

UN PROBLEMA DE LA OLIMPIADA URSS

En la ciudad de “Camorra” hay 10000 habitantes. Dos cualesquiera de ellos o son amigos, o son enemigos.

Cada día, a lo sumo uno de sus habitantes se pelea con todos sus amigos y, simultáneamente, se hace amigo de todos sus enemigos; además de esto, en cualquier conjunto de tres habitantes, los tres se hacen amigos entre sí.

Demostrar que en un cierto número de días, todos los habitantes son amigos. ¿Cuál es el menor número de días suficiente para ello?

SOLUCIÓN

Sean A, B y C tres habitantes cualesquiera de la ciudad. Es evidente que puede suceder que los tres sean amigos; también es posible que uno de ellos (pongamos A) no sea amigo de B ni de C, pero B y C sean amigos.

Entonces, para que A, B y C sean amigos, es suficiente que A se pelee con todos sus amigos y luego se haga amigo de todos sus enemigos.

También es fácil ver que los otros dos casos posibles,

- los tres habitantes, A, B y C son enemigos;
- uno de los habitantes (A) es amigo de B y C, pero B y C son enemigos;

son imposibles. En efecto, en ambos casos, entre los tres pares (A,B),(A,C),(B,C) de los habitantes de la ciudad, existe un número impar c (igual a 3 ó a 1) de parejas de enemigos, y un número par e (igual a 0 ó a 2) de pares de amigos. En todos los casos en que A,B ó C se pelean con todos sus amigos y se hacen amigos de sus enemigos, el número impar c y el número par e o no cambian o son reemplazados por un número impar c' y un número par e' , respectivamente. Luego de aquí se deduce que las tres personas A,B y C no pueden hacerse amigos, porque c no puede ser igual a 0.

La descripción de las *relaciones de amistad* entre tres personas A,B,C muestra que para la población entera esas relaciones pueden describirse de la manera siguiente:

Hay dos grupos de habitantes, M,N tales que cada uno de los habitantes de la ciudad pertenecen a M o a N (pero no a los dos), tales que dos elementos cualesquiera de una de ellas son amigos, y dos habitantes pertenecientes uno a M y otro a N son enemigos.

Probemos esta afirmación. En efecto, añadamos a los tres habitantes A,B,C otro habitante D. Si A y B son amigos, y D es amigo de, al menos, uno de ellos, entonces D también es amigo de ambos, y uno de los grupos está formado por A,B,D.

Si A y B son enemigos, entonces D es amigo solamente de uno de ellos. Este argumento demuestra que es posible dividir (A,B,C,D) en las dos partes, M y N (alguna de ellas puede ser vacía, por ejemplo cuando todos son amigos). Procediendo de esta forma, añadiendo consecutivamente nuevas personas al

grupo, se prueba la posibilidad de dividir los 10000 habitantes en los dos grupos M y N.

Ahora estamos en condiciones de probar la afirmación del problema. Si todos los habitantes son amigos, no hay nada que demostrar. Si ninguna de las dos partes M y N es vacía, entonces es suficiente que cada día uno de los miembros de M deje el grupo y se una al otro grupo, N. Si el número de elementos de M es k , entonces todos los habitantes de la ciudad se pueden convertir en amigos en k días. Se sigue entonces que el período de 5000 días (aproximadamente 14 años) es suficiente para que todos los habitantes de la ciudad sean amigos, pues al menos una de las partes M ó N no puede tener más de 5000 personas.

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

