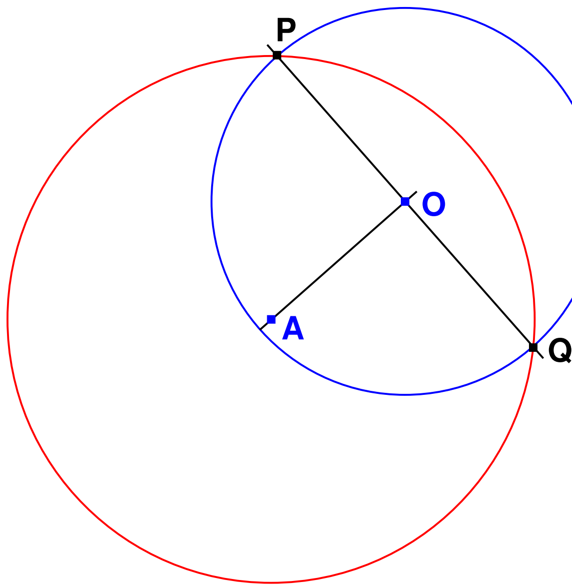

FIGURA 7

ANÁLISIS: Sean A el punto dado y (O) la circunferencia buscada. El diámetro buscado PQ en la circunferencia dada debe ser perpendicular a la recta OA, por lo que está determinado.

CONSTRUCCIÓN: Trazamos por O la recta perpendicular a OA, que corta en P y Q a la circunferencia dada. Estos puntos serán los extremos del diámetro buscado y bastará trazar la circunferencia con centro en A que pasa por cualquiera de ellos.

DISCUSIÓN: El problema siempre tiene solución única, exceptuando el caso en que los puntos O y A coincidan, caso en el que el problema queda indeterminado.

7. Trazar una circunferencia por dos puntos dados de forma que la cuerda común con una circunferencia dada sea paralela a una recta dada.

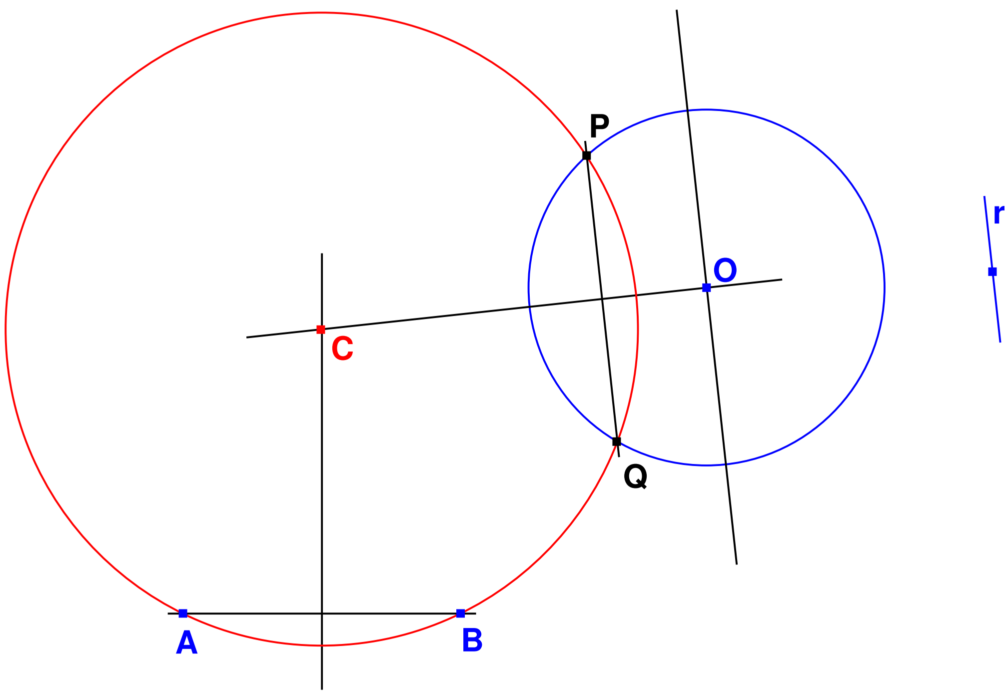

Figura 8

Análisis: Sean A y B los puntos dados, (O) la circunferencia dada y r la recta dada. Teniendo en cuenta que la cuerda común PQ debe ser perpendicular a la recta que une los centros de las dos circunferencias, el centro C de la circunferencias buscada deberá estar en la recta perpendicular por O a la recta dada r. Además, es evidente que C debe estar también en la mediatriz del segmento AB.

