CONGRESO IBEROAMERICANO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA, INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVEMBRO 2014

Visualización y conversiones: un estudio aplicado a curvas y regiones del plano complejo

AZNAR, M.A.; DISTEFANO, M.L.; MOLER, E.; PESA, M.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

Visualización y conversiones: un estudio aplicado a curvas y regiones del plano complejo

María Andrea Aznar; María Laura Distéfano; Emilce Moler; Marta Pesa.

Universidad Nacional de Mar del Plata, Universidad Nacional de Tucumán

maznar@fi.mdp.edu.ar; mldistefano@fi.mdp.edu.ar; egmoler@yahoo.com.ar;
mpesa@herrera.unt.edu.ar

Resumen

En este trabajo se presentan los resultados relativos al diseño, la implementación y la evaluación de la efectividad de una secuencia didáctica referida a la enseñanza de números complejos. La investigación fue desarrollada en una asignatura del área Álgebra y focaliza su atención sobre las representaciones, tanto en forma algebraica como gráfica, de conjuntos que determinan curvas o regiones sobre el plano complejo.

El hecho de que los objetos matemáticos sean accesibles sólo a través de representaciones semióticas y, la existencia de múltiples formas de representar un mismo objeto, determinan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (Duval, 2004). Asimismo, la resolución de problemas requiere de la habilidad de visualizar, es decir, interpretar, usar y reflexionar sobre figuras, imágenes o diagramas, para comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión (Arcavi, 2003).

A partir de un análisis de las prácticas propuestas en la asignatura en dicha unidad temática, se pudo constatar que las representaciones gráficas eran utilizadas sólo como meras ilustradoras de resultados trabajados únicamente en el registro algebraico. Dado que la actividad relativa a la transformación de representaciones, partiendo de un registro gráfico hacia uno algebraico, no es espontánea y es la que presenta un mayor nivel de dificultad, se propuso estudiar su planteo como objetivo pedagógico.

El marco teórico que sustenta este trabajo en sus aspectos cognitivos es la Teoría de Registros Semióticos de Duval (2004). Para describir sus aspectos didácticos se utilizaron constructos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática de Godino y colaboradores (Godino, 2009).

La intervención didáctica diseñada fue implementada con un grupo de estudiantes de la asignatura Álgebra de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Se evaluó el impacto de la misma, tanto en la habilidad de realizar las conversiones como en el desempeño en la resolución de problemas generales de números complejos.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

A partir de los datos relevados fue comprobada la efectividad de la secuencia didáctica propuesta, no sólo sobre las conversiones a las que buscó específicamente contribuir, sino también en prácticas matemáticas que requieren otras actividades semióticas vinculadas a representaciones de números complejos en los dos registros considerados.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

Introducción

El extraer información a partir de una representación gráfica para resolver un problema no es un recurso habitual o utilizado espontáneamente por parte de los estudiantes de primeros años de las carreras de Ingeniería que se dictan en la Universidad Nacional de Mar del Plata. Sin embargo, los profesionales que resuelven problemas a través de las matemáticas coinciden en que es la *visualización* del problema lo que lleva a hallar su solución. Así, F. Hitt (2003) señala que la *visualización matemática* de un problema tiene que ver con entender un enunciado mediante la puesta en juego de diferentes representaciones de la situación en cuestión y ello permite realizar una acción que posiblemente puede conducir hacia la solución del mismo.

Evidentemente, la visualización matemática está ligada a los distintos sistemas de representación (numérico, algebraico, gráfico, simbólico) usados y a la lectura e interrelación que se hace entre los mismos.

Es precisamente en la relación entre las representaciones de un objeto matemático y su conceptualización en la que surgen puntos claves en el aprendizaje de la matemática. Así, R. Duval (1998, 2004, 2006) afirma que toda representación semiótica es parcialmente cognitiva respecto de lo que representa y que la conceptualización implica una coordinación de registros de representación, por lo que la comprensión de un objeto matemático reposa en la coordinación de al menos dos registros de representación.

Dos de los registros de representación semiótica usados en Álgebra son el *registro del lenguaje algebraico* y el *registro gráfico*, los cuales, desde el punto de vista de Duval, deben ser coordinados por el alumno para que logre sus conceptualizaciones. Estas coordinaciones implican las *conversiones* de expresiones planteadas en el *registro algebraico* a sus correspondientes gráficas, y *conversiones* cuyo punto de partida sea una representación gráfica, para llegar a una ecuación o función que las describa en el lenguaje algebraico.

Artigue (1995) ha mostrado que la desarticulación entre el registro gráfico y el algebraico, genera en los alumnos distintos obstáculos en la conceptualización de los objetos matemáticos estudiados. Asimismo otros investigadores como F. Hitt (2001) han subrayado que se descuida en la instrucción el paso de una representación gráfica a una expresión algebraica, siendo una tarea difícil pero necesaria para la adquisición de conceptos matemáticos.

Tal desarticulación tiene otras consecuencias pues, en el trabajo de los físicos o de los ingenieros, el punto de partida no siempre es una fórmula. En muchas ocasiones, en el inicio de la tarea matemática de su trabajo, el profesional tiene como datos una serie de observaciones, tal vez representados como puntos de una gráfica. Esto determina que la habilidad de convertir representaciones del registro gráfico al algebraico, no sólo tiene importancia desde el punto de vista de la conceptualización, sino también desde el desarrollo de competencias necesarias para satisfacer el perfil profesional.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

Una de las unidades temáticas de la asignatura Álgebra es la referente a Números Complejos, de gran importancia conceptual y multiplicidad de aplicaciones en distintos quehaceres de la Física y la Ingeniería. Se caracteriza por su gran riqueza semiótica por cuanto, en el registro gráfico, los Números Complejos pueden representarse en forma de puntos o de vectores en el plano y, en el registro algebraico, pueden expresarse en forma de pares ordenados, en forma binómica o en forma polar; dichos registros posteriormente serán utilizados por los alumnos en el estudio de espacios vectoriales, variedades lineales en R^2 y curvas planas o regiones descriptas en coordenadas cartesianas y polares.

