

Soluciones oficiales de los problemas de la Olimpiada PanAfricana del año 2000.

Problema 3

Sean a, b, c números reales tales que

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (1).$$

Resolver el sistema (incógnitas x, y, z) :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 & (2) \\ (x+a)^2 + (y+b)^2 = (z+c)^2 & (3) \end{cases}$$

Solución

Si $c = 0$, entonces también $a = b = 0$. En ese caso las dos ecuaciones son iguales, y la solución es x, y arbitrarias, y $z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$.

Consideremos el caso $c \neq 0$. Restando (1) y (2) de (3), obtenemos

$$ax + by = cz \quad (4).$$

Multiplicando (1) por (2) y restando el cuadrado de (4) obtenemos

$$b^2x^2 - 2abxy + a^2y^2 = (bx - ay)^2 = 0.$$

Por lo tanto, $bx - ay = 0$. En función de un parámetro real arbitrario t , se tiene

$$x = at, y = bt$$

y por (4),

$$z = \frac{a^2t + b^2t}{c} = ct.$$

Se comprueba sin dificultad que (at, bt, ct) verifica ambas ecuaciones.

Notas : Este problema fué propuesto por Burkina Fasso. Los criterios de puntuación aplicados fueron :

Obtener cualquier solución correcta uniparamétrica en el caso general, 4 puntos.

Encontrar la forma más simple, 1 punto.

Comprobar que las soluciones obtenidas verifican las ecuaciones, 1 punto.

Tratar el caso $c = 0$, 1 punto.

Problema 2

Los polinomios P_0, P_1, P_2, \dots se definen mediante

$$P_0(x) = x^3 + 213x^2 - 67x - 2000,$$

$$P_n(x) = P_{n-1}(x - n), n = 1, 2, 3, \dots$$

¿Cuál es el coeficiente de x en $P_{21}(x)$?

Solución

Se tiene, sucesivamente,

$$P_1(x) = P_0(x - 1)$$

$$P_2(x) = P_1(x - 2) = P_0(x - (2 + 1)),$$

$$P_3(x) = P_2(x - 3) = P_0(x - (3 + 2 + 1)),$$

...

$$P_n(x) = P_0(x - (n + (n - 1) + \dots + 2 + 1)) = P_0\left(x - \frac{1}{2}n(n + 1)\right),$$

$$P_{21}(x) = P_0(x - 231) = (x - 231)^3 - 213(x - 231)^2 - 67(x - 231) - 2000$$

Por lo tanto el coeficiente buscado es

$$3 \cdot 231^2 - 2 \cdot 213 \cdot 231 - 67 = 231(693 - 426) - 67 = 231 \cdot 267 - 67 = 61610.$$

Nota : también propuesto por Burkina Fasso, los criterios de puntuación fueron:

Obtener la expresión $P_n(x) = P_0\left(x - \frac{1}{2}n(n + 1)\right)$, 4 puntos.

Hallar una expresión correcta para el coeficiente de x , 2 puntos.

Evaluar el resultado, 1 punto.

Problema 6

Una compañía tiene cinco directores. Las reglas de la compañía requieren que cualquier mayoría (tres o más) de directores sea capaz de abrir su caja fuerte, pero cualquier minoría (dos o menos) de directores no pueda hacerlo. Se propone equipar la caja fuerte con 10 cerraduras, de manera que solamente pueda ser abierta con las llaves de las diez cerraduras, y dar a cada director un conjunto de n llaves distintas. Hallar todos los valores de n para los que hay una forma de distribuir las llaves de acuerdo con las reglas de la compañía.

Solución

Llamemos a los directores A, B, C, D y E, y numeremos las llaves de 1 a 10. Ya que $\{A, B\}$ no puede abrir la caja por ellos mismos, existe una llave que ninguno de esos dos directores tiene. Cada uno de los directores C, D y E debe tener esa llave, porque $\{A, B, C\}$, $\{A, B, D\}$ y $\{A, B, E\}$ sí pueden abrir la caja fuerte. Por simetría, cada subconjunto de tres directores tiene una llave crítica en común que los otros dos no tienen. Esas llaves críticas son todas distintas, y hay exactamente tres copias de cada llave crítica.

Hay $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = 10$ subconjuntos de tres directores. Demos a cada llave una etiqueta con los nombres de una combinación diferente de tres directores, y demos una copia de la llave a cada director cuyo nombre aparece en la etiqueta. Todas las llaves han sido contadas, y no hay llaves extra excepto por lo que se refiere a las llaves críticas. Hay $10 \times 3 = 30$ llaves en total, así que $n = 6$.

