



---

**CONGRESO  
IBEROAMERICANO**  
DE CIENCIA, TECNOLOGÍA,  
INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN

---

BUENOS AIRES, ARGENTINA  
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

---

**CONGRESSO  
IBERO-AMERICANO**  
DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA,  
INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO

---

BUENOS AIRES, ARGENTINA  
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRO 2014

## **GEOGEBRA: UNA HERRAMIENTA COGNITIVA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD**

INZUNZA, S.

# **GEOGEBRA: UNA HERRAMIENTA COGNITIVA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD**

Santiago Inzunza Cazares

Universidad Autónoma de Sinaloa (México)

[sinzunza@uas.edu.mx](mailto:sinzunza@uas.edu.mx)

## **Resumen**

En el presente artículo se realiza un análisis del potencial del software Geogebra (Hohenwarter, 2001) para la enseñanza de la probabilidad, tomando como marco de referencia los nuevos enfoques que promueven un mayor énfasis -que el que se ha hecho hasta ahora-, en la perspectiva frecuencial de la probabilidad a través de la simulación computacional de fenómenos aleatorios. El análisis se complementa con la revisión de los criterios que una herramienta computacional debe reunir para ser considerada una herramienta cognitiva. Los resultados del análisis muestran que los nuevos enfoques de enseñanza de la probabilidad, y en particular la incorporación del enfoque frecuencial requiere de diversas representaciones matemáticas y funciones cognitivas que Geogebra dispone en su diseño, por lo que constituye una herramienta con potencial amplificador y reorganizador de las actividades mentales y el aprendizaje de los estudiantes.

## **La enseñanza de la probabilidad en los niveles medio y medio superior**

La sociedad actual requiere individuos que sean competentes para analizar, comprender e interpretar información de diversos hechos que suceden a su alrededor, los cuales con frecuencia involucran alguna componente de incertidumbre (por ejemplo, eventos meteorológicos, eventos deportivos, juegos de azar, pronósticos financieros, seguros de vida o daños). Como consecuencia de ello, los temas de probabilidad han venido incrementando su presencia en el currículo escolar de matemáticas de muchos países, desde la escuela primaria hasta el nivel universitario.

Sin embargo, la enseñanza de la probabilidad es una tarea compleja, pues además de ser relativamente reciente en el currículo -razón por la cual los profesores con frecuencia señalan que les falta conocimiento para impartirla-, tiene la característica de ser conceptualizada desde diversos enfoques (clásico, frecuencial, subjetivo). Adicionalmente, la investigación en psicología de la probabilidad (por ejemplo: Kahneman, Slovic y Tversky, 1982) ha mostrado la facilidad con que las personas

incurren en concepciones erróneas y sesgos cuando razonan sobre la incertidumbre y el azar.

Todo lo anterior agrega sin duda, dificultad a la tarea de enseñanza. En el caso particular de los niveles medio y medio superior, la enseñanza de la probabilidad ha estado centrada principalmente en el enfoque clásico o axiomático, con uso a veces excesivo de técnicas combinatorias y conceptos formales que poco ayudan al desarrollo de un razonamiento probabilístico correcto, en tanto enfatizan casi de forma exclusiva en el uso de procedimientos y cálculo de probabilidades.

De acuerdo con Godino *et al.* (1996) lo anterior crea un serio problema didáctico, ya que para la mayoría de los estudiantes de estos niveles, incluso para estudiantes no matemáticos de nivel universitario, no es fácil comprender un desarrollo axiomático formal de la teoría de la probabilidad, sobre todo cuando les falta preparación intuitiva previa necesaria. Ante la problemática anterior, se han realizado propuestas didácticas y recomendaciones que proponen un mayor equilibrio entre el enfoque clásico, frecuencial y subjetivo de la probabilidad (por ejemplo: Batanero, Henry y Parzysz, 2005; Chaput, Girard y Henry, 2011, Ireland y Watson, 2009, Stohl, Angotti y Tarr, 2010).