Construcción: Trazamos por O una paralela a la recta r, y después una perpendicular, también por O, que cortará a la mediatriz de AB en C. Trazamos la circunferencia con centro C que pasa por A.

Discusión: El punto C no existirá si la recta dada r es paralela a la que pasa por los puntos dados. Una discusión detallada de este problema es bastante complicada, ya que, además hace falta que la circunferencia con centro C que pasa por A corte a la circunferencia dada.

8. Construir un paralelogramo tal que tres de los puntos medios de sus lados son tres puntos dados.

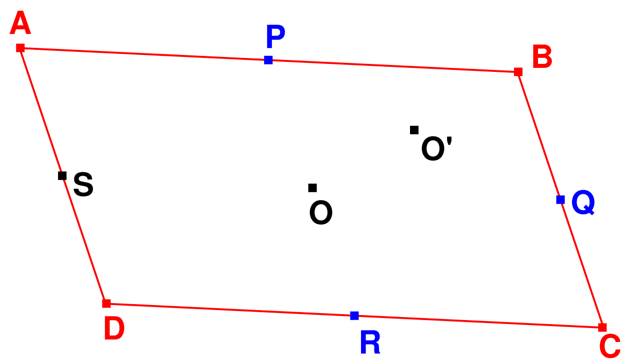

Figura 9

Análisis: Usaremos que los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo, y que las diagonales de un paralelogramo se bisecan una a la otra. Entonces, dados los puntos medios P, Q y R, si O es el punto medio de P y R, el simétrico S de Q respecto de O será otro punto medio del cuadrilátero buscado. También observamos que, por ejemplo, el cuadrilátero $OPBQ$ también es un paralelogramo.

Construcción: Dados los puntos medios P, Q, R hallamos los puntos:

O	Punto medio de P y R
S	Simétrico de Q respecto de O
O'	Punto medio de P y Q
B	Simétrico de O respecto de O'
A	Simétrico de B respecto de P
D	Simétrico de A respecto de S
C	Simétrico de D respecto de R

Discusión: El problema tiene tres soluciones, ya que dados tres puntos podemos completar de tres formas a un paralelogramo que tenga por vértices a esos puntos.

9. Hallar, sobre un cateto de un triángulo rectángulo, un punto equidistante de la hipotenusa y del vértice del ángulo recto.

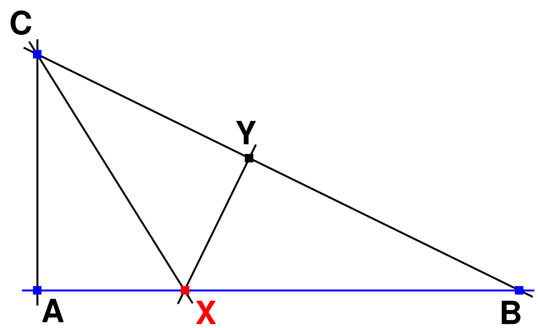

Figura 10

Análisis: En el triángulo ABC rectángulo en A, supongamos que el punto X sobre el lado AC cumple que la distancia XY a la hipotenusa es igual a la distancia AX al vértice del ángulo recto. Entonces, los triángulos rectángulos CAX y CYX tienen la misma hipotenusa e iguales los catetos AX e YX, es decir, son congruentes. Por tanto es $\angle ACX = \angle XCY = \angle XCB$ y AX es la bisectriz interior del ángulo C.

Construcción: Trazamos la bisectriz interior del ángulo C, que corta a AC en el punto buscado X.

Discusión: El problema tiene, según el análisis, solución única.

10. Trazar, con centros dos puntos dados, dos circunferencias iguales tales que una de sus tangentes comunes

a) pasen por un tercer punto dado.

b) sea tangente a una circunferencia dada.

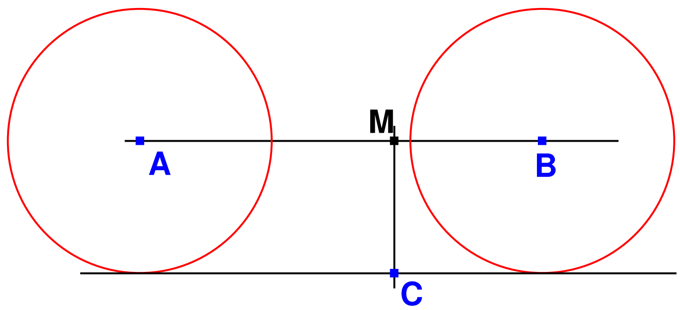

FIGURA 11

ANÁLISIS: En el apartado *a*), basta observar que el radio de las circunferencias buscadas debe ser igual a la distancia entre el punto buscado y la recta que une los centros.