En muchas ocasiones, se observaba que los alumnos obtenían, sin advertirlo, argumentos o módulos erróneos en tareas de cambio de representación del número complejo de su forma binómica a su forma polar. Realizaban esta tarea limitándose al registro algebraico pues, si hubieran utilizado de manera coordinada una representación gráfica, se evidenciaría rápidamente su error; esto daba indicios de que no utilizaban el registro gráfico como soporte inicial en la resolución de una tarea. A su vez pudo constatarse que, en las guías de trabajos prácticos de la mencionada asignatura, se presentaban al estudiante numerosos ejercicios donde los alumnos debían operar tomando como punto de partida la definición de regiones del plano complejo descriptas como conjuntos en el registro algebraico, proponiéndoles representarlos en un registro gráfico; sin embargo no figuraban actividades requiriendo la transformación en el sentido inverso, en la que interviene la habilidad de visualización. Tampoco figuraban actividades de caracterización de representaciones gráficas de Números Complejos en la bibliografía recomendada. Sin embargo, la habilidad de describir o representar regiones o curvas del plano complejo mediante ecuaciones o inecuaciones en el registro algebraico, es necesaria para poder abordar distintos tópicos posteriores, como el de análisis de funciones de variable compleja. Asimismo representar trayectorias en el plano complejo tiene aplicaciones técnicas, algunas de ellas pueden verse en Mecatrónica (Cuevas y cols., 2009).

En base a las anteriores consideraciones, se concibió la idea de contemplar la habilidad de conversión de representaciones de conjuntos de Números Complejos del registro gráfico al algebraico como un saber a enseñar. A partir de ese planteo, se diseñaron e implementaron actividades de enseñanza con el objetivo de favorecer la habilidad mencionada, se testeó posteriormente su efectividad y su incidencia en la capacidad de gestión de los Números Complejos en la resolución de problemas.

A continuación se describen las ideas centrales del marco teórico que sustenta este trabajo.

Marco Teórico

Hay variadas definiciones de visualización considerada desde distintos puntos de vista.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

De Guzmán la describe como una habilidad fundamental para la actividad matemática.

> *Con la visualización en matemáticas se pretende otra cosa. Las ideas, conceptos y métodos de las matemáticas presentan una gran riqueza de contenidos visuales, representables intuitivamente, geométricamente, cuya utilización resulta muy provechosa, tanto en las tareas de presentación y manejo de tales conceptos y métodos como en la manipulación con ellos para la resolución de los problemas del campo.*
>
> *Los expertos poseen imágenes visuales, modos intuitivos de percibir los conceptos y métodos, de gran valor y eficacia en su trabajo creativo y en su dominio del campo en que se mueven. Mediante ellos son capaces de relacionar, de modo muy versátil y variado, constelaciones frecuentemente muy complejas de hechos y resultados de su teoría y a través de tales redes significativas son capaces de escoger de manera natural y sin esfuerzo, los modos de ataque más eficaces para resolver los problemas con que se enfrentan.*
>
> *…*
>
> *Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto desvelan las relaciones abstractas que al matemático interesan constituye lo que denominamos visualización en matemáticas.* (1997, p16.)

De Guzmán (1997) afirma que la visualización no es una visión inmediata de las relaciones, sino una interpretación de lo que se presenta a nuestra consideración que solamente podremos realizar eficientemente si hemos aprendido a leer adecuadamente el tipo de comunicación que la sustenta. Este autor advierte sobre la necesidad de que el docente, en tareas de enseñanza vinculadas a la visualización sea consciente de la necesidad de realizar un proceso de decodificación que puede no ser transparente para el estudiante.

Por su parte Duval (1998,1999) subraya la importancia de la visualización para la comprensión en matemática dado que no puede accederse a sus objetos sin utilizar representaciones semióticas de los mismos en sus distintos registros (numérico, algebraico, gráfico, simbólico).

En su Teoría de los Registros Semióticos sostiene que las representaciones semióticas no son solamente los medios de exteriorización de representaciones mentales a los fines de la comunicación, sino que son esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Si bien es comúnmente aceptado que al comprender o conocer un objeto, un sujeto es capaz de representarlo con algún símbolo o grafismo, Duval (1998, 2004) afirma que no hay **noesis** (aprehensión conceptual de un objeto) sin **semiosis** (o aprensión o producción de una representación semiótica) afirmando su inseparabilidad.

Una representación semiótica muestra las relaciones o, mejor, la organización de las relaciones entre las unidades de representación. Es la visualización el proceso que posibilita al

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

sujeto tener a la vez una aprehensión completa de cualquier organización de las relaciones (Duval,1999).

Distingue tres tipos de actividades cognitivas ligadas a la semiosis: la **formación** de una representación identificable como registro, el **tratamiento** como la transformación de una representación en otra en el interior del registro donde fue creada, y, la más importante, la **conversión**, que implica la transformación de una representación dada en un registro en otra representación en un registro diferente.

Sobre la construcción de conceptos matemáticos, Duval (1998, 2004) establece que dado que cada representación es parcial con respecto a lo que representa, se debe considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para la formación del concepto.

Particularmente, la conversión de las representaciones semióticas constituye la actividad cognitiva menos espontánea y más difícil de adquirir para la mayoría de los alumnos y, con frecuencia, la ausencia de coordinación entre los diferentes registros genera un obstáculo para los aprendizajes conceptuales.