### **La computadora en la enseñanza de la probabilidad**

Para poder implementar el enfoque frecuencial en la enseñanza de la probabilidad de forma adecuada, se requiere de herramientas computacionales diseñadas con propósitos educativos que permitan crear y manipular modelos y representaciones para producir y mostrar resultados de las simulaciones de una forma interactiva, dinámica y flexible que permita a los estudiantes identificar patrones de comportamiento en los fenómenos aleatorios y con ello generar una comprensión adecuada.

En la literatura se pueden encontrar diversas propuestas didácticas basadas en el uso de hojas de cálculo (por ejemplo: Beigie, 2010; Inzunza, 2012) y software estadístico (por ejemplo: Inzunza, 2008). Sin embargo, en muchos países aún es difícil acceder a este tipo de software de forma masiva para las aulas de clase. En este contexto, en los años recientes ha surgido el software Geogebra, que además de ser de distribución libre posee diversas características cognitivas de un software para enseñanza de las matemáticas; entre las que destacan la interactividad y las representaciones múltiples y dinámicas de los objetos matemáticos.

Una característica adicional que distingue a Geogebra de otras herramientas es la posibilidad de conversión a applets, las construcciones matemáticas realizadas e insertarlas en una página web o en un material educativo. De esta manera, es posible manipular ciertas variables o parámetros para visualizar comportamientos de los conceptos involucrados. En probabilidad y

estadística, donde la variabilidad es un fenómeno intrínseco de sus conceptos, esto es particularmente relevante.

### **La computadora como herramienta cognitiva**

Pea (1987) define una herramienta cognitiva como cualquier medio que ayuda a trascender las limitaciones de la mente, en el pensamiento, el aprendizaje y las actividades de resolución de problemas. Pea define ciertas funciones, que él llama, *trascendentes*, las cuales deben ser incorporadas en un software para que la computadora funcione como una verdadera herramienta cognitiva y promueva la actividad cognitiva de los estudiantes en el aprendizaje de la matemáticas. Dichas funciones, las interpretamos como las características que deben regir el diseño de software para la educación matemática. Existen dos tipos de funciones trascendentes:

- *Funciones propósito*

Estas funciones promueven que los estudiantes lleguen a ser partícipes de lo que aprenden y no se limiten ser ejecutores de instrucciones. Esto es, el software debe dar oportunidad al usuario de generar partes del proceso de resolución de los problemas o de la exploración de los conceptos que se pretende que el aprenda. Entonces, el software no debe ser una “caja negra” en el cual el estudiante sólo se limita a introducir datos y a recibir resultados.

- *Funciones proceso*

Las funciones proceso por su parte, permiten abstraer al usuario de tareas laboriosas y rutinarias, y coadyuvan en la exploración de conceptos, permitiendo que en el caso de los estudiantes, generen sus propias conclusiones. Para ello se deben tener las siguientes herramientas:

1. Herramientas para desarrollar la fluidez conceptual.
2. Herramientas de exploración matemática
3. Herramientas de representación.

### **Potencial cognitivo de Geogebra para la enseñanza de la probabilidad**

En un ambiente constructivista se concibe al estudiante como un elemento activo que participa en la construcción de su propio conocimiento, y las computadoras son medios excepcionales para el aprendizaje constructivista. Ellas permiten a los usuarios la oportunidad de una retroalimentación de sus acciones y los ayudan a tener control sobre su propio aprendizaje.

El diseño del software Geogebra permite que el usuario sea partícipe en la construcción de su propio conocimiento al interactuar con las diferentes componentes y representaciones; además, un análisis de de las componentes del software nos permite visualizar en ellas, diversas funciones trascendentes de una herramienta cognitiva definadas por Pea (1987). Es posible enlazar dinámicamente gráficas, fórmulas algebraicas y hoja de cálculo en forma simulánte y ser visibles sobre una

misma pantalla. En el caso particular de la probabilidad, cobran relevancia la hoja de cálculo, la ventana de graficación, la calculadora de probabilidades y los deslizadores.

