

La desigualdad de Euler a partir de otras desigualdades entre elementos de un triángulo.

Este artículo es continuación del publicado en el número 5 (enero-febrero 2003). En esta segunda parte se establecen seis desigualdades geométricas y dos trigonométricas, elementales las ocho, de las que se deduce inmediatamente la desigualdad de Euler.

Las notaciones que se hacen servir son las habituales para un triángulo ABC .

$$8. \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \geq \frac{2}{R}$$

Multiplicando miembro a miembro las siguientes desigualdades

$$a = (s-b) + (s-c) \geq 2\sqrt{(s-b)(s-c)}$$

$$b = (s-c) + (s-a) \geq 2\sqrt{(s-c)(s-a)}$$

$$c = (s-a) + (s-b) \geq 2\sqrt{(s-a)(s-b)}$$

resulta

$$abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$$

que, habida cuenta de la fórmula

$$r^2 s = (s-a)(s-b)(s-c), \quad (1)$$

obtenida a partir de la Herón y de la expresión rs para el área del triángulo, escribimos equivalentemente en la forma

$$\frac{1}{2rs} \geq \frac{4r}{abc}.$$

Multiplicando ambos miembros de esta última por

$$a+b+c = 2s \quad (2)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{a+b+c}{2rs} &\geq 2 \cdot \frac{4rs}{abc} \\ &= \frac{2}{R} \quad (\text{pues } abc = 4Rrs \quad (3)) \end{aligned}$$

Resta tan sólo observar que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= \frac{a}{2rs} + \frac{b}{2rs} + \frac{c}{2rs} \quad (\text{por (2)}) \\ &= \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \quad (rs = \frac{1}{2}ah_a, \text{ etc}) \end{aligned}$$

para obtener la desigualdad enunciada.

Tal desigualdad es equivalente a

$$9. \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \geq \frac{2}{R}$$

donde r_a, r_b, r_c son los radios de las circunferencias excritas al triángulo ABC .

En efecto, a partir de las conocidas relaciones

$$r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c) = rs$$

resulta inmediatamente

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} &= \frac{s-a}{rs} + \frac{s-b}{rs} + \frac{s-c}{rs} \\ &= \frac{1}{r} \end{aligned}$$

$$10. \quad 6 \leq \frac{r_a+r_b}{r_c} + \frac{r_b+r_c}{r_a} + \frac{r_c+r_a}{r_b} = \frac{4R-2r}{r}$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{r_a+r_b}{r_c} + \frac{r_b+r_c}{r_a} + \frac{r_c+r_a}{r_b} &= \left(\frac{r_a}{r_b} + \frac{r_b}{r_a} \right) + \left(\frac{r_b}{r_c} + \frac{r_c}{r_b} \right) + \left(\frac{r_c}{r_a} + \frac{r_a}{r_c} \right) \\ &\geq 2 + 2 + 2 \\ &= 6 \end{aligned}$$

Por otra parte, a partir de las relaciones (2), (3) y $ab+bc+ca = r^2 + s^2 + 4Rr$ y siendo

$$\frac{r_a+r_b}{r_c} = \frac{\frac{s-a}{rs} + \frac{s-b}{rs}}{\frac{s-c}{rs}} = \frac{c}{s-c}$$

y cíclicamente, resulta

$$\begin{aligned}
\frac{r_a+r_b}{r_c} + \frac{r_b+r_c}{r_a} + \frac{r_c+r_a}{r_b} &= \frac{c}{s-c} + \frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} \\
&= \frac{(a+b+c)s^2 - 2(ab+bc+ca)s + 3abc}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\
&= \frac{2s \cdot s^2 - 2s(r^2 + s^2 + 4Rr) + 12Rrs}{r^2s} \\
&= \frac{4R-2r}{r}
\end{aligned}$$

$$11. \quad 9r \leq r_a + r_b + r_c \leq \frac{9R}{2}$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
r_a + r_b + r_c &= \frac{rs}{s-a} + \frac{rs}{s-b} + \frac{rs}{s-c} \\
&= r \cdot [(s-a) + (s-b) + (s-c)] \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \right) \\
&\geq r \cdot 9,
\end{aligned}$$

que es la primera desigualdad.