La conversión entre dos representaciones semióticas planteadas en distintos registros, no presenta el mismo nivel de dificultad al cambiar el sentido de la misma. Así, en general, es más utilizada y más sencilla, la conversión de fórmulas del registro algebraico al registro gráfico que la tarea de hallar, para una representación gráfica, la fórmula o ecuación que la representa en el registro algebraico. En el primer caso, la construcción de un gráfico requiere sólo calcular algunas coordenadas y trazar una línea recta o una curva en el sistema cartesiano según una regla de correspondencia par ordenado-punto. En la conversión desde el registro gráfico al algebraico se requiere de la habilidad de visualización para distinguir cuáles son los rasgos característicos del objeto representado y cómo se relacionan para poder luego representarlo como ecuación o inecuación. (Duval, 1999)

Para propiciar la conversión desde el registro gráfico al algebraico, Duval (1998, 2004) propone que se diseñen actividades en las que los alumnos puedan distinguir las unidades significantes en el registro de partida y sus concomitantes en el de llegada. Dichas actividades, que pueden ser concebidas como favorecedoras de la habilidad de visualización, son llamadas *tareas de variaciones comparativas*. En ellas, la variable independiente es la variación del contenido visual del registro inicial con las siguientes características:

- De un gráfico a otro sólo se cambia una variable visual a la vez, y no dos o tres.

- La conversión no se realiza sobre una presentación aislada de los casos particulares.

- La conversión se transforma en un método para analizar lo que es matemáticamente significativo en el contenido de la representación dada.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

En este estudio los objetos matemáticos trabajados son subconjuntos de números complejos que describen curvas o regiones sobre el plano complejo. La habilidad de visualización es la que está implicada en la tarea cognitiva de conversión de las representaciones de tales conjuntos desde el registro gráfico hacia el registro algebraico.

Metodología de la Investigación

La investigación sobre la que se basa el presente trabajo se desarrolló en el ámbito de la asignatura Álgebra A de la Carrera de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. El objetivo general es explorar los resultados de la implementación de una intervención didáctica orientada a favorecer la producción de conversiones desde el registro gráfico al algebraico, en subconjuntos de Números Complejos.

Para la consecución de dicho objetivo se planificaron las siguientes acciones:

-Diseño de un cuestionario como instrumento para medir la habilidad de efectuar conversiones no congruentes desde el registro gráfico al registro algebraico en conjuntos de Números Complejos

-Elaboración de una secuencia didáctica para favorecer la adquisición de la habilidad de efectuar conversiones no congruentes desde el registro gráfico al registro algebraico en conjuntos de Números Complejos.

- Selección de dos grupos de alumnos de la cohorte 2010 que cursaran la materia Álgebra. En uno de los cuales se aplicó la secuencia didáctica, y el otro fue de control.

- Administración del instrumento diseñado, en ambos grupos, a manera de pre-test, luego del desarrollo en las clases prácticas de abundante ejercitación de representaciones gráficas de conjuntos de números complejos expresados con condiciones algebraicas.

- Implementación de la secuencia didáctica en uno de los grupos.

- Administración del instrumento de evaluación en ambos grupos, a manera de post-test, después de la secuencia didáctica.

- Comparación de los datos obtenidos en ambos grupos, en base al instrumento y a los puntajes obtenidos en los ítems correspondientes al tema Números Complejos de la evaluación parcial de la asignatura.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

El instrumento de evaluación

Se trabajó con un cuestionario constituido por seis ítems. En cada ítem se presentó a los alumnos la representación gráfica de un conjunto de complejos con una característica común sobre el módulo, la parte real o el argumento tomando, en los tres casos, un único valor o un rango de valores. Esta característica común es la unidad significante que los estudiantes debieron identificar en cada caso, para luego expresarla en forma de una ecuación o una inecuación en el lenguaje algebraico. La identificación de dicha característica depende de la visualización, ya que se requiere la organización mental de ciertos rasgos visuales vinculados por relaciones. Los ítems estuvieron estructurados de manera tal que se evalúan las conversiones tomando representaciones donde la unidad significante a identificar es el módulo, el argumento, o la parte real. Los gráficos correspondientes a cada ítem fueron ubicados en el instrumento de modo tal que no hubiera un orden que le sugiriera al alumno la unidad significante a identificar. A cada ítem se le asignó un puntaje de 1 (uno) punto; en consecuencia el puntaje máximo total obtenible en el instrumento es de 6(seis) puntos.

Es importante señalar que al momento de la instancia Pre-test, si bien los alumnos habían resuelto, en la guía de trabajos prácticos, numerosos ejercicios que implicaban conversiones desde el registro algebraico al registro gráfico, no habían recibido ninguna formación específica en lo referido a la identificación de las unidades significantes en representaciones gráficas de conjuntos de números complejos para expresarlas a través de una condición, en forma binómica o en forma polar, en el registro algebraico.

A modo de ejemplo, se presentan dos de los ítems del instrumento. En el Gráfico 1, correspondiente al ítem (a) del instrumento, se representan números complejos caracterizados por un único valor sobre el módulo; en el Gráfico 2, correspondiente al ítem (e) los complejos representados están caracterizados por los valores que toman sus argumentos dentro de un rango acotado.

Para poder realizar la conversión de una representación en el registro gráfico al algebraico el estudiante debe lograr visualizar cuáles son las unidades significantes, y cómo están relacionadas. Así, por ejemplo, en el caso del conjunto del ítem a), debe poder visualizar, en la curva de la circunferencia, infinitos complejos que comparten la característica visual de tener la misma distancia al centro y que ésta vale 2. A su vez debe poder expresar, en el registro algebraico dicha relación, como | z |=2.

