UNA PRUEBA ELEMENTAL DEL TEOREMA DE PASCAL

Milton F. Donaire Peña

Lima, Perú

En este artículo se presenta una nueva prueba del teorema que el matemático Blaise Pascal $(1623-1662)$ obtuviera a la edad de 16 años, sobre la colinealidad de las intersecciones de los lados opuestos de un hexágono.

Comúnmente tal resultado es conocido como el teorema del hexagráma místico. Con el fín de que tal teorema pueda ser presentado a alumnos de la escuela secundaria, requerimos un teorema previo de J. J. A. Mathieu sobre las rectas isogonales que generalmente se demuestra usando el teorema reíproco del teorema de Ceva en su forma trigonométrica, pero que ahora probaremos también por un nuevo camino para asegurar la prueba elemental del teorema de Pascal.

Definición (Conjugadas Isogonales)

Sean OX y OX' rayos que pasan por el vértice O del ángulo MON simétricos con respecto a la bisectriz del ángulo MON. Entonces OX y OX' se llaman par de rectas isogonales para el ángulo MON.

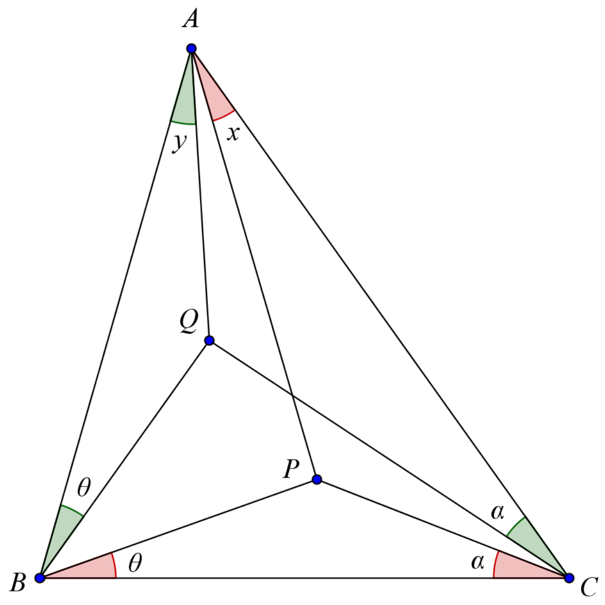

Figura 1: Se cumple que $x = y$

Teorema (J. J. A. Mathieu)

Si BP y BQ son conjugadas isogonales del ángulo CBA del triángulo ABC, y también CP y CQ son conjugadas isogonales para el ángulo ACB, entonces AQ y AP son conjugadas isogonales para el ángulo BAC.