La segunda puede escribirse en la forma

$$\frac{rs}{s-a} + \frac{rs}{s-b} + \frac{rs}{s-c} \leq \frac{9abc}{8rs}$$

que es equivalente a

$$9abc - 8r^2s^2 \left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \right) \geq 0$$

la cual, en función de $x = s - a > 0$, $y = s - b > 0$, $z = s - c > 0$ se escribe

$$9(x+y)(y+z)(z+x) - 8xyz(x+y+z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 0$$

reduciéndose a

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 - 6xyz \geq 0.$$

La validez de esta última se establece inmediatamente a partir de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica: en efecto,

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 \geq 6\sqrt{(x^2y)(x^2z)(xy^2)(xz^2)(y^2z)(yz^2)}$$

$$= 6xyz$$

$$12. \quad 3R \leq a \cdot \tan \frac{A}{2} + b \cdot \tan \frac{B}{2} + c \cdot \tan \frac{C}{2} \leq 5R - 4r$$

Si expresamos en función $x = s - a > 0$, $y = s - b > 0$, $z = s - c > 0$ las tangentes de los semiángulos así como las longitudes que aparecen, obtenemos

$$3 \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}} \leq \sum (y+z) \sqrt{\frac{yz}{(x+y+z)x}} \leq 5 \frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{4\sqrt{(x+y+z)xyz}} - 4\sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}}$$

que se reduce a

$$3(x+y)(y+z)(z+x) \leq \sum 4yz(y+z) \leq 5(x+y)(y+z)(z+x) - 16xyz$$

Una y otra desigualdades son equivalentes a la desigualdad

$$x^2y + x^2z + xy^2 + xz^2 + y^2z + yz^2 - 6xyz \geq 0$$

que hemos visto anteriormente.

$$13. \quad 9r \leq m_a + m_b + m_c \leq \frac{9R}{2}$$

Si aplicamos la desigualdad de Cauchy

$$(ux + vy + wz)^2 \leq (u^2 + v^2 + w^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

con $u = m_a$, $v = m_b$, $w = m_c$, $x = y = z = 1$ y tenemos en cuenta la relación

$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ así como la desigualdad $a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$, la cual

resulta inmediatamente de la fórmula $OG^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$ que expresa el cuadrado de la distancia entre el circuncentro y el baricentro del triángulo, obtenemos

$$m_a + m_b + m_c \leq \sqrt{3(a^2 + b^2 + c^2)} = \sqrt{\frac{9(a^2 + b^2 + c^2)}{4}} \leq \frac{9R}{2}$$

verificándose la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

Por otra parte, multiplicando miembro a miembro las desigualdades

$$s(s-a) = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4} \geq \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = m_a^2,$$

etc., resulta, habida cuenta de (1),

$$m_a m_b m_c \geq rs^2$$

y, toda vez que

$$s = (s-a) + (s-b) + (s-c) \geq 3\sqrt[3]{(s-a)(s-b)(s-c)} \underset{\text{por(1)}}{=} 3\sqrt[3]{r^2 s}$$

o, equivalentemente,

$$s^2 \geq 27r^2$$

obtenemos

$$m_a + m_b + m_c \geq 3\sqrt[3]{m_a m_b m_c} \geq 3\sqrt[3]{rs^2} \geq 3\sqrt[3]{27r^3} = 9r$$

verificándose la igualdad si y sólo si el triángulo es equilátero.

$$14. \quad \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \geq \frac{2r}{R}$$

Sustituyendo $\frac{2r}{R}$ por su igual $8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$, obtenemos

$$8 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{C-A}{2} \quad (4)$$

equivalente a la propuesta.