En el caso del ítem e) para que sea posible la conversión el estudiante debe visualizar, dentro de esa región sombreada, infinitos complejos con vectores organizados visualmente entre dos línea que corresponden al límite de dos ángulos. Debe identificar dichos ángulos y, finalmente debe poder expresar en el registro algebraico esta relación como $\frac{\pi}{3} \leq Arg(z) \leq \frac{5\pi}{6}$

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

Ítem (a)

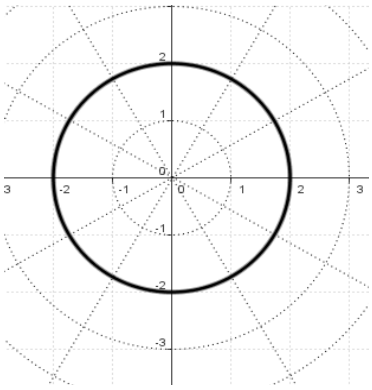
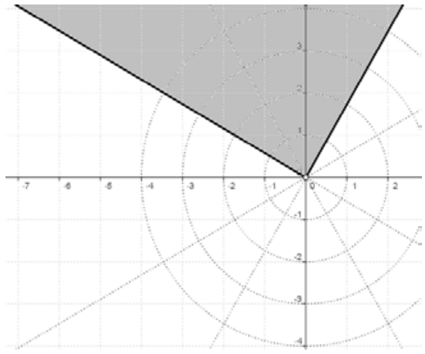


*Gráfico 1.*Representación de números complejos cuyos módulos toman

un único valor fijo

Ítem (e)



Observación: 0+0i está excluido

Gráfico 2. Representación de números complejos cuyo argumento toma

un rango de valores acotados

<u>Las hipótesis planteadas</u>

En relación al objetivo de explorar en los alumnos que cursan la asignatura Álgebra A, los resultados de la implementación de una intervención didáctica orientada a favorecer la producción de conversiones desde el registro gráfico al algebraico, en el tema Números Complejos se plantearon las hipótesis específicas planteadas:

Hipótesis 1:

Los alumnos que participen de la intervención didáctica, fundamentada en la teoría de registros semióticos y orientada a favorecer la habilidad de efectuar conversiones no congruentes, desde el registro gráfico al registro algebraico, de conjuntos de números complejos, tendrán un nivel de logro de aprendizaje en ese tipo de conversiones significativamente superior al de aquellos que no participen de tal intervención.

Hipótesis 2:

Los alumnos que participen de la intervención didáctica tendrán un desempeño, en la resolución de problemas que impliquen representaciones de números complejos en los registros gráfico y algebraico, significativamente superior al de aquellos que no participen de la misma.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

La variable independiente en ambos casos es la intervención educativa, materializada en la secuencia didáctica a la que estuvo expuesto uno de los grupos.

La variable dependiente en el primer caso es nivel de logro de aprendizaje al nivel de progreso en la habilidad de realizar conversiones desde registro gráfico al registro algebraico. Esta habilidad implica la visualización pues comprende la identificación de las unidades significantes en una representación gráfica y la expresión de sus características en forma de ecuaciones o inecuaciones planteadas en el lenguaje algebraico. La misma fue operativizada, a partir de los puntajes obtenidos en el Pre- Test (P1) y Post-Test (P2), mediante Porcentaje en la Diferencia de la Habilidad (PDH): número real con una cifra decimal PDH= $\left(\frac{P_2 - P_1}{6}\right).100$

Para la segunda hipótesis la variable dependiente es el desempeño en la resolución de problemas que impliquen representaciones de números complejos en los registros gráfico y algebraico se asume como una expresión valorativa de la resolución de tareas referentes a números complejos, para las cuales el alumno deberá emplear ambos tipos de representaciones. La misma fue operativizada, a partir del puntaje obtenido en los ítems del examen parcial que evaluaban dicho tema (PO). Porcentaje Items sobre Números Complejos (PIC): número real con una cifra decimal.

PIC= $\left(\frac{PO}{25}\right).100$

Se consideró como variable externa el nivel de conocimientos previos de Matemática. Para evaluar dicha variable se tomó como indicador la calificación del Examen de Ingreso

Se seleccionaron dos comisiones de práctica, en las cuales se administró el instrumento, a manera de Pre-Test, al concluir el estudio de los temas vinculados a representaciones gráficas. En una de ellas se desarrolló la secuencia didáctica diseñada. Posteriormente, en ambas comisiones se administró el mismo instrumento a manera de Post-Test.

Dado que, según León y Montero (1997), el efecto de selección puede constituir una amenaza a la validez interna del diseño, se compararon a ambos grupos, el experimental y el de cuasi-control, en dos variables: el puntaje obtenido por los alumnos en su examen de ingreso y el puntaje obtenido en el Pre-test. Se compararon entre los grupos las distribuciones de la variable Ingreso a través de la prueba U de Mann-Whitney (U=216,500 y p=0,742). El

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

valor obtenido $p>0,05$ indica que no había diferencias significativas en sus conocimientos generales previos de matemática, evaluados en el examen de ingreso. Por otra parte, la comparación entre los grupos para la variable Pre-test mediante la prueba t arrojó valores $t=0,397$ y $p=0,693$ que indican que tampoco había diferencias significativas entre los grupos respecto de este tipo de conversiones. Esto condujo a que los grupos puedan considerarse homogéneos, tanto desde el punto de vista de sus conocimientos generales previos de matemática como de sus conocimientos específicos en cuanto a las conversiones en estudio.

Luego de desarrollarse la secuencia didáctica en el grupo experimental, se administró nuevamente el instrumento a manera de Post-test, en ambos grupos.

Se pudieron obtener datos completos en 20 alumnos del grupo experimental y 23 alumnos del grupo de cuasi-control.

La secuencia didáctica

La secuencia didáctica tuvo como objetivo favorecer en los alumnos la habilidad de conversión, desde el registro gráfico al algebraico, de conjuntos que describen curvas o regiones sobre el plano complejo. Para ello se consideró trabajar tanto sobre la habilidad de visualización, para detectar las unidades significantes y su forma de organización, como sobre su posterior caracterización, expresada en forma de ecuaciones o inecuaciones, en el registro algebraico. Fue diseñada teniendo en cuenta las recomendaciones de R. Duval (1998, 2006) acerca de tareas de variaciones comparativas y los datos cualitativos relevados de la administración del test en una cohorte anterior (Aznar, Distéfano, Massa, Figueroa y Moler, 2010).

La estructura de la misma está compuesta por cuatro actividades.

Actividad I. El enunciado de esta actividad y algunos incisos se ilustran en la Figura 1. Para la resolución de la misma, los alumnos deben hacer uso de conocimientos previamente desarrollados en la guía de trabajos prácticos. Consiste en resolver operaciones entre números complejos que, en lugar de estar expresados en el registro algebraico, están representados en el plano complejo; asimismo se les pide representar en dicho plano el número complejo z, resultado de la operación planteada en cada caso. Las conversiones entre el registro gráfico y el algebraico solicitadas, son sencillas pero obligan a reconocer la codificación visual en el registro gráfico. Se incorporaron líneas auxiliares para facilitar la identificación de los rasgos visuales relativos al módulo, el argumento, la parte real o la imaginaria. Esto, junto con los tratamientos requeridos por las operaciones, es acorde a la necesidad de tomar, como punto de partida, las actividades semióticas más desarrolladas hasta ese momento en la asignatura.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

Actividad I: A continuación se grafican números complejos ***u***, ***v*** representados como vectores. El complejo ***z*** es el resultado de una operación entre ***u*** y ***v***, o de una función aplicada a ***u***. Identificar ***en forma exacta*** al complejo ***z*** (en forma binómica o polar) y representar gráficamente el complejo ***z*** de acuerdo a la operación o función planteada.

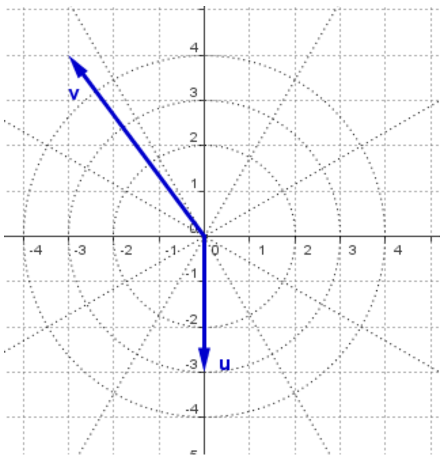
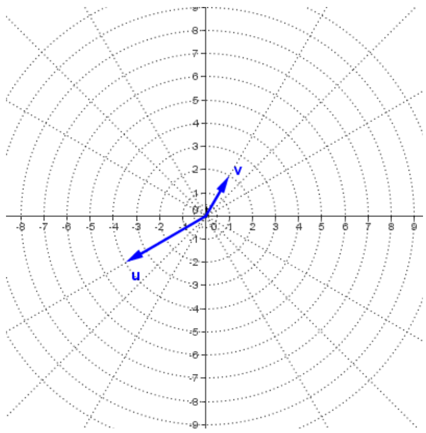
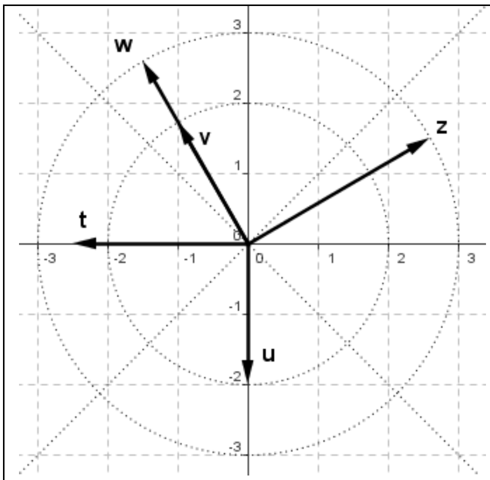
a) $z= u+v$	b) $z = u \cdot v$
	

Figura Nº 1: Enunciado de la Actividad I con algunos de sus incisos

Actividad II. Para la resolución de esta actividad ilustrada en la Figura 2, los estudiantes deben visualizar la relación entre los elementos designados en la expresión incompleta. Así, para el caso del inciso a) deben identificar el rasgo visual correspondiente a la "inclinación" para los vectores z y w, y cuál tiene un ángulo más amplio. La selección del ángulo más amplio depende de un recorrido visual que se inicie en el eje x y se desplace en sentido antihorario. Los alumnos deben convertir la *relación gráfica* a una relación expresada en lenguaje algebraico completando una línea punteada.

Actividad II) De acuerdo al gráfico, completa con >, < o = según corresponda:

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114



a) Arg(z)………Arg(w)

b) Re(v) ………..Re(w)

c) Arg(z)………… $\frac{1}{4}\pi$

d) Im(z) ……….Im(w)

e) Arg(w)………… $\frac{1}{2}\pi$

f) | z |………… | w |

g) Arg(z)……..Arg(-3)

h) | t | ……………2

i) Arg(v) ……..Arg(w)

Figura Nº 2: Enunciado de la Actividad II con sus incisos

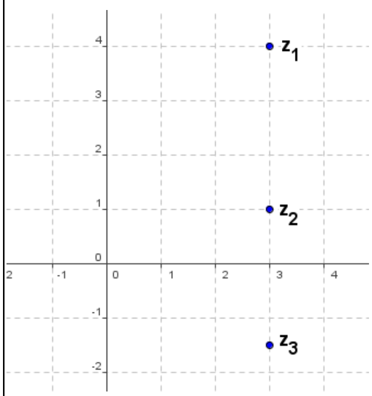
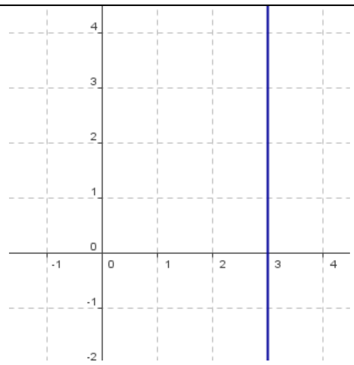
<u>Actividad III.</u> Como se ilustra en la Figura 3, se presentan, en dos columnas, conjuntos de complejos caracterizados por la misma condición. En la columna de la derecha aparece el conjunto representado con infinitos elementos, en la columna de la izquierda aparece un subconjunto finito del mismo conjunto. Se propone al estudiante expresar la relación que caracteriza a los elementos del conjunto dado.

La actividad propuesta adquiere ribetes de lo que Duval (2006) denomina una *tarea de variación comparativa*. En cada inciso, los rasgos gráficos que varían son las representaciones proporcionadas en la columna de la izquierda de los distintos complejos del subconjunto finito. De un número complejo a otro sólo se cambia una variable visual por vez. Se induce en el estudiante analizar, sobre la columna de la izquierda, casos particulares del rasgo global presentado a la derecha. Esto es, se procura favorecer que visualice la relación de este rasgo visual que caracteriza al conjunto.

Por ejemplo, en el inciso a) sólo varía "la altura" y se mantiene fija la "distancia al eje vertical".

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

Actividad III) En la columna 1 se representan algunos complejos que comparten alguna característica (puede ser sobre su parte real, su parte imaginaria, su módulo y/o su argumento principal). En la columna 2, se representan infinitos complejos ***z*** que poseen esa misma característica. Escribir, en cada inciso, la expresión que los determina de acuerdo con la característica común.

COLUMNA I: Algunos Complejos	**COLUMNA II: Infinitos Complejos**
	

a) --

Figura Nº 3: Enunciado de la Actividad III con uno de sus incisos

<u>Actividad IV</u>. Como se puede observar en la Figura 4, a diferencia de la actividad anterior, no se le proporciona al alumno un subconjunto finito como soporte. Es el estudiante quien debe visualizar, dentro de la *gestalt*[1] del conjunto infinito, los elementos del conjunto, para caracterizarlos. Luego debe expresar dicha caracterización representándola en el registro del lenguaje algebraico como síntesis de lo trabajado anteriormente en la secuencia.

[1] La noción de *Gestalt*, es introducida por Christian Von Ehrefels en 1890, como “forma”, “estructura” (Fallas Vargas, 2008)

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

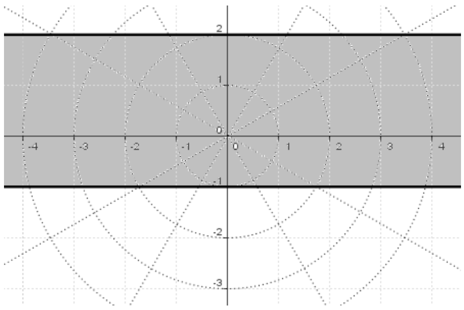
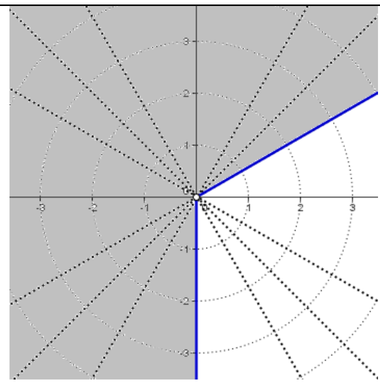
<table>
<tr><td colspan="2">Actividad IV) Se representan conjuntos infinitos de números complejos z que poseen características comunes. Escribir, en cada inciso, la expresión que los determina de acuerdo con esa/s característica/s.</td></tr>
<tr><td>
a)
---</td><td>
b)
--</td></tr>
</table>

Figura Nº 4: Enunciado de la Actividad IV con dos de sus incisos

La configuración didáctica con la que fue implementada esta secuencia es de tipo dialógica; para cada inciso, se les dio a los alumnos un tiempo para exploración del mismo, que podían efectuar de forma individual o grupal y luego se realizó en pizarrón la corrección general en un diálogo entre alumnos y docente. “La institucionalización (regulación) tiene lugar mediante un diálogo contextualizado entre el docente y los alumnos, quienes han tenido ocasión de asumir la tarea, familiarizarse con ella y posiblemente de esbozar alguna técnica de solución”. (Godino, Contreras, Font, 2006, p. 21).

Resultados

Un primer resultado fue detectado al observar los puntajes obtenidos, por ambos grupos, en el pre-test, sin diferencias estadísticamente significativas entre ellos. En el caso del grupo seleccionado para participar de la secuencia didáctica, la media obtenida fue de 3,26 puntos y, en el caso del grupo de cuasi-control, de 3 puntos, que representan aproximadamente el 50% de los 6 puntos del test.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

Otro hecho a destacar, fue que, merced a la modalidad dialógica con la que se implementó la secuencia, se detectaron algunos conflictos semióticos[2] durante el desarrollo de la misma, manifestados en el error de algunos alumnos en la identificación de la *unidad significante* que caracterizaba al gráfico propuesto. Así, para un gráfico con características similares al observado en el gráfico 2, un alumno planteó que la expresión en el lenguaje algebraico sería Im(z)>0 que, si bien era una característica visual que poseían los elementos del conjunto seleccionado, abarcaba a otros complejos no graficados y por lo tanto no se constituía en la unidad significante que los determinaba; esta confusión, que pudo ser expuesta y aclarada en la corrección, es una manifestación del fenómeno de no congruencia en este tipo de conversiones. Este ejemplo marca una propiedad de la visualización: es necesario determinar claramente cuál es la relación que vincula los rasgos visuales presentes.