### *Distribuciones de probabilidad*

Las distribuciones de probabilidad tienen representación simbólica, representación gráfica y representación numérica; sin embargo, el enfoque tradicional de enseñanza enfatiza el cálculo de probabilidades utilizando la representación numérica (tablas de probabilidad) y en algunos casos la representación simbólica (fórmula de la distribución); con frecuencia se otorga poca importancia a la representación gráfica, que ayuda a visualizar importantes propiedades de las distribuciones (por ejemplo: tendencia central, forma y variabilidad). Un acercamiento más integral a este importante tema de probabilidad debe incluir, además del cálculo de probabilidades, el análisis de la extensión de la distribución y los valores o regiones más y menos probables, el efecto de los parámetros en las propiedades de las distribuciones y la distinción entre distribución de frecuencias y distribución teórica de probabilidad.

Geogebra permite abordar las propiedades y conceptos anteriores desde un enfoque integral explotando varias representaciones en forma simultánea, mediante la componente conocida como *calculadora de probabilidad*. Por ejemplo, en la parte izquierda de la Figura 1 se muestra la distribución normal estandarizada ( $\mu = 0, \sigma = 1$ ) y el cálculo de la probabilidad entre los valores  $-1 \leq X \leq 2.1789$  con la correspondiente área sombreada. Se puede explorar repetidamente la distribución cambiando los valores de los parámetros y los límites de los intervalos de área y ver el efecto que tienen en la probabilidad calculada y la forma de la distribución. Esto puede ayudar a que los estudiantes a que visualicen algún patrón en los resultados y comprendan los conceptos o propiedades que se propone el profesor al diseñar una actividad didáctica con Geogebra.

Por su parte, en la parte derecha de la Figura 1 se muestra una distribución binomial con parámetros  $n = 10, p = 0.5$  y el cálculo de la probabilidad para  $X \leq 6$  con su correspondiente área sombreada. Adicionalmente se muestra una tabla con todos los valores que toma la variable y sus correspondientes probabilidades. Es posible cambiar el valor de los parámetros y los valores de la variable para visualizar su efecto en las propiedades y las probabilidades de la distribución. Adicionalmente se puede visualizar el carácter continuo y discreto de las distribuciones.

Del análisis anterior, podemos observar que la calculadora de probabilidad no solo facilita un acercamiento gráfico a las distribuciones de probabilidad -situación muy sugerida en los nuevos enfoques de enseñanza de la probabilidad-, sino que constituye además una herramienta de fluidez conceptual, que permite el cálculo de

probabilidades, sin requerir de procedimientos laboriosos, como el caso de la estandarización de una distribución normal.

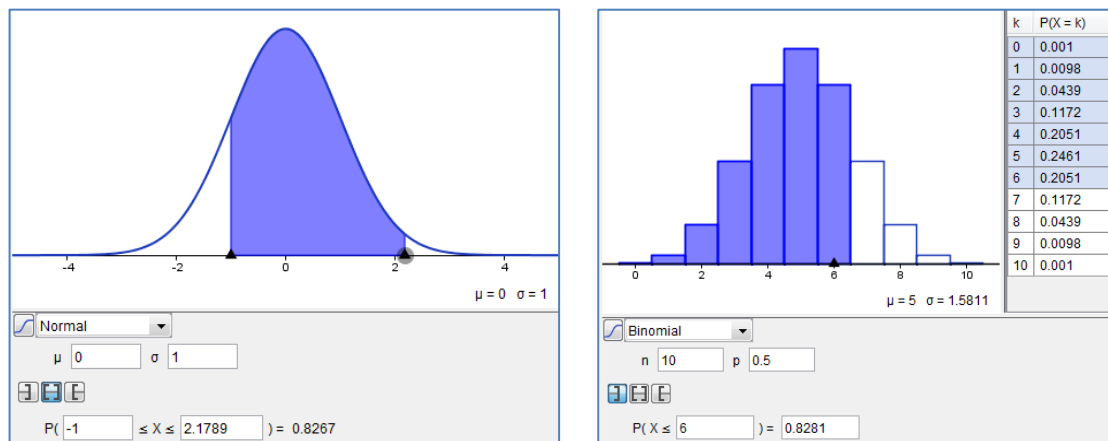


Figura 1: Representaciones de Geogebra para el análisis de las propiedades de la distribución normal y binomial.