En el apartado *b*), la tangente común a las dos circunferencias, que también debe ser tangente a la tercera circunferencia, es paralela a la recta que une los centros de las dos primeras circunferencias.

CONSTRUCCIÓN: Sean A y B los puntos dados como centros.

En el apartado *a*) (ver Figura 11), si C es un tercer punto, hallamos la proyección M de C sobre la recta AB y trazamos las circunferencias con centros A y B, y radio CM.

Para el apartado *b*)(ver Figura 12), si (D) es la circunferencia dada, la perpendicular por D a AB cortará a la circunferencia (D) dos posibles puntos de tangencia T y T'. La paralela por T o T' a AB será una posible tangente común a las dos circunferencias dadas. Hallamos la perpendicular por A a esta paralelas obteniendo los puntos de tangencia S y S'. Ahora trazamos unas circunferencias con centros A y B y radio AS y otras circunferencias con los mismos centros y radio AS', obteniendo dos pares de soluciones del problema.

DISCUSIÓN: En el apartado *a*) hay solución única en todos los casos.

En el apartado *a*) habrá en general dos soluciones, es decir, dos pares de circunferencias, que se confundirán en una sola cuando el punto D esté sobre la recta AB que une los dos puntos dados.

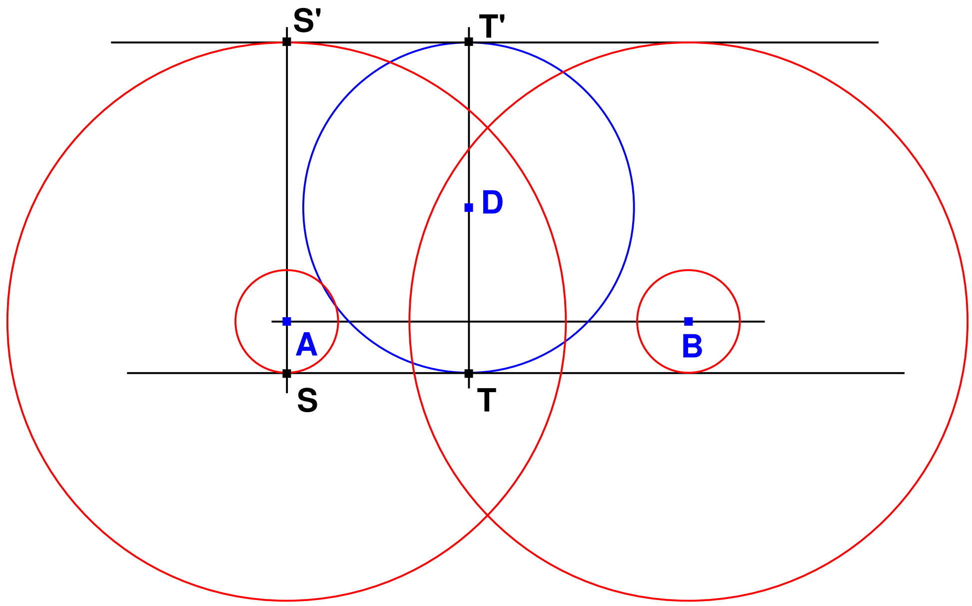

Figura 12

11. Por un punto dado, trazar una recta que intercepte a dos circunferencias iguales dadas en dos cuerdas iguales.

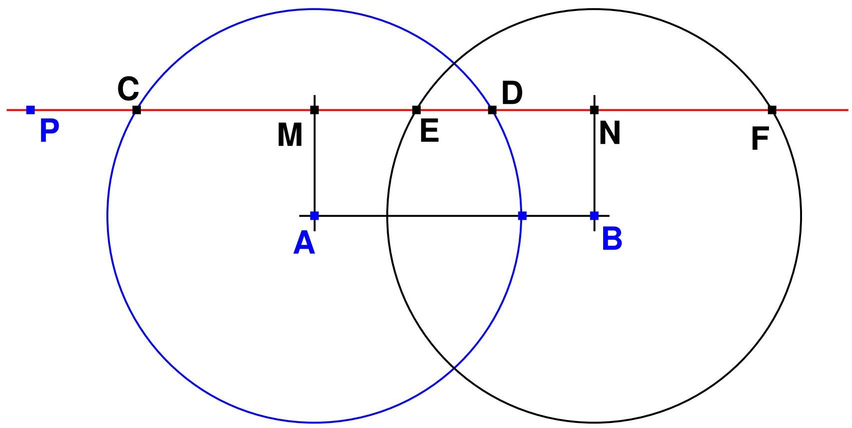

Figura 13

Análisis: Si una recta corta a dos circunferencias iguales en dos cuerdas iguales CD y EF, llamando M y N a los puntos medios de las mismas, tendremos que los segmentos que unen a estos puntos con los centros A y B son iguales y paralelos, por lo que la recta secante debe ser paralela a la recta AB.