Para poder establecer el impacto de la intervención se consideraron los datos de las variables numéricas *puntaje en el Post-Test* y *Pre-test* (con valores entre 0 y 6) y, en base ellos, se midió el Nivel de Logro de Aprendizaje a través del *Porcentaje diferencial de habilidad (PDH)*. Los valores en ambos grupos fueron comparados utilizando el paquete estadístico SSPS versión 15.0.

Las medianas obtenidas en la variable vinculada al Nivel de Logro fueron 21,67 y 0,00 para el grupo experimental y el cuasi-control respectivamente. La aplicación de la U de Mann-Whitney, con un nivel de significancia del 5% arrojó un valor p=0,04 lo cual permite rechazar la hipótesis de igualdad de medianas y concluir que existen diferencias significativas entre los grupos. De esto puede deducirse que el grupo experimental tuvo un mejor nivel de logro de aprendizaje de las conversiones planteadas.

Los valores de la variable Nivel de Logro, que abarcan valores posibles de -100 a 100, se agruparon en cuatro categorías: Sin Evolución (menor o igual a 0), Baja Evolución (mayor que 0 y menor o igual a 15), Evolución Media (mayor que 15 y menor o igual que 30) y Evolución Alta (mayor a 30).

En el Gráfico 3, se muestran los porcentajes de alumnos de cada grupo, correspondientes a cada categoría.

[2] Un *conflicto semiótico* es cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). (Godino et al, 2009)

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

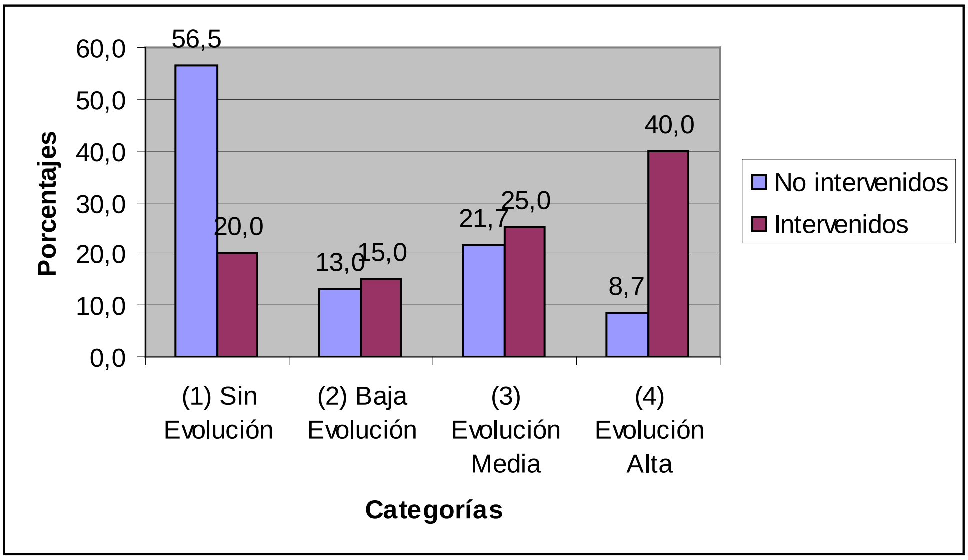


Gráfico 3: porcentajes de alumnos de cada grupo en las categorías de Nivel de Logro.

Para establecer si la intervención incidió en los participantes en cuanto al desempeño mencionado, es preciso determinar si el mismo es diferente entre los sujetos que participaron de la intervención de aquellos que no lo hicieron.

La prueba U de Mann-Whitney de comparación de medianas para la variable Desempeño arrojó los valores U=115,000 y p=0,004. Esto indica que se observan diferencias estadísticamente significativas ($p < 0,05$) entre los alumnos que participaron de la intervención educativa y los que no participaron. Los valores de las medianas, fueron 10 para el grupo no intervenido y 70 para el que participó en la intervención; estos valores indican que son mejores los resultados obtenidos en el grupo que participó en la intervención. Esto permite afirmar que la misma tuvo un impacto positivo sobre el desempeño de los estudiantes que participaron de ella

Análisis de los resultados

Los puntajes obtenidos por los dos grupos de alumnos en el Pre-test permiten tener una medición de la habilidad de realizar conversiones, desde el registro gráfico al algebraico, que los mismos poseían en la etapa final del estudio de la unidad de números complejos. Tomando en cuenta que el puntaje máximo del test es de 6 puntos puede considerarse que, a pesar de que los alumnos habían realizado numerosas ejercitaciones donde debían realizar conversiones de representaciones de números complejos expresadas en el registro algebraico al registro gráfico, estas ejercitaciones no fueron suficientes para la obtención de resultados satisfactorios (apenas el 50%) en las tareas de conversión de representaciones en el sentido inverso, requeridas en el test.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

Respecto de la secuencia didáctica, los datos numéricos inclinan a pensar que tuvo un efecto favorecedor sobre la habilidad de realizar conversiones para los alumnos que participaron en la misma. Partiendo de condiciones iniciales similares en ambos grupos pudo observarse una mayor proporción de alumnos con Evolución Media y alta en esta habilidad en el grupo intervenido, como así también en la mayor proporción de alumnos Sin Evolución en los no intervenidos. Esto convalida la afirmación de Duval (1998, 2004) acerca de la naturaleza no espontánea de la habilidad de realizar conversiones, cuando éstas resultan no congruentes y requieren, por lo tanto de la visualización matemática.

También se observó un mejor desempeño en la resolución de los ítems, referidos a números complejos, pertenecientes a la evaluación parcial de la asignatura. Si bien las resoluciones no requerían específicamente las actividades de conversión trabajadas en la secuencia, la mediana obtenida en el grupo intervenido es muy superior a la del no intervenido.

Conclusiones

La habilidad de caracterizar representaciones gráficas mediante expresiones algebraicas es una competencia necesaria para la resolución de problemas y para la conceptualización de los objetos matemáticos implicados. Considerando que esta habilidad no es espontánea, se planteó la posibilidad de darle a esta habilidad el estatus de objetivo pedagógico en el contexto de conjuntos de Números Complejos, estudiando su factibilidad. Para ello fue proyectada una secuencia didáctica específica, en base a los aportes de la Teoría de Registros Semióticos de Raymond Duval (1998, 2004), que se implementó en uno de los grupos estudiados; también fue diseñado y validado un cuestionario utilizado como instrumento para evaluar dicha habilidad, el cual se administró a ambos grupos de alumnos, antes y después del trabajo con dicha secuencia con uno ellos.

En la secuencia didáctica se planificaron actividades tendientes tanto a la identificación de las unidades significativas como a la expresión de relaciones en el registro algebraico. La identificación mencionada implica habilidades de visualización: reconocer ciertos rasgos visuales y su forma de organización.

Aunque el tamaño de las muestras limita la generalización de los resultados, los mismos dan cuenta de la efectividad de la secuencia para el aprendizaje sobre estos objetos matemáticos.

Los datos empíricos obtenidos son propicios a la idea de que esta habilidad de conversión no resulta trivial para los alumnos, en coincidencia con las afirmaciones de Duval (2004). Esto la posiciona como un posible objetivo de enseñanza. Los valores obtenidos también muestran la incidencia positiva de la secuencia didáctica en el grupo que participó de la misma.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

Por otra parte se evidenciaron mejores desempeños en la resolución de problemas relativos a números complejos en el grupo que participó de la secuencia. Aunque dichos problemas no requerían de las conversiones trabajadas en la secuencia, los mejores resultados observados en el grupo participante conducen a pensar que la secuencia tuvo efectos favorecedores sobre la gestión general sobre los números complejos. Es decir que, el trabajar con estas tareas de visualización contribuyó, no sólo sobre las conversiones a las que buscó específicamente favorecer, sino también en prácticas matemáticas que requieren otras actividades semióticas vinculadas a representaciones de números complejos en los dos registros considerados. Esto va en línea con lo que Duval afirma sobre la necesidad de coordinar distintas representaciones de un objeto matemático para su conceptualización.

Bibliografía

Arcavi, A. (2003). “The role of visual representations in the learning of mathematics”. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Artigue, M.(1995) “La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos” en Artigue, Douady, Moreno y Gomez (eds) *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas* pp. 97-140 Mexico. Grupo Editorial Iberoamerica.

Aznar, M.A., Distéfano, M.L. Massa, S., Figueroa, S. Moler, E. (2010) “Transformación de representaciones de Números Complejos del registro gráfico al algebraico: un análisis desde la Teoría de Registros Semióticos”, *Revista Educación Matemática*, Vol. 25 disponible en http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_25/prop_07.pdf

Cuevas, I., Jiménez López, E., Domínguez Dick, G., Reyes Ávila, L., Delfín Vazquez, J., Lara García, S. (2009). “Modelación y diseño de un simulador de un robot paralelo manejado por un controlador manual didáctico”. Trabajo presentado en el 8º Congreso Nacional de Mecatrónica Noviembre 26 y 27, 2009. Veracruz, Veracruz. Asociación Mexicana de Mecatrónica A.C. Instituto Tecnológico de Veracruz. Recuperado en enero del 2011 de http://www.mecamex.net/anterior/cong08/articulos/61.pdf

Duval, R. (1998). “Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento”. En Hitt, F. (ed.) *Investigaciones en Matemática Educativa II*. (pp.173-201). México: Grupo Editorial Iberoamericano.

Duval, R. (1999) “Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking”. Basic issues for learning *Procedings of the Anual Meting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics*

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114

Education (21st, Cuernavaca, Morelos, Mexico, October 23-26, 199). Disponible en http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED466379.pdf

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006) “Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación” en *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, Vol 9.1, pp. 143-168. Recuperado el 18 de marzo de 2010 en http://www.rsme.es/gacetadigital/abrir.php?id=546

Fallas Vargas, F. (2008) “Gestalt y Aprendizaje2. Revista Electrónica “Actualidades Investigativas en Educación”, enero-abril, vol 8. nº 1. Disponible en redalyc.uaemex.mx/pdf/447/44780107.pdf. Recuperado en enero del 2011

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). “Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática”. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 26 (1): 39-88.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. [Versión ampliada del artículo: Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The Internacional Journal on Mathematics Education, 39 (1-2), pp. 127-135]. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Hitt, F. (2001) “El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un proyecto de investigación en Educación Matemática”, en Gomez, P. y Rico, L. (Eds) *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Editorial Universidad de Granada, Granada, pp 165-177.

Hitt, F. (2003). “Una reflexión sobre la construcción de conceptos matemáticos en ambientes con tecnología”. *Boletín de la asociación matemática venezolana*, 10 (2), 213-223.

León, O., Montero, I. (1997) *Diseño de Investigaciones. Introducción a la lógica de la investigación en Psicología y Educación*. Editorial McGraw-Hill. Buenos Aires.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1114