Falta por comprobar que cualquier subconjunto $\{A, B, C\}$ tiene en efecto las 10 llaves. Esto es así, porque hay tres copias de cada llave y D y E no pueden tener más de dos copias.

Por lo tanto las llaves pueden ser distribuidas según las reglas de la compañía si y sólo si $n = 6$.

Nota: Problema propuesto por Uganda; los criterios de puntuación fueron:

Encontrar la distribución de las llaves cuando $n = 6$, 3 puntos.

Verificar que la distribución funciona, 1 punto.

Demostrar que si $n \neq 6$ no hay solución, 3 puntos.

Problema 3

Demostrar que si

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335},$$

donde p y q son números naturales, entonces 2003 divide a p .

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{p}{q} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335} - 2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335} - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{667}\right) \\
&= \frac{1}{668} + \frac{1}{669} + \frac{1}{670} + \dots + \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335} \\
&= \left(\frac{1}{668} + \frac{1}{1335}\right) + \left(\frac{1}{669} + \frac{1}{1334}\right) + \left(\frac{1}{670} + \frac{1}{1333}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1001} + \frac{1}{1002}\right) \\
&= \frac{2003}{668 \times 1335} + \frac{2003}{669 \times 1334} + \frac{2003}{670 \times 1333} + \dots + \frac{2003}{1001 \times 1002} \\
&= 2003 \cdot \frac{p'}{q'},
\end{aligned}$$

siendo

$$\frac{p'}{q'} = \frac{1}{668 \times 1335} + \dots + \frac{1}{1001 \times 1002}.$$

Por lo tanto, es suficiente demostrar que 2003 es primo, ya que cuando la fracción p'/q' se escribe en su forma más simplificada, los factores primos de q' son todos menores que 2003. Esto puede hacerse comprobando todos los posibles factores primos hasta 43, ya que $2003 < 2025 = 45^2$. Resulta

$$\begin{aligned}
2003 &= 2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 3 \cdot 23 \cdot 29 + 2 \\
&= 5 \cdot 400 + 3 = 17 \cdot 117 + 14 = 19 \cdot 105 + 8 \\
&= 31 \cdot 64 + 19 = 37 \cdot 54 + 5 = 41 \cdot 48 + 35 = 43 \cdot 46 + 25,
\end{aligned}$$

así que 2003 es primo.

Nota: Este problema fué propuesto por Sudáfrica, y los criterios de puntuación fueron:

Obtener $\frac{p}{q} = \frac{1}{668} + \frac{1}{669} + \frac{1}{670} + \dots + \frac{1}{1334} + \frac{1}{1335}$, 2 puntos.

Obtener $\frac{p}{q} = \frac{2003p'}{q'}$, 2 puntos.

Mostrar que es suficiente demostrar que 2003 es primo, 1 punto.

Mostrar que 2003 es primo, 2 puntos.

Problema 5

Desde un punto P exterior a una circunferencia, se trazan las tangentes PA y PB. PQR es cualquier secante, estando Q y R sobre la circunferencia. La cuerda BS es paralela a PQR. Probar que SA biseca QR.

Solución

Sea O el centro de la circunferencia. Consideraremos dos casos, según que O y A estén a distinto lado de QR o estén en el mismo lado de QR. La demostración que sigue vale en ambos casos.

Supongamos que SA y QR se cortan en T; trazamos los segmentos OA, OB y OP. Entonces $\widehat{ATP} = \widehat{ASB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$. Por simetría, los triángulos OAP y OBP son iguales y de aquí que $\widehat{AOP} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$.

Por lo tanto OTAP es un cuadrilátero cíclico (la cuerda AP subtende ángulos iguales) y $\widehat{OTP} = \widehat{OBP} = 90^\circ$ ya que AP es una tangente. Pero $\widehat{OTQ} = 90^\circ$ implica que T es el punto medio de la cuerda QR.

Nota : este problema fué propuesto por Sudáfrica ; admite una solución con números complejos; los criterios de puntuación de la solución expuesta fueron:

Observar que hay que distinguir dos casos, 1 punto.

Identificar el cuadrilátero cíclico, 4 puntos.

Deducir que $\widehat{OTQ} = 90^\circ$, 1 punto.

Observar que $\widehat{OTQ} = 90^\circ$ resuelve el problema, 1 punto.

El problema 1 es un ejercicio muy sencillo, cuya solución se deja a los lectores de la Revista Escolar de la O.I.M.