Construcción: Trazaremos por el punto dado una recta paralela a la recta que une los centros de las circunferencias dadas.

Discusión: El problema sólo tiene solución si el punto P está situado en la banda paralela a la recta que une los centros limitada por las rectas tangentes comunes a las circunferencias dadas.

12. Dada una circunferencia situada entre dos rectas paralelas, trazarle una tangente que intercepte a las dos rectas paralelas en un segmento de longitud dada.

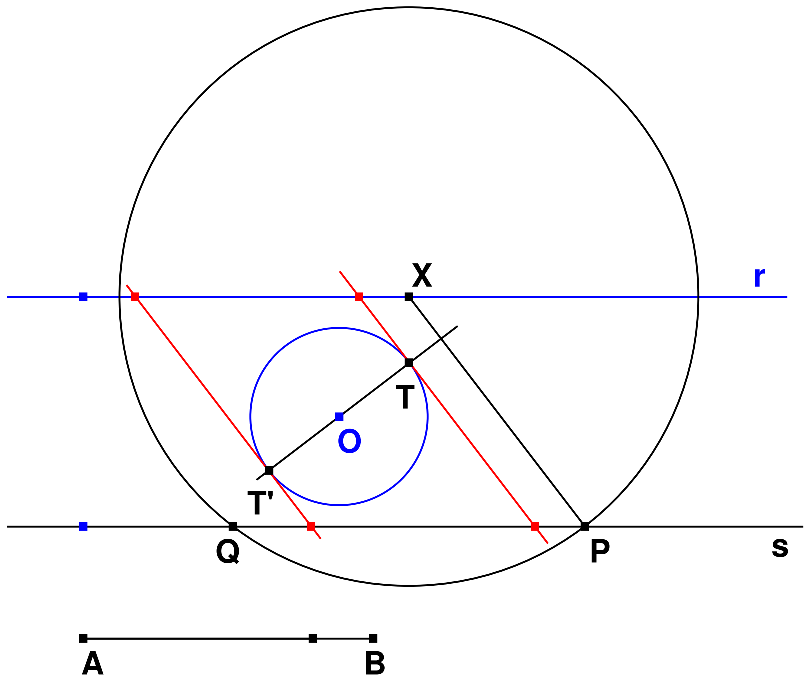

FIGURA 14

ANÁLISIS: Observamos que dos rectas paralelas son interceptadas por un haz de rectas paralelas en segmentos que tienen todos la misma longitud.

CONSTRUCCIÓN: Sean r y s las rectas dadas y (O) la circunferencia dada. Con un punto arbitrario X sobre r como centro trazamos una circunferencia de radio la longitud AB dada, que cortará en P y Q a la otra recta. Las rectas tangentes buscadas son paralelas a XP (mostradas en la figura) y a XQ. Vemos que para hallar los puntos de tangencia T y T' hemos trazado por O la recta perpendicular a XP. Lo mismo se haría con XQ.

DISCUSIÓN: Para que el problema tenga solución es necesario que la longitud dada sea mayor o igual que la distancia que separa a las rectas paralelas dadas. En el caso de la igualdad tendremos dos soluciones y en los restantes casos tendremos cuatro soluciones. Observamos también que la solución es igualmente válida independientemente de la posición de la circunferencia con respecto a las rectas paralelas dadas.