Otra herramienta importante que Geogebra incorpora en su diseño son los *deslizadores*. En el contexto de las distribuciones de probabilidad, los deslizadores se pueden utilizar para generar familias de distribuciones. La Figura 2 muestra una distribución binomial con deslizadores representando los valores de sus parámetros  $n$  y  $p$ , y la distribución normal superpuesta para mostrar la idea de aproximación que se usa en los libros de texto cuando valores grandes del parámetro  $n$  en la binomial no aparecen en las tablas.

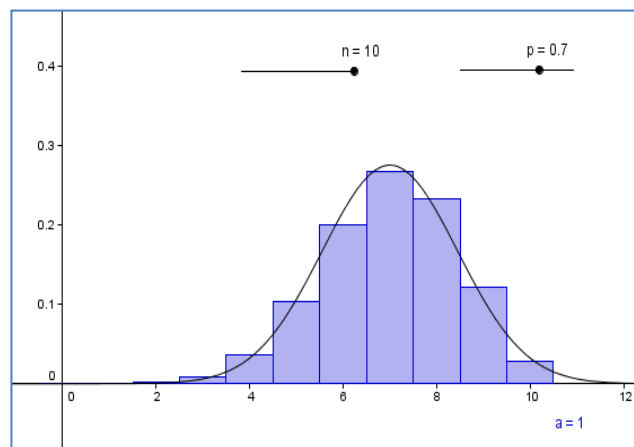


Figura 2: Distribución binomial con deslizadores para los parámetros  $n$  y  $p$  y aproximación con la distribución normal

La *hoja de cálculo* constituye otra importante herramienta de Geogebra para realizar cálculos y para la simulación de fenómenos aleatorios; constituye junto con la *ventana gráfica* dos de los principales recursos para la implementación del enfoque frecuencial de la probabilidad. La hoja de cálculo posee diversas potencialidades en los aspectos representacional, de cálculo y de comunicación. En el aspecto de comunicación los usuarios introducen información en un lenguaje que requiere de una sintaxis rigurosa pero apoyada en un cuadro de diálogo que muestra la sintaxis requerida. En el aspecto representacional dispone de múltiples representaciones que permite que varios registros semióticos puedan ser presentados en forma simultánea sobre la pantalla, tal es el caso del registro de fórmulas para expresar relaciones entre celdas y el registro numérico para representar datos o resultados de los cálculos. En el aspecto de cálculo dispone de una amplia gama de fórmulas que permiten formular modelos, generar datos y realizar cálculos.

Una propiedad de suma importancia que tiene que ve con la interactividad, es la retroalimentación inmediata obtenida cuando se trabaja con una fórmula presionando las teclas Control-R, lo cual permite a los estudiantes experimentar, conjeturar y ayudarlos a encontrar errores. En el caso específico de la simulación de fenómenos aleatorios, la hoja de cálculo dispone de diversos comandos para generar números aleatorios con diversas distribuciones (por ejemplo: uniforme, normal, Poisson).

En la Figura 3 se muestra la simulación de un dado y los resultados se visualizan en la ventana gráfica y la misma hoja de cálculo. Se ha hecho uso de las funciones: *aleatorioentre(1,6)* para generar los resultados del dado y la función condicional *Si* para identificar y acumular el resultado 6. El propósito es mostrar una idea intuitiva de la ley de los grandes números observando que conforme se incrementa el número de lanzamientos del dado, la frecuencia relativa del un resultado tiende al valor real de la probabilidad.

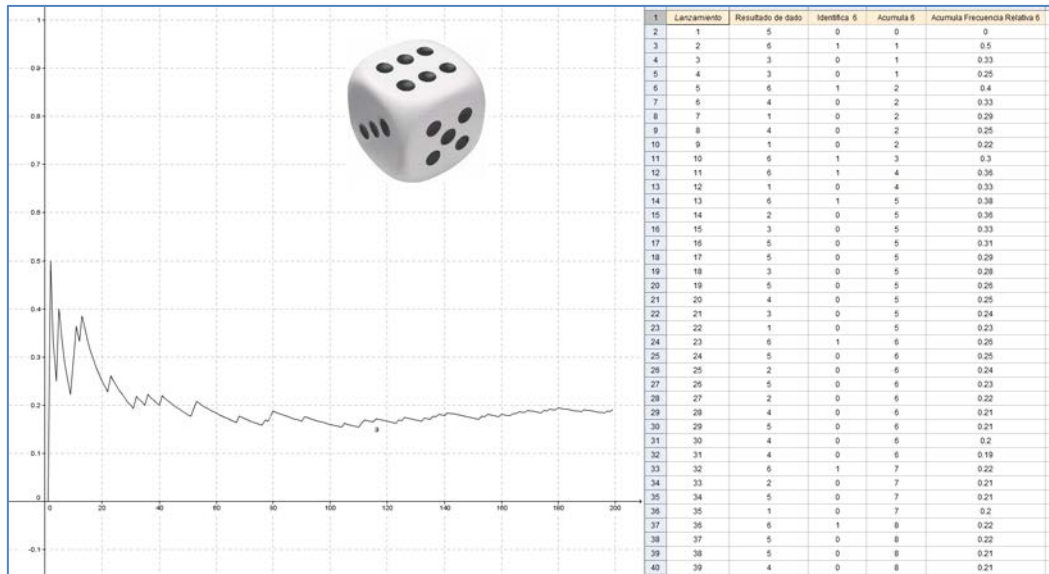


Figura 3: Simulación de un dado para mostrar la ley de los grandes números

De manera similar la Figura 4 muestra la simulación del lanzamiento de un dado, pero con el propósito de mostrar que la distribución de frecuencias relativas se aproxima a la distribución teórica de probabilidad conforme se incrementa el número de simulaciones.

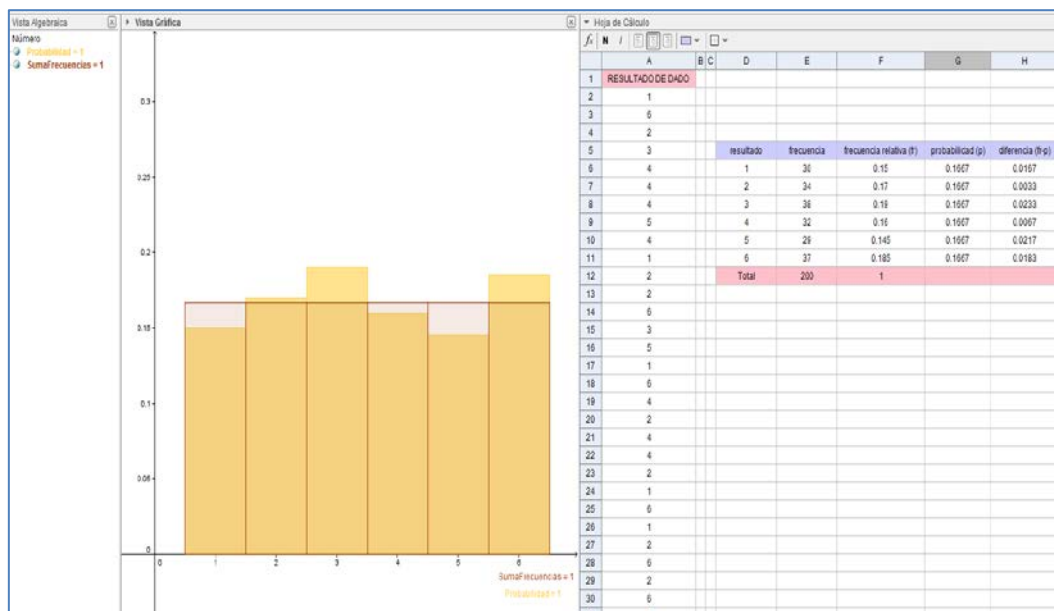


Figura 4: Simulación de un dado para mostrar la aproximación de las frecuencias relativas con la probabilidad teórica conforme se incrementa el número de repeticiones



### Ejemplo de una actividad didáctica

En el camino de su casa a la escuela una persona cruza en su automóvil por tres semáforos. Después de haber recorrido el mismo camino muchas veces ha estimado que la probabilidad de que la luz esté en verde es 0.30. Considera que los semáforos son independientes y que el tiempo de la luz amarilla es despreciable.

#### *Preguntas para reflexión*

---

1. ¿Es más probable que encuentre todos los semáforos en rojo o en verde?
2. Estima la probabilidad de que la persona en su próximo viaje encuentre:
  - a) Todos los semáforos en verde
  - b) Todos los semáforos en rojo

#### *Propósitos de la actividad*

---

1. Que los estudiantes utilicen el software Geogebra para simular un fenómeno aleatorio compuesto por tres eventos independientes que suceden en secuencia.
2. Que comparen las frecuencias relativas de un resultado en particular con la probabilidad teórica.
3. Que comprendan que la frecuencia relativa de un evento en particular se aproximan cada vez más a la probabilidad teórica conforme se incrementa el tamaño de muestra.
4. Que las frecuencias relativas se pueden utilizar como estimaciones de la probabilidad cuando un fenómeno aleatorio se ha observado un número grande de veces.

#### *Instrucciones:*

---

- Abre la hoja de cálculo que se muestra en la Figura 5 y presiona las teclas *Control-R* varias veces. Observa los resultados de la columna de frecuencia relativa y compáralos con la columna de probabilidad. Anota tus conclusiones.
- Incrementa a 1000 simulaciones y observa de nuevo las columnas de frecuencia relativa y probabilidad. Explica lo que sucede.
- Apoyándote en el histograma de probabilidades y la tabla de frecuencias responde las preguntas planteadas.
- Plantea dos preguntas más que podrían responderse con los datos de la tabla de frecuencias.

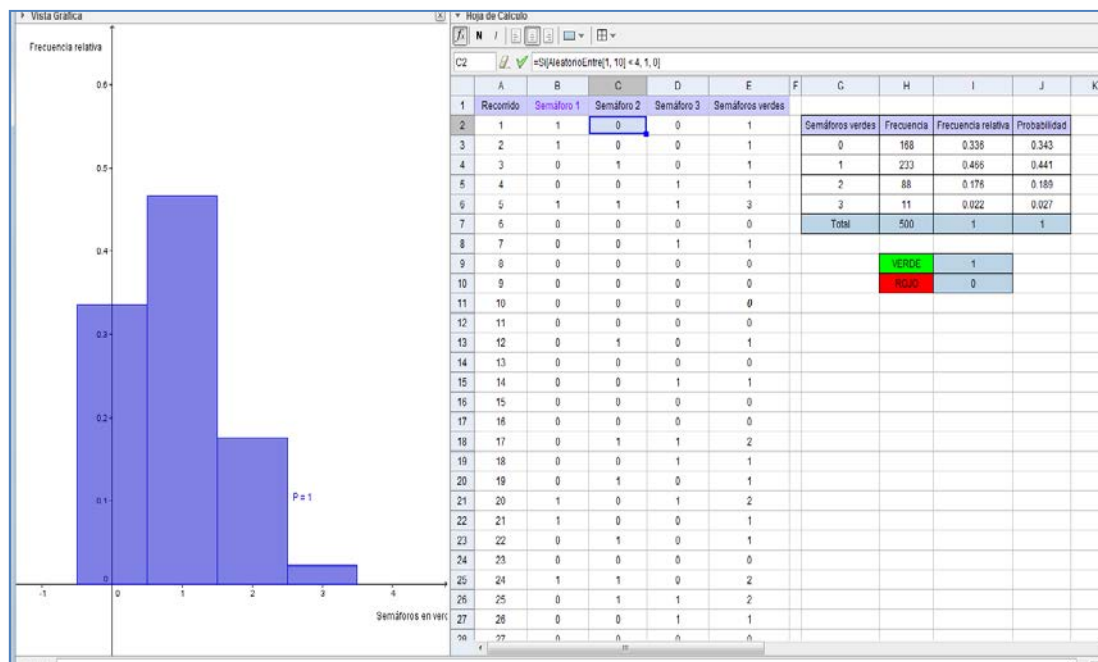


Figura 5: Problema de la simulación de tres semáforos.

## Conclusiones

La discusión y los ejemplos mostrados en los párrafos anteriores muestran que Geogebra dispone de diversas funciones de herramienta cognitiva que señala Pea (1987), y que con un diseño adecuado de actividades didácticas con base en los lineamientos de los nuevos enfoques para la enseñanza de la probabilidad, se puede constituir en una herramienta pedagógica de mucha utilidad para el diseño de materiales de enseñanza que puedan ser utilizados a gran escala en las aulas, aprovechando la característica de software libre que tiene Geogebra y sobre todo la posibilidad de convertir en applets las actividades diseñadas para insertarlas en materiales de enseñanza virtuales.

## Referencias

- BATANERO, C., HENRY, M. y PARZYS, B. (2005). "The nature of chance and probability". En G. A. Jones (Ed.). *Exploring the Probability in School: Challenges for Teaching and Learning*. Springer Science, 15-37.
- BEIGE, D. (2010). "Probability experiments with shared spreadsheets". *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(8), 486-491.
- CHAPUT, B., GIRARD, J. y HENRY, M. (2011). "Frequentist Approach: Modeling and Simulation in Statistics and Probability Teaching". En C. Batanero, G. Burril & Ch. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education: A Joint ICMI/IASE Study. The 18th ICMI Study*. Springer Science+Business Media, 85-95.
- GODINO, J., BATANERO, C. y CAÑIZARES, J. (1996). *Azar y Probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- HOHENWARTER, M.(2001). *Geogebra - Dynamic Mathematics for Everyone*.
- INZUNSA, S. (2008). "Probability Calculus and Connections between Empirical and Theoretical Distributions through Computer Simulation". *Proceedings of 11<sup>th</sup> International Congress on Mathematical Education*. [En línea]. Recuperado de [https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icme11/ICME11\\_TSG13\\_19P\\_inzunsa.pdf](https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/icme11/ICME11_TSG13_19P_inzunsa.pdf) [Fecha de consulta: 03/03/2013]
- INZUNSA, S. (2010). "Entornos virtuales de aprendizaje: un enfoque alternativo para la enseñanza y aprendizaje de la inferencia estadística". *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 15(45), 423-452.
- INZUNSA, S. (2012). "Potencialidades y dificultades de la modelización de fenómenos aleatorios mediante simulación computacional en un curso universitario". *Segundo Encuentro Internacional de Probabilidad y Estadística*. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.
- IRELAND, S., y WATSON, J. (2009). "Building a connection between experimental and theoretical aspects of probability". *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4(30), 339–370.
- KAHNEMAN, D., SLOVIC, P. y TVERSKY, A. (1982). *Judgment under uncertainty: heuristics and biases*. New York: Cambridge University Press.
- PEA, R. (1987). "Cognitive Technologies for Mathematics Education". En A. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education*. Lawrence Erlbaum Associates Publishers. 89-122.
- STOHL, H, S., ANGOTTI, L. R. y TARR, J.E. (2010). "Making comparisons between observed data and expected outcomes: Students' informal hypothesis testing with probability simulation tools". *Statistics Education Research Journal*, 9(1), 68–96.