Siendo $\sin \frac{A}{2} = \frac{\sin A}{2 \cos \frac{A}{2}}$, etc. y positivos los números $\cos \frac{A}{2}$, $\cos \frac{B}{2}$ y $\cos \frac{C}{2}$,

la desigualdad (4) se escribe equivalentemente

$$\sin A \sin B \sin C \leq \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{C-A}{2} \cos \frac{B}{2} \quad (5).$$

Tenemos

$$\begin{aligned} \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C}{2} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{A-B+C}{2} + \cos \frac{A-B-C}{2} \right), \\ \cos \frac{A-B+C}{2} &= \cos \frac{p-2B}{2} = \sin B \end{aligned}$$

y

$$\cos \frac{A-B-C}{2} = \cos \frac{-A+B+C}{2} = \cos \frac{p-2A}{2} = \sin A$$

de donde se sigue

$$\cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C}{2} = \frac{\sin A + \sin B}{2}$$

y cíclicamente.

Para establecer la validez de (5), hacemos servir la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica en la siguiente:

$$\begin{aligned} \cos \frac{A-B}{2} \cos \frac{C}{2} + \cos \frac{B-C}{2} \cos \frac{A}{2} + \cos \frac{C-A}{2} \cos \frac{B}{2} &= \\ &= \frac{\sin A + \sin B}{2} + \frac{\sin B + \sin C}{2} + \frac{\sin C + \sin A}{2} \\ &\geq \sqrt{\sin A \cdot \sin B} \cdot \sqrt{\sin B \cdot \sin C} \cdot \sqrt{\sin C \cdot \sin A} \\ &= \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C \end{aligned}$$

$$15. \quad 9r \leq h_a + h_b + h_c \leq \frac{9R}{2}$$

Tenemos

$$(h_a + h_b + h_c) \cdot \frac{1}{r} = (h_a + h_b + h_c) \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \right) \geq 9,$$

de donde

$$(h_a + h_b + h_c) \geq 9r.$$

Por otra parte, la siguiente desigualdad

$$a = (s-b) + (s-c) \geq 2\sqrt{(s-b) \cdot (s-c)}$$

es equivalente a

$$a^2 \geq 4(s-b) \cdot (s-c)$$

y la escribimos en la forma

$$\frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{4}{a}.$$

Análogamente,

$$\frac{1}{s-c} + \frac{1}{s-a} \geq \frac{4}{b} \quad \text{y} \quad \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} \geq \frac{4}{c}.$$

La suma de estas tres últimas desigualdades es

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq 2 \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

la cual, después de multiplicar por el valor S del área del triángulo se reduce a

$$r_a + r_b + r_c \geq h_a + h_b + h_c ,$$

de la que resulta (ver la desigualdad número 11)

$$h_a + h_b + h_c \leq \frac{9R}{2}$$

Bibliografía.

O. Bottema et al., *Geometric Inequalities*, Groningen, 1969.

DS Mitrinovic et al., *Recent Advances in Geometric Inequalities*, Kluwer Ac. Publishers, The Netherlands, 1989.

Mihály Bencze, ‘Problem 2717’, *Crux Mathematicorum*, 29, 2 (2003), 119-120.

I.V. Maftei y M. A. Nicolae, ‘Asupra unor relatii de evaluare într-un triunghi’, *Gazeta Matematica*, nr. 10/2002, 379-387.

Post Scriptum. Mi interés por las desigualdades geométricas empezó con la invitación del profesor Josep Grané i Manlleu de la Universitat Politècnica de Catalunya a que colaborara en la edición de 1999 del libro “Sessions de preparació per a l’olimpíada matemàtica” que edita la Societat Catalana de Matemàtiques.

La aceptación me llevó a intentar una tarea que, a la hora de la verdad, ha resultado bastante fructífera.

Mi reconocimiento y afecto al profesor Grané y a Francisco Bellot Rosado, de Valladolid, catedrático y editor de esta Revista Escolar de la OIM, como impulsores del olimpismo matemático en España, así como mi agradecimiento a ambos por haberme dado siempre, con creces, toda la ayuda que les he pedido.

Cala Figuera, Mallorca, junio 2003

Revista Escolar de la Olimpiada Iberoamericana de Matemática

http://www.campus-oei.org/oim/revista_oim/

Edita:

