Generalización de un problema de la Olimpiada Matemática Pan-africana, 2000.

Una compañía tiene $2n+1$ directivos. Las reglas de la compañía requieren que cualquier mayoría ($n+1$ o más) de directivos pueda abrir la caja fuerte, pero que ninguna minoría (n o menos) de directivos la pueda abrir. Se propone equipar la caja fuerte con c cerrraduras, de tal manera que la caja fuerte sólo se pueda abrir cuando estén disponibles las llaves de todas las cerraduras, y dar a cada directivo un conjunto de llaves distintas. Cada directivo debe tener el mismo número de llaves.

¿Cuál es el mínimo número de cerraduras c con el que hay que equipar a la caja fuerte para que la anterior distribución sea posible?

¿Cuál es el número l de llaves se darían a cada directivo en caso de utilizar dicho número mínimo de cerraduras?

Sea A el conjunto formado por los conjuntos de exactamente n directivos distintos de la compañía. El número de elementos de A es, obviamente:

$$\operatorname{card}(A)=\binom{2n+1}{n}.$$

Sean ahora a_1, a_2 dos elementos distintos cualesquiera de A. Llamaremos B_1, B_2 a los conjuntos de cerraduras que no pueden ser abiertas juntando todas las llaves de los directivos que pertenecen a a_1 y a_2, respectivamente. Como a_1 y a_2 son distintos, su unión tiene por lo menos $n+1$ directivos, y constituye una mayoría, con lo que juntando todas sus llaves se pueden abrir todas las cerraduras. Ahora bien, juntando todas sus llaves, se pueden abrir todas las cerraduras excepto la intersección de B_1 y B_2. Luego B_1 y B_2 son disjuntos. Luego para cada elemento de A, existe al menos una cerradura que no puede ser abierta por los directivos que lo componen, y que además puede ser abierta por los directivos (pero no necesariamente todos) que componen cualquier otro elemento de A. Debe haber por lo tanto un número de cerraduras mayor o igual al cardinal de A:

$$c\geq\binom{2n+1}{n}.$$

Nótese que la igualdad se da si y solamente si existe exactamente una cerradura que no puede ser abierta juntando las llaves de todos los directivos de cada elemento de A.

Supongamos que se da la igualdad, y sea a un elemento cualquiera de A. Para la cerradura que no puede ser abierta por los directivos que conforman a, todos los demás directivos deben tener copia de la llave que la abre. En caso de existir otro directivo, no de a, que no tuviera copia de dicha llave, uniéndolo a los directivos de a se tendría un conjunto de n+1 directivos, es decir, una mayoría, que no podría abrir dicha cerradura, que es absurdo. Luego para cada cerradura existen exactamente n+1 copias de la llave que la abre. El número de llaves que deben ser dadas a cada directivo es entonces:

$$l = \frac{\text{cerraduras} \cdot \text{copias de cada llave}}{\text{directivos}} = \frac{\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!} \cdot (n+1)}{2n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \binom{2n}{n}.$$

La distribución se puede hacer trivialmente como sigue: numeraremos $a_1,a_2,\ldots,a_c$ a los elementos de A, y $b_1,b_2,\ldots,b_c$ a las cerraduras. Daremos copias de la llave b_i a un directivo si y sólo si no pertenece a a_i, es decir, hay exactamente n+1 copias de cada llave que se han entregado a n+1 directivos distintos. Demostraremos ahora que en dicho caso las condiciones del problema se cumplen.

Supongamos que una mayoría no puede abrir la caja fuerte, pues no tiene llave para una cerradura b. Entonces, se tiene que el número de directivos en dicha mayoría, que es mayor o igual que n+1, más el número de directivos que tiene copia de la llave que abre b, que es exactamente n+1, sumarían al menos 2n+2, que es mayor que el número total de directivos, que es absurdo. Luego cada mayoría puede abrir la caja fuerte.

Sea una minoría cualquiera. Obviamente, al tener como máximo n directivos, es subconjunto de al menos un elemento a_i de A. Pero los directivos de a_i no pueden abrir b_i ni aún juntando todas sus llaves, luego ninguna minoría puede abrir la caja fuerte.

Nótese finalmente que, por la forma en la que se han repartido las llaves, y al pertenecer cada directivo al mismo número de elementos de A, que por simetría todos los directivos poseen el mismo número de llaves.

Luego todas las reglas de la compañía se cumplen, y el número mínimo de cerraduras a instalar en la caja fuerte, c, y el número de llaves que cada directivo tiene en ese caso, l, son:

$$c = \binom{2n+1}{n}; \qquad l = \binom{2n}{n}.$$

Revista Escolar de la Olimpíada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revistaoim/

Edita:

OEI