13. Construir un triángulo rectángulo dados la hipotenusa y la distancia del punto medio de la hipotenusa a un cateto.

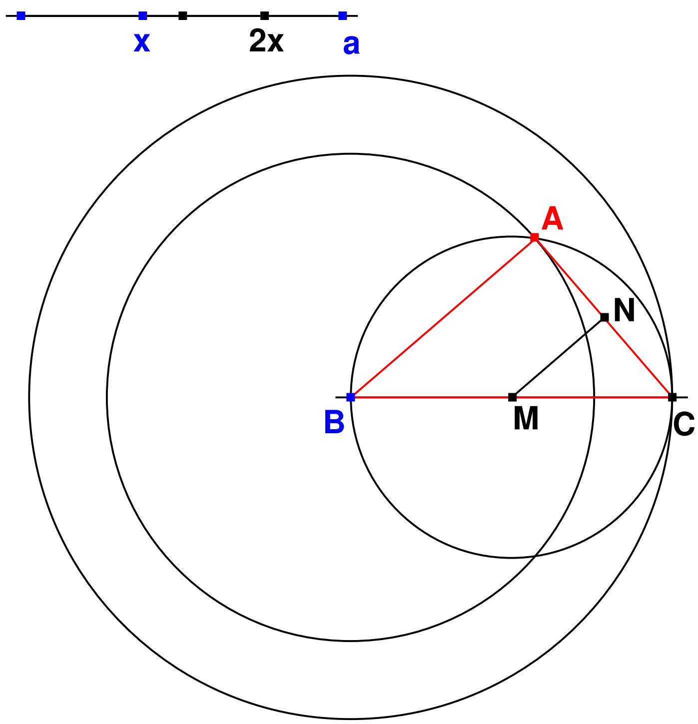

FIGURA 15

ANÁLISIS: En un triángulo rectangulo, la distancia MN del punto medio de la hipotenusa a uno de los catetos es igual a la mitad del otro cateto, por lo que uno de los catetos del triángulo buscado será igual al doble de la distancia dada entre la hipotenusa y el otro cateto.

CONSTRUCCIÓN: Sobre una recta cualquiera fijamos un segmento BC igual al de la hipotenusa dada. Con centro en B trazamos una circunferencia de radio el doble de la distancia dada, que cortará en un punto A a la circunferencia de diámetro BC.

DISCUSIÓN: La distancia dada del punto medio de la hipotenusa a un cateto debe ser menor que la mitad de la hipotenusa dada.

14. Construir un triángulo conociendo una altura y los circunradios (es decir, los radios de las circunferencias circunscritas) a los dos triángulos en que esta altura divide al triángulo buscado.

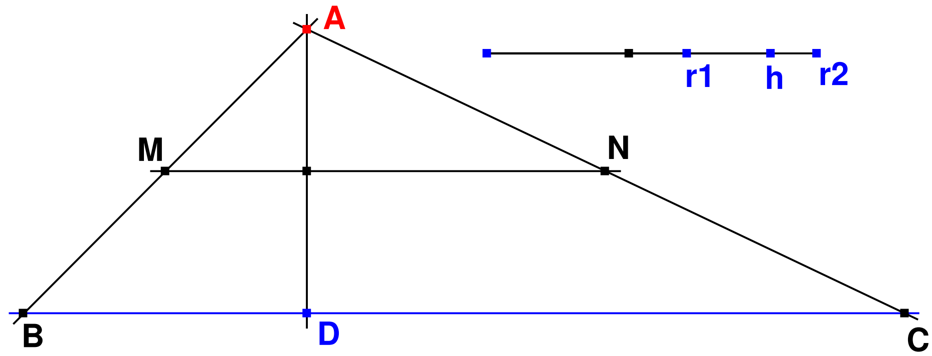

FIGURA 16

ANÁLISIS: Los circunradios dados serán la mitad de los dos lados del ángulo correspondiente a la altura, por lo que podemos construir fácilmente un triángulo homotético al dado (de razón 1/2).

CONSTRUCCIÓN: Sobre una recta cualquiera ℓ marcamos un punto D y levantamos un segmento perpendicular DA igual a la altura dada. Con centro en A trazamos circunferencias con radios los circunradios dados, que cortan a la perpendicular a la mediatriz de AD en los puntos M y N. Las rectas AM y AN cortarán a la recta ℓ en los dos vértices B y C restantes del triángulo buscado.

DISCUSIÓN: Para que el problema tenga solución es necesario que los circunradios dados sean mayores que la mitad de la altura dada.

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI