CONGRESO IBEROAMERICANO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA, INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN
BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO
BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVEMBRO 2014

Las narrativas de los estudiantes como técnica para valorar la comprensión en la Matemática Superior

POCHULU, M; ALCOBA, M.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1050

Las narrativas de los estudiantes como técnica para valorar la comprensión en la Matemática Superior

Marcel Pochulu – Marcelo Alcoba

Universidad Nacional de Villa María – Universidad Nacional de Río Cuarto

mpochulu@unvm.edu.ar – malcoba@ing.unrc.edu.ar

Resumen

En este trabajo se analizan los constructos vinculados a los procesos cognitivos que llevaron a cabo un grupo de estudiantes en Matemática (años 2013 y 2014) inscriptos en carreras profesionales de 3 instituciones de nivel superior de Argentina.

Para el desarrollo de las clases se trabajó con resolución de problemas y actividades de modelización centradas en escenarios de investigación. Para evaluar el proceso, se les propuso a los estudiantes realizar narraciones escritas, las que contemplaron aspectos cognitivos y metacognitivos. Éstas tuvieron por finalidad, además, recuperar aspectos relacionados con la resolución de problemas y valorar la comprensión que alcanzaron sobre los objetos matemáticos involucrados. Para ello, se analizó el modo en que cada estudiante produjo, organizó y reorganizó la red de relaciones que se establecen en la resolución de una situación problemática que obliga al funcionamiento del objeto matemático, la cual pone en juego los procedimientos, técnicas o algoritmos que son necesarios, los conceptos, definiciones, propiedades y argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por elementos lingüísticos (simbólicos o de la lengua natural).

Con el trabajo se muestra que las narrativas son un instrumento muy valioso y útil para valorar la comprensión alcanzada por los estudiantes, pero tiene como fuertes detractores a los propios profesores y estudiantes.

1. Introducción

Sabemos que los procesos de enseñanza y de aprendizaje debieran estar orientados hacia la construcción de un conocimiento significativo y de calidad, pero para ello, se requieren de instancias evaluativas que permitan la construcción de un conocimiento cualificado, relevante y que generen sentidos para el propio estudiante. Solemos estar preocupados para que nuestros estudiantes logren comprender lo que se aborda en la clase de Matemática, pero ¿qué significa comprender un objeto matemático?

La noción de comprensión tiene múltiples acepciones y numerosos investigadores en Educación Matemática la caracterizan, como Godino (2000 y 2003), Font (2001), Pino-Fan, Godino y Font (2011), Pochulu (2012), Rodríguez, Pochulu y Ceccarini (2011), entre otros. En este trabajo se entiende del siguiente modo:

> Comprender un objeto matemático significa haber transitado por diversas experiencias que le permitan al estudiante producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra y extra-matemática) que "obliga" al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje

> simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural. (INFD, 2010, p. 122).

En consecuencia, si se ha comprendido un determinado objeto matemático, el estudiante debiera ser capaz de articular coherentemente seis elementos referidos al mismo: las situaciones problemas en las que participa el objeto, los conceptos, las propiedades, los procedimientos, los argumentos y el lenguaje. No obstante, tal como se señala en INFD (2010) al reflexionar sobre esta acepción, la pregunta que subyace de fondo es: ¿cómo sabrán los docentes y los estudiantes que se ha alcanzado la comprensión de determinado objeto matemático? ¿Cómo recabamos información sobre la comprensión alcanzada por un estudiante?

2. Marco Teórico

Para encontrar respuestas a las preguntas anteriores podemos recurrir a constructos y herramientas de la Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, el Enfoque Ontológico y Semiótico del conocimiento e instrucción matemática (EOS) que propone Godino (2000, 2002, 2003) considera que toda práctica o actividad matemática está centrada en la resolución de problemas (en el sentido más amplio de su acepción, los cuales van desde simples ejercicios a instancias de modelación) y se pueden encontrar algunos o todos de los siguientes elementos primarios:

- *Situaciones problemas*: Problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios, etc. Constituyen las tareas que inducen la actividad matemática.
- *Conceptos*: Están dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, lado, perímetro, baricentro, etc.)., técnicas o acciones del sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algorítmos, técnicas de cálculo, procedimientos, etc.).
- *Propiedades o proposiciones*: Comprenden atributos de los objetos matemáticos, los que generalmente suelen darse como enunciados o reglas de validez.
- *Procedimientos*: Comprenden algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo o modos de ejecutar determinadas acciones.
- *Argumentaciones*: Se usan para validar y explicar la resolución que se hizo de la situación problema. Pueden ser deductivas o de otro tipo, e involucran conceptos, propiedades, procedimientos o combinaciones de estos elementos.
- *Lenguaje*: Términos, expresiones, notaciones, gráficos, etc. Si bien en un texto vienen dados en forma escrita o gráfica, el trabajo matemático pueden usarse otros registros como el oral, corporal o gestual. Además, mediante el lenguaje, sea este ordinario, natural o específico matemático, también se describen otros objetos no lingüísticos.

Para el EOS, los seis objetos primarios que están presentes en una práctica matemática se relacionan entre sí formando configuraciones. Estas configuraciones (figura 1) son entendidas como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos, y constituyen los elementos del significado de un objeto matemático particular. Las configuraciones pueden ser epistémicas o instruccionales si son redes de objetos institucionales (extraídas de un texto escolar, obtenidas de la clase que imparte un profesor, etc.), o cognitivas si representan redes de objetos personales (actividad de los estudiantes). Tanto los sistemas de prácticas como las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino y Batanero, 1994).

Figura 1: Componentes de una configuración epistémica/cognitiva

Podemos advertir que en las configuraciones epistémicas/cognitivas, las situaciones-problemas son las que le dan origen a la propia actividad matemática, y las que vienen a motivar el conjunto de reglas que aparecen en ella. El lenguaje, por su parte, sirve de instrumento para accionar en la actividad matemática que acontece. Los argumentos, en tanto, los entendemos como prácticas que aparecen para justificar las definiciones, procedimientos y proposiciones, las que están reguladas por el uso del lenguaje, que por su parte, sirve de instrumento para la comunicación.

Cada objeto matemático, dependiendo del nivel de análisis que se quiera hacer, puede estar compuesto por entidades de los restantes tipos. Un argumento, por ejemplo, puede poner en juego conceptos, proposiciones, procedimientos, o combinaciones entre ellos y obviamente, está soportado por el lenguaje.

El EOS concibe a la comprensión básicamente como competencia y no tanto como proceso mental (Godino 2000, Font 2001), pues sostiene que un sujeto comprende un determinado objeto matemático cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas.

En síntesis, podríamos valernos de esta herramienta (configuración epistémica/cognitiva) para tener insumos que pudieran dar información sobre la comprensión que alcanzó un estudiante sobre cierto objeto matemático. De todos modos ¿cómo podemos recolectar esta información?

Si se tienen pocos estudiantes, es fácil obtener datos a través de sus prácticas operativas y discursivas, con lo cual vamos estructurando el modo en que cada uno de ellos articula los seis objetos primarios en redes de significado (configuración cognitiva). Si el número de estudiantes es numeroso, prácticamente es imposible llevar a cabo un estudio personalizado de lo que acontece en la estructura cognitiva de cada uno de ellos. Un camino posible es recurrir a las narrativas o diarios de clase.

Se entiende a la narrativa como un instrumento que permite recoger datos significativos sobre un proceso de enseñanza y aprendizaje, además de la reflexión sobre los mismos, su análisis y sistematización. Asimismo, una narrativa permite recolectar opiniones, argumentos, destrezas y actitudes presentes en situaciones reales de aprendizaje, y donde es posible recuperar las discusiones espontáneas entre los estudiantes en las puestas en común iniciales.

Las narrativas tienen por finalidad recuperar aspectos relacionados con la *Resolución de Problemas* y los procesos cognitivos involucrados en ella. Es complejo dar un concepto de “problema” y son numerosos los autores que han dedicado esfuerzos para definir o caracterizar el mismo, con múltiples acepciones. Al respecto, Rodríguez (2012) resalta el hecho de que:

> Uno define el concepto de *problema para un sujeto*, y no simplemente la noción de *problema*. Esto expresa que lo que para un individuo resulta ser un problema, bien podría no serlo para otro. Esta relatividad al sujeto es una característica inherente al concepto y a la vez empieza a poner de manifiesto la complejidad de su uso en el aula. (p. 155)

Debido a que la cualidad de “ser problema” es una cuestión relativa al sujeto que resuelve, esto viene a significar que frente a una primera lectura, el estudiante no sabe exactamente cuál es el camino que debe seguir para resolver. Esta incertidumbre lo lleva a explorar distintas estrategias no formalizadas para acercarse a la resolución, las cuales no necesariamente son exitosas o válidas desde el punto de vista matemático. No obstante, estas estrategias, o heurísticas, son las que están presentes en el trabajo del matemático cuando se encuentra ante una conjetura o problema abierto. En consecuencia, este tipo de estrategias son las que adquieren especial interés para la alfabetización matemática que se pretende instaurar en los estudiantes, intentando que las incorporen, reflexionen sobre ellas, más allá del éxito que alcancen o no en la resolución y con los contenidos matemáticos que hayan sido necesario considerar en la actividad (Rodríguez, 2012).

De todos modos, no es cuestión que se le proponga a un estudiante que realice una narrativa de un problema y con ello será suficiente para valorar la comprensión lograda sobre cierto objeto matemático. Inicialmente es necesario que exista una retroalimentación entre el profesor y estudiantes, en el sentido de devolución de su trabajo, pidiendo que se profundicen sobre ciertos aspectos del escrito, se amplíe información, se justifique mejor un razonamiento, etc. En el escrito que el estudiante realiza de la resolución del problema se podrán recuperar los conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos y lenguaje que utiliza, y cómo los mismos se relacionan y entrelazan. Casualmente éstos elementos constituyen una Configuración Cognitiva y dan información sobre la comprensión alcanzada de acuerdo a INFD (2010).

Un punto relevante es la selección de los problemas que les proponemos a los estudiantes. En este sentido, es interesante lo que nos propone Skovsmose (2012) desde la Educación Matemática Crítica, como línea u enfoque teórico de la Didáctica de la Matemática. Skovsmose (2012) describe distintas tipologías de clases de Matemática al cruzar dos dimensiones: el paradigma del ejercicio y el enfoque investigativo. Haciendo una distinción con el primero (paradigma del ejercicio) donde se situaría la clase tradicional de Matemática, propone el trabajo en la clase organizando proyectos que se montan sobre escenarios de investigación.

Skovsmose (2012, p. 111) le da el nombre de “escenario de investigación a una situación particular que tiene la potencialidad de promover un trabajo investigativo o de indagación” en los estudiantes. Este ambiente de aprendizaje viene a contraponerse totalmente al paradigma del ejercicio que ha caracterizado tradicionalmente a las clases de Matemática.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1050

Si se tienen en cuenta los dos paradigmas que pueden dominar las clases de Matemática: del ejercicio o de investigación y, además, se consideran como referencia contextos de la Matemática pura, de la semirrealidad o situaciones de la vida real, se tendrían los siguientes ambientes de aprendizaje (enumerados del 1 al 6):

		Formas de organización de la actividad de los estudiantes	
		Paradigma del ejercicio	Escenarios de investigación
Tipo de referencia	Matemáticas puras	(1)	(2)
	Semirrealidad	(3)	(4)
	Situaciones de la vida real	(5)	(6)

Tabla 1: Ambientes de aprendizaje (Skovsmose, 2012, p. 116)

Skovsmose (2012) expresa que la educación matemática se mueve sólo en los ambientes (1) y (2) de la Tabla 1, y sugiere moverse por los restantes. También sostiene que en los escenarios de investigación los estudiantes están al mando, pero se constituyen en tal si aceptan la invitación, la cual depende del profesor. Además, “lo que puede constituirse en un escenario de investigación para un grupo de estudiantes en una situación particular puede no convertirse en una invitación atractiva para otro grupo de estudiantes” (Skovsmose, 2012, pp. 114-115). Advierte, además, que un escenario de investigación debe promover en los estudiantes la formulación de preguntas, la búsqueda de explicaciones, la posibilidad de explorar y explicar las propiedades matemáticas, etc. Todo esto está condicionado por el tipo de problema o actividad que se les proponga y obviamente, la gestión de la clase que realice el profesor.

3. Descripción de la experiencia

Se trabajó con resolución de problemas y actividades de modelización que estuvieron centrados en tres ambientes de aprendizaje: de la Matemática pura, de la semirrealidad y de situaciones de la vida real, según la clasificación que ofrece Skovsmose (2012) para los escenarios de investigación en la clase de Matemática. Participaron de esta experiencia:

- 67 estudiantes de la carrera de Técnico Superior en Gestión y Administración de las Organizaciones (43 de la cohorte 2013 y 25 de la cohorte 2014) mientras cursaban Matemática I en el Instituto de Educación Superior del Centro de la República Dr. Ángel Diego Márquez (Villa María, Pcia. de Córdoba, Argentina);
- 10 estudiantes del Profesorado en Matemática (8 de la cohorte 2013 y 2 de la 2014) mientras cursaban Matemática e Informática en la Universidad Nacional de Villa María (Provincia de Córdoba, Argentina) y
- 23 estudiantes de la Licenciatura en Administración Rural (cohorte 2014) mientras cursaban Análisis Matemático en la Facultad Regional Villa María de la Universidad Tecnológica Nacional (Villa María, Pcia. de Córdoba, Argentina).

Durante el cursado de los espacios curriculares involucrados en la experiencia, se les solicitó a los estudiantes que presentaran un escrito que reuniera sus mejores producciones, con la intención de mostrar lo que habían aprendido en Matemática. A lo largo del año académico presentaron 4 trabajos los cuales se enfocaron en grandes ejes temáticos de los espacios curriculares que cursaron: modelos funcionales, ecuaciones y sistemas de ecuaciones, problemas de optimización, integrales, geometría plana, entre otros.

Inicialmente se realizaron escritos sobre la resolución de algún problema abordado en las horas de clase, con la finalidad de introducir a los estudiantes en el estilo de escritura que se pretendía para los trabajos. Esto conllevó a una interacción entre ellos, con recomendaciones sobre aspectos que no quedaron claros o que requerían ser profundizados. Asimismo, se hicieron recomendaciones referidas a criterios para citar o parafrasear información extraída de diferentes fuentes.

Para las narrativas que presentaron los estudiantes, se les pidió que escojieran algunas resoluciones de problemas de los trabajos prácticos que respondieran a ciertas condiciones, las cueles se les enunció de la siguiente manera:

- **El problema que involucró mayor cantidad de estrategias**. Aquí seleccionarás el problema que te llevó a usar la mayor cantidad de estrategias (exitosas o no) para llegar a la solución. Detallarás todo el proceso de resolución indicando las estrategias que has empleado, por qué las abandonaste, lo que pensaste en el camino, etc. Es de destacar que en la narración tendrás que hacer énfasis en las estrategias que se pusieron en juego. Tendrás que identificarlas y debe quedar claro cuál es la estrategia y en qué se diferencia de la otra. No podría quedar un texto continuo y que la persona que lee detecte donde hay estrategias diferentes.
- **El problema que involucró muchos intentos de resolución y no pudiste culminarlo**. Aquí expondrás el problema que te resultó más difícil, que intentaste de muchas maneras y no llegaste a una solución, o no te sientes seguro/a de ella. En la narración deberá quedar claro cuáles son los diferentes intentos, para lo cual tendrás que indicarlos y marcar para cada uno de ellos por qué lo abandonaste y por qué es diferente al anterior.
- **El mejor problema que resolviste solo**. Colocarás el problema que consideres que fue el mejor para vos, fundamentando tu elección. De la lectura debe quedar claro por qué es la mejor resolución de un problema, lo que es muy distinto a decir que fue “el problema más fácil”, así que no confundas ese hecho.
- **El mejor problema que resolviste en grupo**. Tendrás que indicar lo que han pensado, en el grupo, para la resolución del problema, recuperando todos los intentos fallidos y no sólo el exitoso que los llevó a la solución. Esto significa que deberás describir las estrategias que les resultaron útiles y las que no fueron útiles, explicando, en este último caso, por qué las abandonaron o no siguieron con ellas. Asimismo, tendrás que relatar lo primero que se les ocurrió pensar y/o hacer ante el enunciado del problema (¿un gráfico? ¿un esquema? ¿una ecuación? ¿una tabla? etc.). Además, tendrás que detallar lo que aportaste personalmente para la resolución del problema y lo que aportaron los otros integrantes del grupo.
- **El problema que muestra que sabes muchas cosas de Matemática**. Aquí incluirás la resolución del problema que a tu criterio muestra que sabes muchas cosas de Matemática. Esta descripción es central en el trabajo, pues tendrás que marcar qué es lo que se muestra de Matemática en el problema. Una forma de hacerlo es realizar la narrativa y entre paréntesis o en otro color, ir poniendo si es un concepto, una propiedad o un procedimiento. Al finalizar, podrás decir que en la resolución del problema se advierten los conceptos, propiedades y procedimientos que describiste anteriormente, y los volvés a mencionar pero ya de manera continua.

Para el cierre del trabajo, se les solicitó que realizaran un cierre con reflexiones y comentarios, de acuerdo a las siguientes recomendaciones:

- Lo que no te gustó, lo que te resultó difícil y lo que más te agradó de la resolución de problemas. No confundas en decir que no te gustó realizar el

práctico, o que no te gusta Matemática, sino lo que no te gustó de una resolución de problemas en particular, dando tus argumentos.
- Lo que aprendiste matemáticamente con la resolución de los problemas (seleccionados y no seleccionados para el trabajo) y lo que considerás que "no tenés del todo claro aún". Acá no es suficiente decir que aprendiste Matemática, sino más bien detallar qué cosas; esto es, qué conceptos, qué procedimeintos y qué propiedades. Podrás hacer un mapa conceptual si te parece, o presentarlo de la manera que sea más creativa. También explicitarás qué preguntas te fueron surgiendo en la resolución de los problemas y pudiste responder y qué cuestiones te quedaron confusas (siempre en torno a lo matemático de los problemas y no a saber si está bien presentado o no un informe).
- Las explicaciones, comentarios y/o preguntas que realizó el/la profesor/a o un/a compañero/a que te ayudaron a comprender alguna idea matemática. Nuevamente el foco está en que rescates algo que dijeron los profesores, compañeros, o que viste en un libro o internet y que eso hizo que de golpe se “hiciera la luz” ante una dificultad, y te ayudó a comprender mejor una idea.

Se les expresó a los estudiantes que sus trabajos serían valorados en términos de los siguientes criterios:

- Riqueza de estrategias utilizadas en la resolución de un problema y el análisis matemático realizado en torno a ellas.
- Uso apropiado de propiedades, conceptos, procedimientos y lenguaje matemático en las explicaciones y reflexiones.
- Claridad en las reflexiones realizadas en torno al propio aprendizaje matemático alcanzado con la resolución del problema.
- Claridad en la escritura y forma de comunicar la información.

Para que la narrativa se convirtiera en un instrumento de aprendizaje, tanto para el profesor como para los estudiantes, fue necesario realizar devoluciones permitiendo su reescritura. Eso posibilitó que el estudiante pudiera mejorar sus competencias para:

- Reconocer, describir, organizar y analizar los elementos constitutivos de un problema para idear estrategias que permitan obtener, de forma razonada, una solución contrastada y acorde a ciertos criterios preestablecidos.
- Interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones.

Además, se realizó una coevaluación como se muestra a continuación, la cual sirvió de guía para los estudiantes en lo que hace a la narrativa que debían entregar, y para los profesores en cuanto a valorar los objetos matemáticos que se ponían en juego.

Variables de análisis	Evaluación del Estudiante	Evaluación del Profesor
Problema 1: El problema que involucró mayor cantidad de estrategias		
¿Están claramente marcadas las diferentes estrategias utilizadas?		
¿Indico por qué abandoné alguna estrategia?		
¿Aclaro en qué sentido las estrategias son diferentes?		
¿Justifico por qué es válida la respuesta al problema y no podría ser otra?		

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1050

¿Justifico los procedimientos, técnicas y algoritmos de cálculo que utilizo en la resolución del problema?		
Problema 2: El problema que involucró muchos intentos de resolución y no pudiste culminarlo		
¿Están claramente marcados los diferentes intentos realizados?		
¿Indico por qué abandoné cada intento?		
¿Aclaro en qué sentido son diferentes cada intento de resolución?		
Si el problema se resolvió en clase ¿Aclaro por qué no pude llegar a la solución?		
¿Justifico los procedimientos, técnicas y algoritmos de cálculo que utilizo en la resolución del problema?		
Problema 3: El mejor problema que resolviste solo		
¿Queda claro por qué es el mejor problema que resolví? La elección no debiera ser porque es “El problema más corto”, o “el problema más fácil”, sino en términos de los aprendizajes logrados, lo matemáticamente involucrado, lo creativo de la resolución, etc.		
Si usé diferentes estrategias ¡queda claro en el escrito cuál es cada una de ellas?		
¿Justifico por qué es válida la respuesta al problema y no podría ser otra?		
¿Justifico los procedimientos, técnicas y algoritmos de cálculo que utilizo en la resolución del problema?		
Problema 4: El mejor problema que resolviste en grupo		
¿Queda claro por qué es el mejor problema que resolví? La elección no debiera ser porque es “El problema más corto”, o “el problema más fácil”, sino en términos de los aprendizajes logrados, lo matemáticamente involucrado, lo creativo de la resolución, las ideas aportadas por cada integrante, etc.		
Si usé diferentes estrategias ¡queda claro en el escrito cuál es cada una de ellas?		
¿Indico por qué abandoné alguna estrategia?		
¿Justifico por qué es válida la respuesta al problema y no podría ser otra?		
¿Justifico los procedimientos, técnicas y algoritmos de cálculo que utilizo en la resolución del problema?		
¿Se aclara qué aportó cada integrante del grupo?		
Problema 5: El problema que muestra que sabes muchas cosas de Matemática		
¿Están claramente marcadas las cosas que se usaron de Matemática en la resolución del problema? (un concepto, definición, una propiedad o un procedimiento)		
¿Indico por qué abandoné alguna estrategia?		
¿Aclaro en qué sentido las estrategias son diferentes?		
¿Justifico por qué es válida la respuesta al problema y no podría ser otra?		

¿Justifico los procedimientos, técnicas y algoritmos de cálculo que utilizo en la resolución del problema?		
Reflexiones		
¿Está aclarado y justificado las cosas que no me gustaron, lo que resultó difícil y lo que más me agradaron de la resolución de problemas?		
¿Detallo lo que aprendí de Matemática? (conceptos, propiedades, procedimientos o técnicas)		
¿Doy algún ejemplo de preguntas o explicaciones que dieron los profesores o un compañero que me ayudaron a entender mejor una idea matemática?		
Formato del trabajo		
¿El trabajo tiene carátula donde indico los datos básicos?		
¿Es correcto el índice del trabajo?		
¿Presenta una introducción?		
¿El trabajo tiene claramente indicadas las diferentes secciones?		
¿El texto está justificado?		
¿Cada tabla tiene un título y explico la misma en la narración del trabajo?		
¿Cada gráfica tiene un título y explico la misma en la narración del trabajo?		
¿Todo texto extraído de libros y/o Internet está correctamente citado?		
¿Las oraciones son cortas y con buen uso de signos de puntuación?		
¿El trabajo se presenta sin errores ortográficos y gramaticales?		
¿Doy evidencias de todo lo que hice a medida que realicé la narración?		

4. Resultados

A través de las narrativas realizadas por los estudiantes se pudo estructurar una configuración cognitiva, la cual puso en relieve el modo en que se articulaban con la situación problema, los conceptos, definiciones, propiedades, procedimientos, algoritmos y técnicas, mediante procesos de argumentación, en los cuales intervenían diferentes representaciones del lenguaje.

A modo de ejemplos, transcribimos dos episodios correspondientes a dos narrativas para que se advierta cuál fue la fuente de análisis y el estilo de escrito que solicitamos a los estudiantes. Es de destacar que cada trabajo de los estudiantes (4 en total) tiene no menos de 18 páginas y hasta un máximo de 40.

4.1. Narrativa de Rocío referida al problema que mostró que sabía muchas cosas de Matemática

Situación Problema: Se requiere encontrar 2 números, cuya suma sea 40 y cuyo producto sea máximo. Fundamentar la respuesta, indicando por qué sería esa la respuesta y no existen más números que los indicados.

En primera instancia se pensó buscar 2 números que dieran como resultado 40, como las opciones son varias, es decir, tenemos por ejemplo: 20+20, 39+1, 22+18, etc.; se decidió recurrir a Internet con la intención de conseguir ayuda o una simple idea de cómo realmente debía resolverse dicho problema.

Se encontró un problema similar, con diferente numeración. Por lo tanto, se buscaron los términos que se desconocían para su comprensión y así lograr entender lo que se llevó a cabo para llegar a la respuesta.

Se pensó lo siguiente: Como la suma de ambos números debe ser igual a 40, se podría decir que uno de los números es "x". Pensándolo así, diríamos que el otro número que se necesita sería "40-x". Se dice también que el producto de dichos números debe ser máximo. Decimos entonces que su producto vendría a ser: x*(40-x)

Al hablar de un "máximo" hablamos del valor más grande que toma la función en un punto situado dentro de una región en particular de la curva o en el dominio de la función en su totalidad, como se explica en Extremos de una función (2013).

Es decir, se trata de los valores que toma "x" que hacen a la función lo más grande posible.

Debemos tener en cuenta que decir x*(40-x) es igual a decir $40x-x^2$. Ya que se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la resta en la que un número multiplicado por la diferencia de otros dos números, es igual a la diferencia de los productos de cada término por ese número.

También es necesario conocer el dominio de dicha función. Al habla de dominio, decimos que es el conjunto de valores de "x" para los cuales existe la función.

Dependiendo del tipo de función el dominio se calcula de un modo u otro. Por lo cual obtenemos que $D= 0 \leq x \leq 40$. Esto nos muestra que los valores que puede adquirir "x", para los cuales la función sea máxima, sólo pueden ser desde 0 hasta 40 inclusive.

Como siguiente paso, realizamos la derivada primera de la función. El valor de la derivada en cualquier punto de una curva es igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto. Hablamos de derivada y nos referimos a que es una medida de la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente, como se explica en Derivada (2014).

Una variable independiente se define como un símbolo x que toma diversos valores numéricos dentro de un conjunto de números específicos y que modifica el resultado o a la variable dependiente, como se explica en Variable (2014)

Obtenemos como resultado de la derivada primera: $f'(x)= 40-2x$. Valuamos a la función en los puntos críticos, éstos son puntos en los cuales la derivada es igual a cero.

Igualo la derivada de la función a cero para determinar en qué punto del intervalo [0; 40] se encuentra definida la función. Todas las ecuaciones describen curvas, incluso la línea recta puede definirse como una curva, pero con ciertas características especiales, así cuando a una curva se le calcula la primera derivada lo que obtienes es la pendiente que tiene la curva y al igualar a cero, lo que se buscan son los puntos donde dicha curva tiene tangente con pendiente cero, y esto sólo ocurre en los máximos o mínimos, ya sean parciales o absolutos. Nos queda:

$$0 = 40-2x$$

$$-40 = -2x$$

$$(-40)/(-2) = x$$

$20 = x$ → Este valor nos muestra que la derivada es cero en dicho punto.

Por lo cual, valuamos a la función $f(x) = 40x-x^2$ en 20 → $f(20) = 40*20-20^2$

$$f(20) = 800-400$$

$$f(20) = 400$$

Calcular la derivada primera, igualarla a cero y resolverla, nos permite conocer el valor o los valores donde puede haber un máximo o mínimo de la función.

Se asignan valores próximos (menores y mayores respectivamente) a la variable independiente y se sustituyen en la derivada. Cuando los resultados pasan de positivos a negativos, se trata de un punto máximo; cuando los resultados pasan de negativos a positivos, se trata de un punto mínimo.

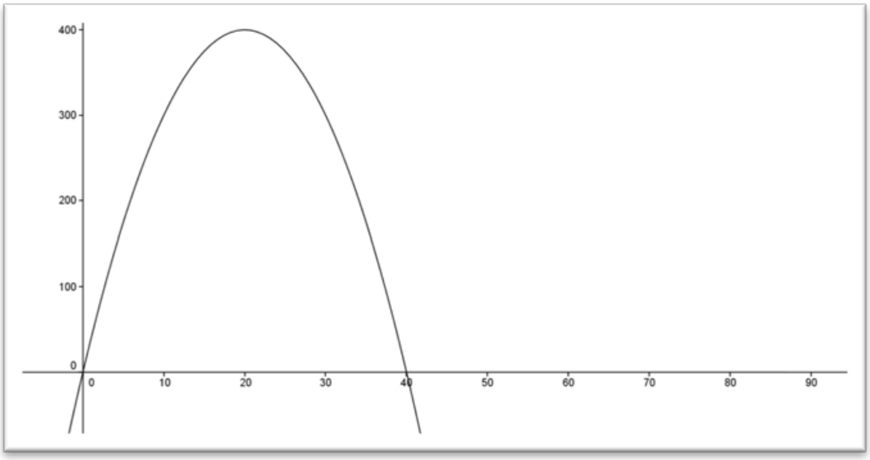
Cuando existen 2 o más resultados para la variable independiente, se debe tener la precaución de utilizar valores cercanos a cada uno a fin de evitar errores en la interpretación de los resultados.

Se sustituye en la función original "y" el o los valores de la variable independiente "x", y cada una de las parejas de datos obtenidas corresponde a las coordenadas de un punto crítico, como se explica en Máximos y Mínimos de una derivada (2012).

Nuestro resultado de valuar a la función en 20 (punto crítico) es 400, éste nos muestra el valor en el cuál la función es máxima. Para obtener estos resultados es necesario igualar a la función a 0, como primera instancia nos muestra el valor de x en el cual la función presenta un máximo. Luego de igualarla a 0, debemos reemplazar en la misma función el resultado obtenido, en este caso 20, de allí podemos afirmar que 400 es el valor de y para el cual la función es máxima.

A esto lo podemos observar a través de una gráfica realizada en el programa matemático GeoGebra.

Gráfica de la función inicial $40x-x^2$



Aquí observamos el comportamiento de la curva. La función en el punto y = 400 y x = 20, posee un máximo. Entonces, concluimos diciendo que los números cuya suma sea 40 y su producto, máximo son 20 y 20.

Es decir:

$$20+20 = 40$$

$$20*20 = 400$$

Luego de llegar a la respuesta final de este problema, podemos decir que fue de gran ayuda utilizar lo aprendido en años anteriores, es decir, en la Secundaria y el aporte de GeoGebra en cuanto a la realización de la gráfica para determinar el máximo de la función.

La resolución de dicho problema ayudó también a afianzar los conocimientos acerca de ciertos términos que anteriormente no estaban del todo claros.

Se podría decir, además, que surgieron interrogantes como por ejemplo: ¿qué sucedería si en caso de buscar un máximo, se decidiera buscar un mínimo? En esa situación, ¿los valores que se buscan serían los mismos o no?, ¿en qué cambiaría la gráfica?

4.2. Narrativa de Pablo referida al problema que involucró la mayor cantidad de estrategias

Situación Problema: Una quinta tiene actualmente 25 árboles, que producen, aproximadamente 600 frutos cada uno. Se calcula que por cada árbol adicional plantado, la producción disminuye en 15 frutos por árbol.
Calcular:
a) La producción actual de la huerta.
b) La producción que se obtendría de cada árbol si se plantan X cantidad de árboles más.
c) La producción a la que ascendería el total de la huerta si se plantan X árboles más.
d) ¿Cuál debe ser el número total de árboles que debe tener la huerta para que la producción sea máxima?

Para comenzar a analizar este problema, lo primero que pensé fue en cargar una serie de datos que me indicaran la relación entre la cantidad de árboles y su producción; como así también su evolución en base al aumento de la plantación. Para calcular dicha producción realicé un cálculo en el que multiplicaba la cantidad de árboles plantados por 600 que es la producción de cada uno y a eso le restaba los 15 frutos que disminuyen por cada árbol que se agrega.

Me pareció bueno también para esta estrategia, cargar una tercera columna en la tabla, la cual me permitiera saber la variación entre la producción y la cantidad de árboles. Para lo que obtuve la siguiente tabla:

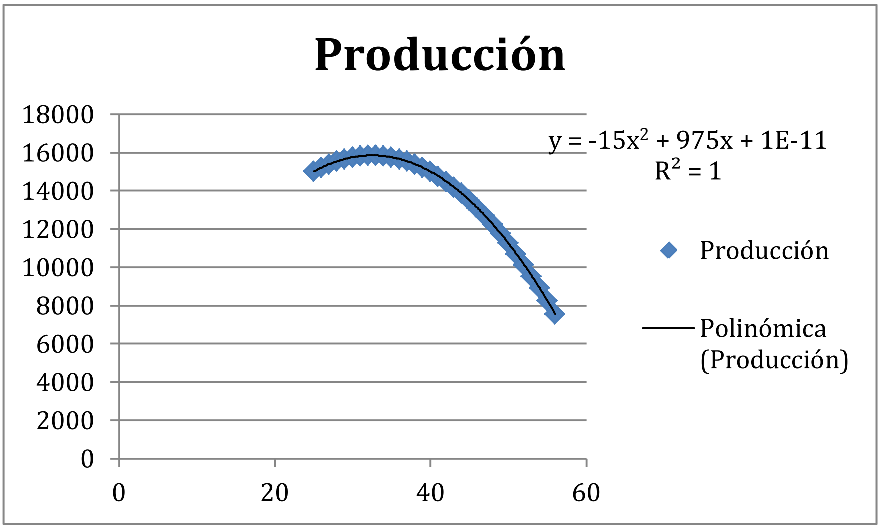
Cant. de árboles	Producción	Relación Producción /Árboles	Cant. de árboles	Producción	Relación Producción /Árboles
25	15000		41	14760	-240
26	15210	210	42	14490	-270
27	15390	180	43	14190	-300
28	15540	150	44	13860	-330
29	15660	120	45	13500	-360
30	15750	90	46	13110	-390
31	15810	60	47	12690	-420
32	15840	30	48	12240	-450
33	15840	0	49	11760	-480
34	15810	-30	50	11250	-510
35	15750	-60	51	10710	-540
36	15660	-90	52	10140	-570
37	15540	-120	53	9540	-600
38	15390	-150	54	8910	-630
39	15210	-180	55	8250	-660
40	15000	-210	56	7560	-690

En esta tabla se puede observar claramente que a partir de la plantación del árbol número 33 se empieza a obtener menos producción.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1050

Una vez obtenidos estos resultados, me pareció importante graficarlo para poder tener una visión más clara de lo que había logrado y además poder llegar a una función, la cual me permitiera conocer la producción con cualquier plantación que posea. Por lo que decidí generar, por medio de Excel, una gráfica, a partir de relacionar la cantidad de árboles y su producción.

Esto me generó lo siguiente, con su correspondiente función, la cual es una polinómica de grado 2:



Al haber obtenido esta función decidí comprobar si reemplazando el aumento en la plantación por X, en la misma, me daba como resultado la producción obtenida.

A continuación desarrollo la siguiente ecuación para que se pueda observar que se obtiene. En la misma reemplazo X por 8 que es la diferencia que se obtiene de la resta entre la plantación con la que obtenemos el valor máximo de producción menos el valor inicial en la plantación.

$$X= 33-25$$

$$X=8$$

$$y = -15x^2 + 975x + 9E-11$$

$$y = -15.8^2 + 975.8 + 9E-11$$

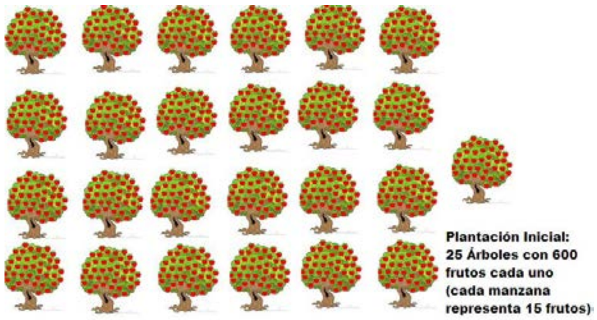
$$y =726.16$$

Una vez que llegamos al resultado observé claramente que al compararlo con la tabla, no obtuve un valor similar al de la producción para 33 árboles, la cual era de 15840 frutos. Al llegar a este punto me di cuenta de que la estrategia utilizada no fue correcta o bien fue mal utilizada, por lo que decidí emprender otro camino para poder llegar al resultado.

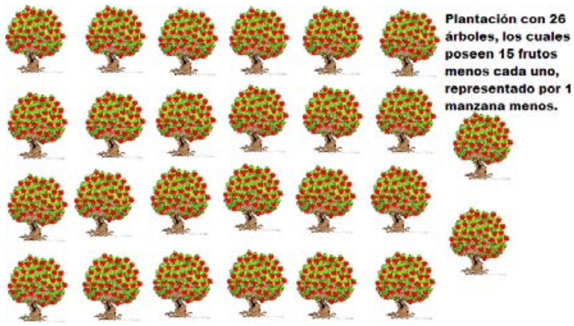
En esta nueva estrategia pensé en plantearlo de un modo más gráfico, quizá bastante básico, pero que me permita tener una mejor perspectiva de la resolución del problema. Para esto realicé una serie de dibujos en la que se puede observar la plantación inicial con los 25 árboles, los cuales poseen 1 manzana que representa a 15 frutos de la producción. En base a esto a medida que aumento un árbol a la plantación disminuyo una manzana (15 frutos) a cada árbol. Lo que fui adquiriendo fue algo como esto:

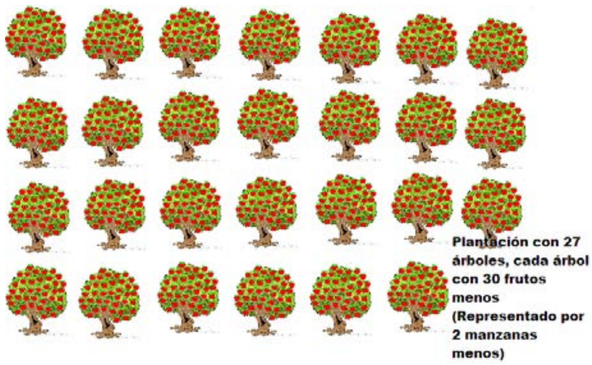
El primer dibujo quedó así:

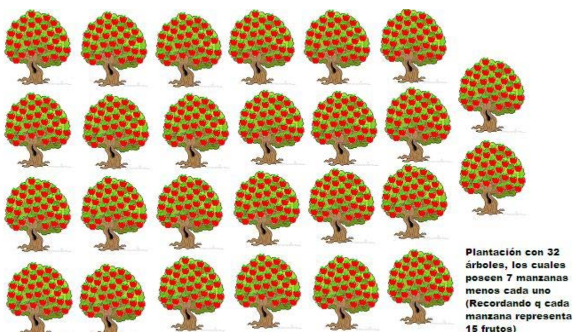
ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1050



El segundo de este modo:







Luego de haber realizado varios de estos dibujos, todos con sus respectivos árboles y frutos, comencé a pensar que podría ser un trabajo demasiado desgastante y el cual quizá no me llevara específicamente a lo que yo quería obtener, que era una función que me permitiera un cálculo instantáneo de la relación entre la plantación y la producción obtenida por esta.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1050

Así que decidí analizar más los datos que poseía y lo que los mismos me brindaban. De este modo desarrollé este análisis matemático: Yo sé que para 25 árboles tengo una producción de 600 frutos por árbol, por lo que puedo decir que: $25.600 = Y$

A su vez cuento con el dato de que cada vez que aumenta la plantación en 1 árbol, la producción de los frutos disminuye en 15 por árbol. Por lo que se podría plantear que:

$$(25 + x).(600 - [15x]) = Y$$

En base a esto y aplicando distributiva pude obtener lo siguiente:

$$(25.600) - (25.15.x) + 600x - 15x^2 = Y$$

Ordenando la función queda de este modo:

$$Y = -15x^2 + 225x + 15000$$

Para poder comprobar si la función obtenida es correcta, reemplazo por valores que nos van a ayudar a responder a las consignas enunciadas.

Para responder la consigna a) debo saber cuál es la producción inicial, es decir para la plantación de 25 árboles. Por lo que reemplazo en la función a X por 0 que es el que marca el inicio en el tiempo y queda algo así:

X=0

$$Y = -15x^2 + 225x + 15000$$

$$Y = -15.0^2 + 225.0 + 15000$$

$$Y = 15000$$

Puedo decir entonces:

a) La producción inicial es de 15000 frutos.
b) La respuesta a esta consigna se encuentra dentro del planteo inicial, ya que al decir que $Y = (25 + x).(600 - [15x])$ decimos que la relación entre el aumento de la plantación y lo que va a producir cada uno de los árboles está dado por $(600 - [15x])$

Para responder la consigna c) cuento con la función obtenida, ya que plantando x árboles más obtengo determinada producción (y). Así que con el desarrollo de la fórmula se obtiene la respuesta:

c) Si se plantan X cantidad de árboles la producción total de la huerta es Y ($Y = -15x^2 + 225x + 15000$)

Por último para obtener el máximo de producción que puede alcanzar la huerta, hay dos modos, en uno busco la derivada de la función que obtuve e igualo la misma a 0 y en el otro cargo la función que poseo, en el programa GeoGebra y solicito el punto máximo de la función.

Opción 1: Derivar la función, me queda de la siguiente manera:

$$Y = -15x^2 + 225x + 15000$$

$$Y' = -30x + 225$$

Una vez obtenida la derivada, reemplazo Y por 0, para obtener el máximo. Lo que me da como resultado lo siguiente:

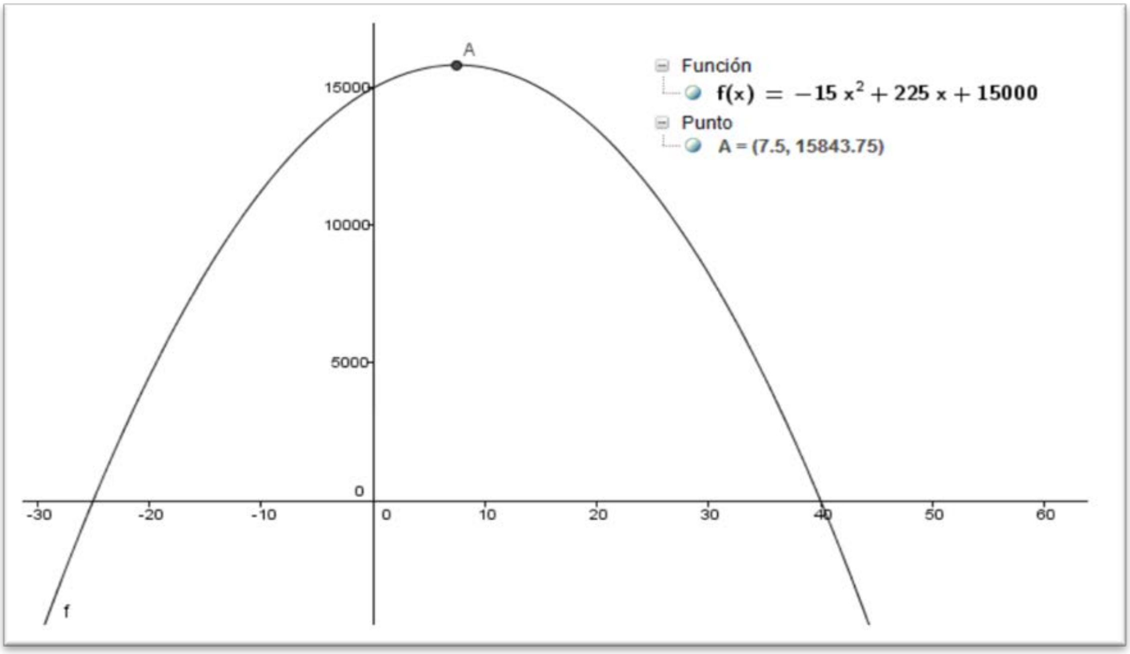
$$Y' = -30x + 225$$

$$0 = -30x + 225$$

$$\frac{-225}{-30} = x$$

$$x = 7{,}5$$

Opción 2: Realicé una gráfica y con Geogebra busco el máximo.



En ambos casos pude observar que para maximizar la producción se deben plantar entre 7 y 8 árboles más, ya que es imposible plantar 7,5 árboles y reemplazando en la función inicial por 7 y por 8 podremos obtener la máxima producción de la huerta.

$$x = 7$$

$$Y = -15x^2 + 225x + 15000$$

$$Y = -15.7^2 + 225.7 + 15000$$

$$Y = 15840$$

$$x = 8$$

$$Y = -15x^2 + 225.x + 15000$$

$$Y = -15.8^2 + 225.8 + 15000$$

$$Y = 15840$$

Después de haber reemplazado y resuelto ambas funciones puedo decir que tanto para 7 como para 8 árboles la producción es máxima, por eso el punto máximo de producción se plantea exactamente en la mitad de estos dos valores.

Como respuesta a la consigna podemos decir: Para que la producción sea máxima debemos utilizar la mínima cantidad de recursos y obtener el mayor beneficio, por lo que lo ideal es la plantación de 32 árboles (7 más que la plantación inicial de 25) y así obtendremos una producción de 15840 frutos en total.

Conclusiones

Si disponemos de buenos problemas que puedan llevar a los estudiantes a estar en un escenario de investigación como lo plantea Skovsmose (2012), y trabajamos con técnicas de narrativas para recuperar elementos primarios de un objeto matemático, las cuales contemplen aspectos cognitivos y metacognitivos, podremos valorar la comprensión que alcanzaron sobre los objetos matemáticos involucrados.

En este ambiente de aprendizaje tendremos que analizar el modo en que cada estudiante produjo, organizó y reorganizó la red de relaciones que se establecen en la resolución de una situación problemática que obliga al funcionamiento del objeto matemático, la cual pone en juego los procedimientos, técnicas o algoritmos que son necesarios, los conceptos, definiciones, propiedades y argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por elementos lingüísticos (simbólicos o de la lengua natural). La organización de estos elementos primarios de un objeto matemático constituye una Configuración Cognitiva de acuerdo a Godino, Batanero y Font (2007), y da cuenta de la comprensión alcanzada por un estudiante, de acuerdo a INFD (2010).

Es de destacar que las narrativas son un instrumento muy valioso y útil para valorar la comprensión alcanzada por los estudiantes, pero tiene como fuertes detractores a los propios profesores y estudiantes. Los profesores porque no conciben que se pueda evaluar a través de otros formatos que no sean los exámenes parciales y finales que contienen una serie de problemas y preguntas para ser desarrolladas, generalmente por escrito, en un tiempo acotado y al final del proceso de enseñanza y aprendizaje. Los estudiantes porque les demanda un mayor esfuerzo intelectual y se contrapone al formato que critican, pero al que están acostumbrados (evaluaciones tradicionales). El desafío está en intentar trabajar de un modo diferente en la clase de Matemática, y con certeza, se obtienen resultados distintos.

Por último, cabe remarcar que las narrativas, como instrumento de evaluación, demandan un gran esfuerzo en la labor de los profesores. Resulta laborioso su análisis, más aún cuando se trabaja con grandes números de estudiantes, y donde no es posible demorar demasiado las devoluciones para realizar los ajustes pertinentes de los procesos de enseñanza y aprendizaje involucrados. A su vez, resulta dificultoso instaurarlo inicialmente en las clases de Matemática, pues los estudiantes y profesores no tienen experiencias previas sobre narrativas de procesos cognitivos y metacognitivos propios seguidos en la resolución de problemas.

Referencias bibliográficas

FONT, V. (2011). “Las funciones y la competencia disciplinar en la formación docente matemática”. *UNO.* Vol. 56, pág. 86-94.

GODINO, J. (2000). “Significado y comprensión en matemáticas”. *UNO.* Vol. *25*, pág. 77-87.

GODINO, J. (2003).*Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática.* Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la UG.

GODINO, J. y BATANERO, C. (1994). “Significado institucional y personal de los objetos matemáticos”. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* Vol. 14, número 3, pág. 325-355.

GODINO, J., BATANERO, C. & FONT, V. (2007). “The onto-semiotic approach to research in mathematics education”. *ZDM*. Vol. 39, número 1-2, pág.127-135.

INFD. (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática.* Buenos Aires: INFD y SPU.

PINO-FAN, L., GODINO, J. y FONT, V. (2011). “Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada”. *Educação Matemática Pesquisa.* Vol. 13, número 1, pág. 141-178.

POCHULU, M. (2012). “Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática”. En: M. POCHULU Y M. RODRÍGUEZ (Comps.), *Educación Matemática – Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Los Polvorines: Ediciones UNGS y EDUVIM. 1ª ed., pág. 54-84.

RODRÍGUEZ, M. (2012). “Resolución de Problemas”. En: M. POCHULU Y M. RODRÍGUEZ (Comps.), *Educación Matemática – Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Los Polvorines: Ediciones UNGS y EDUVIM. 1ª ed., pág. 153-174.

RODRÍGUEZ, M., POCHULU, M. y CECCARINI, A. (2011). “Criterios para organizar la enseñanza de Matemática Superior que favorecen la comprensión. Un ejemplo sobre aproximaciones polinómicas de funciones”. *Educação Matemática Pesquisa.* Vol. 13, número 3, pág. 624-650.

SKOVSMOSE, O. (2012). “Escenarios de investigación”. En P. VALERO y O. SKOVSMOSE (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas*. Bogotá: Una empresa docente. 1ª ed., pág. 109-130.