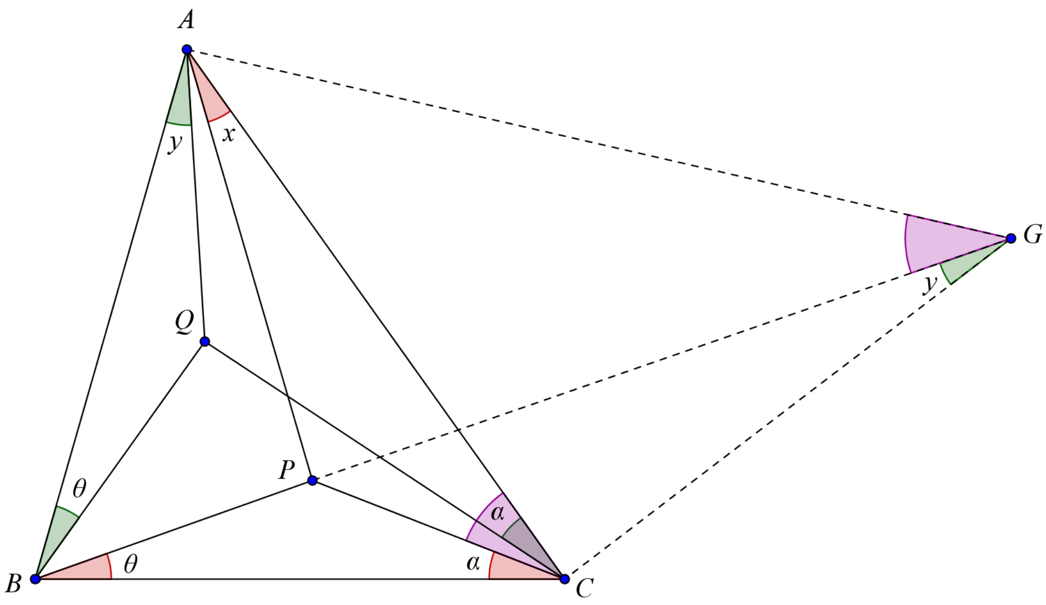

Figura 2: Concurrencia de conjugadas isogonales

Prueba

Prolonguemos BP hasta G de modo que los trángulos BQA y BCG sean semejantes, luego: $\mathrm{m}\angle BGC = \mathrm{m}\angle BAQ = y$.
De allí: $BC = BQ \cdot k$ y $BG = AB \cdot k$ y como $\mathrm{m}\angle CBQ = \mathrm{m}\angle PBA$, tendremos que los triángulos CBQ y GBA también serán semejantes, entonces $\mathrm{m}\angle BCQ = \mathrm{m}\angle BGA$, pero como $\mathrm{m}\angle BCQ = \mathrm{m}\angle PCA$ tenemos que el cuadrilátero $CPAG$ es inscriptible, entonces: $\mathrm{m}\angle PGC = \mathrm{m}\angle PAC$, es decir $x = y$.

Finalmente agregaremos que este documento ha sido elaborado de acuerdo a la demostración del teorema de Pascal que apareció por primera vez en el libro FORMAS Y NÚMEROS - La geometría en las Olimpiadas Matemáticas - (pág. 270), publicada por la Universidad de Ciencias y Humanidades de Perú en enero del 2010.

Teorema de Blaise Pascal

Los puntos P, Y, X de intersección de los tres pares de lados opuestos AQ y BZ, BC y AR, QC y RZ, de un hexágono (no necesariamente convexo), $AQCBZR$, inscrito en una circunferencia están en una recta.[1].

[1] En general el teorema es válido para cualquier cónica y la prueba del teorema general se puede reducir a la forma que mostramos a continuación luego de realizar una conveniente proyección de la cónica en algún plano

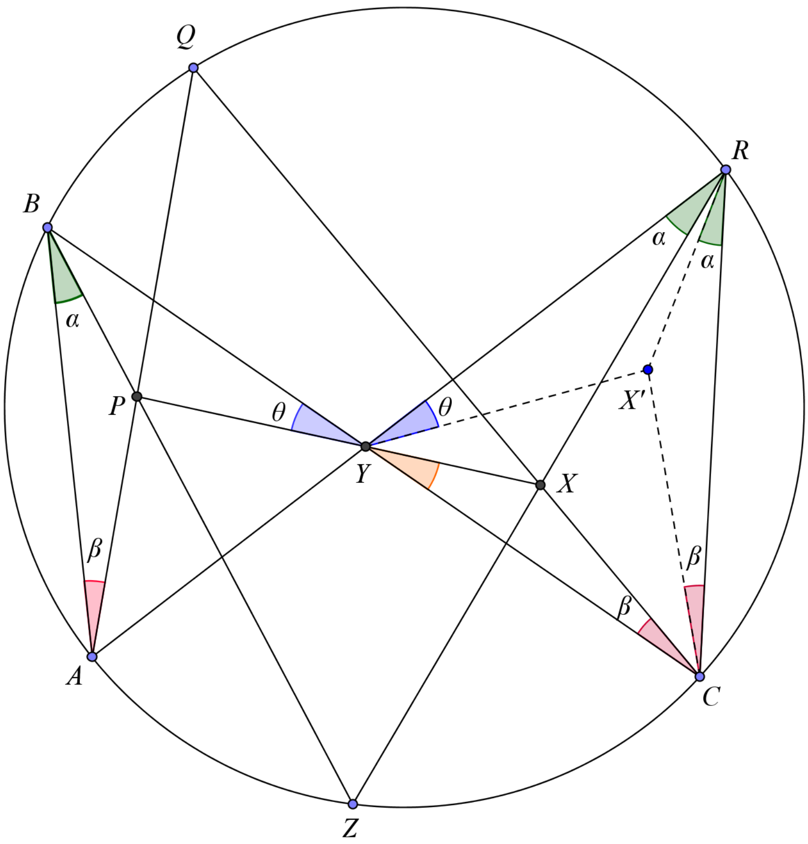

Figura 3: Pascal y las medidas angulares

La Prueba

Los triángulos ABY y CRY son semejantes, pero P y X no son homólogos, entonces construimos el punto X' que sea el homólogo de P, luego m$\angle RYX'$ = m$\angle BYP = \theta$, por el teorema anterior m$\angle XYC$ será igual a θ y por lo tanto P, Y, X son colineales.

BIBLIOGRAFÍA

[1] Eves, Howard *Estudio de todas las geometrías.* Hispano - Américana. México. 1969.
[2] Frére Gabriel Marie. *Exercises de Geómétrie.* J. Gigord. París. 1920.
[3] Donaire, Milton *Formas y Números. La geometría en las olimpiadas Matemáticas.* Universidad de Ciencias y Humanidades. Perú 2010.
[4] Barroso, Ricardo http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/
[5] Ayme, Jean Louis http://pagesperso-orange.fr/jl.ayme/contenu.html
[6] Capitán, García http://garciacapitan.auna.com/index.htm