

# SOBRE UN PROBLEMA DE DISTANCIA MAXIMAL, DE TUDOR ZAMFIRESCU

LAURENȚIU MODAN

Department of Mathematics, Faculty of Computer Science,  
Academy of Economic Studies, Bucharest,

E-mail: [modanl@infosec.ase.ro](mailto:modanl@infosec.ase.ro)

*Abstract.* This paper looks for answering to a question proposed in May 2002, by the professor T. Zamfirescu from Dortmund University and relative to a maximal distance between two points belonging to a given curve ( $\Gamma$ ).

*MS classification:* 05C12, 51K05.

En el 6º Encuentro Anual de la Sociedad Rumana de Matemáticas, celebrado en la Universidad de Sibiu en Mayo de 2002, el Profesor T. Zamfirescu propuso como problema abierto hallar los dos puntos más lejanos, situados en la frontera de la sección de una patata.

Intenté dar una solución usando únicamente nociones de *Teoría de Grafos*. Pero, como veremos en lo que sigue, las dificultades que surgen son considerables.

En primer lugar, independientemente de si la curva frontera ( $\Gamma$ ) de la sección es convexa o cóncava, debemos fijar sobre ella  $n$  puntos. Uniéndolos obtenemos un grafo, que es un circuito  $C_n=(V,E)$  con  $n$  aristas. Además, este grafo es 2-regular, con un valor propio  $\mathbf{I}_1=1$ , y los demás cumpliendo la propiedad  $|\mathbf{I}_k| \leq 1$  (ver [1]). Debemos observar que ni  $\mathbf{I}_k$  ( $\forall k \in \mathbf{N}^*$ ), ni la matriz de adyacencia de  $C_n$  puede dar información sobre la distancia entre vértices de  $C_n$ .

Por otra parte, desearíamos usar en nuestro análisis, las nociones de *diámetro*, o *excentricidad* in grafos (ver [2]). Pero tampoco van a ser muy útiles para nuestro objetivo, porque la excentricidad de un vértice es:

$$e(x) = \max_{y \in V} d(x, y),$$

el diámetro es:

$$\text{diam}(G) = \max_{x, y \in V} d(x, y),$$

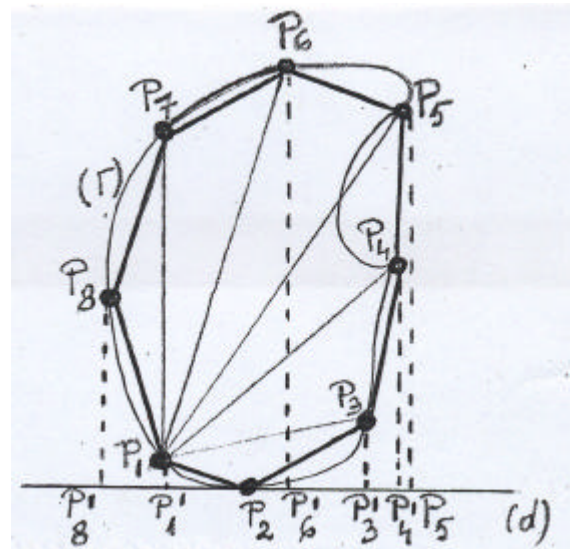
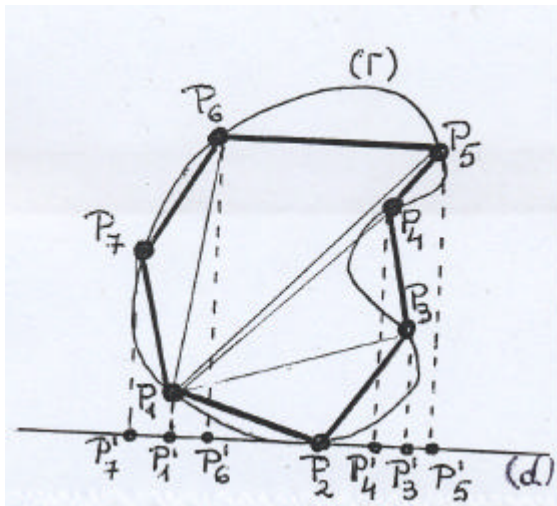
donde:

$$d(x, y) = \text{mínimo número de aristas entre } x, y \in \mathbf{I} V,$$

y actúan sólo a lo largo del conjunto de aristas, como nociones cualitativas, sin dar información sobre los vértices.

En lo que sigue, combinaremos técnicas de *Teoría de Grafos* y de *Geometría* para resolver el problema expuesto. Fijaremos  $P_1$ , uno de los  $n$  puntos. Luego uniremos  $P_1$  con todos los demás  $n-1$  puntos situados en la frontera. Obtenemos así  $n-2$  triángulos. Las mayores distancias aparecen, intuitivamente, en los lados del triángulo situado en medio, cuando  $n=2k$ , o en los lados de los dos triángulos situados en medio, cuando  $n=2k+1$ , como podemos ver en los dos casos de la **Figura**.

Continuaremos nuestro procedimiento eligiendo un vértice  $P_2$ , adyacente a  $P_1$ , en el ciclo  $C_n$ . Trazando entonces por  $P_2$  una cierta dirección ( $d$ ), proyectaremos sobre ella todos los demás vértices  $P_1, P_3, \dots, P_n$ . Sean  $P'_1, P'_3, \dots, P'_n$  las proyecciones sobre ( $d$ ). Nos fijamos en la proyección más lejana desde  $P'_1$ . Sea esa  $P'_k$ . Entonces, la mayor distancia entre dos puntos de la curva ( $\Gamma$ ), una vez que  $P_1$  ha sido elegido, es  $P_1P_k$ . Si queremos investigar todos los puntos de la curva ( $\Gamma$ ), como frontera de la sección, hemos de considerar  $\sup_{P \in (\Gamma)} PP_k$ , que nos dará la máxima distancia buscada.



**Figura**

**Observación.** i) Si conocemos las ecuaciones paramétricas de la curva  $(\Gamma)$ , a saber:

$$(\Gamma): \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in I \subseteq \mathbf{R},$$

podremos encontrar la distancia maximal entre dos de sus puntos usando la teoría de extremos condicionados (ver[3]). Por lo tanto, sea el punto fijo  $P_1(x_0, y_0) \in (\Gamma)$ , el punto variable  $P(x, y) \in (\Gamma)$ , y la distancia euclídea:

$$d(x, y) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}.$$

Para esta distancia  $d$ , con las condiciones dadas por:

$$P_1(x_0, y_0) \in (\Gamma), P(x, y) \in (\Gamma),$$

podemos aplicar el método de los multiplicadores de Lagrange. Como antes, al final, hay que considerar  $\sup_{P \in (\bar{A})} PP_1$ .

ii) Se podría plantear este tipo de problema preguntando la distancia máxima entre los puntos de una curva  $(\Gamma)$ , descrita por los participantes de una competición de patinaje de velocidad o pidiendo encontrar los puntos de óptima iluminación en un área grande de frontera  $(\Gamma)$ , con sólo dos reflectores.

## REFERENCIAS

- [1] Biggs N. „Algebraic graph theory” Cambridge University Press, 1974;
- [2] Bollobás B. „Extremal graph theory”, Academic Press, 1978;
- [3] Modan L. „Real differential calculus” (in Romanian), Cison, Bucharest, 2002.

# Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

[http://www.campus-oei.org/oim/revista\\_oim/](http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/)

Edita:

