



---

**CONGRESO  
IBEROAMERICANO**  
DE CIENCIA, TECNOLOGÍA,  
INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN

---

BUENOS AIRES, ARGENTINA  
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

---

**CONGRESSO  
IBERO-AMERICANO**  
DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA,  
INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO

---

BUENOS AIRES, ARGENTINA  
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

## **Procesos cognitivos y significación de símbolos algebraicos en estudiantes universitarios**

DISTEFANO, M. L.; AZNAR, M. A.; POCHULU, M.

## Procesos cognitivos y significación de símbolos algebraicos en estudiantes universitarios

María Laura Distéfano; María Andrea Aznar; Marcel David Pochulu.

Universidad Nacional de Mar del Plata, Universidad Nacional de Villa María

[mldistefano@fi.mdp.edu.ar](mailto:mldistefano@fi.mdp.edu.ar); [maznar@fi.mdp.edu.ar](mailto:maznar@fi.mdp.edu.ar); [marcelpochulu@hotmail.com](mailto:marcelpochulu@hotmail.com)

### RESUMEN

Los alumnos ingresantes a carreras universitarias que contienen Matemática en su plan de estudios se enfrentan a la necesidad de leer y escribir utilizando símbolos que son de uso exclusivo en esta ciencia y que no tienen sentido fuera de ella. Sin embargo, los símbolos no son objetos directos de enseñanza, a pesar de que las representaciones semióticas son un insumo indispensable en el quehacer matemático. Las problemáticas vinculadas a las representaciones semióticas presentan gran relevancia por tratarse de herramientas que permiten el acceso a los conceptos matemáticos.

En este trabajo se presentan análisis y constructos vinculados a los procesos cognitivos que llevan a cabo los estudiantes cuando realizan actividades de simbolización y de significación, utilizando representaciones simbólicas básicas de la Matemática universitaria.

Para esta investigación, que es de tipo cualitativo, se trabajó con 101 estudiantes ingresantes a las carreras de Ingeniería, Profesorado y Licenciatura en Matemática, Bioquímica y Profesorado y Licenciatura en Biología, de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina). Se elaboró un instrumento y se realizaron entrevistas, destinados a indagar en los procesos que realizan los estudiantes en la lectura o en la formulación de expresiones simbólicas. Para acotar la investigación, se hizo un recorte sobre los símbolos a estudiar, seleccionando seis símbolos de uso frecuente:  $\in$ ,  $\subset$ ,  $\forall$ ,  $\exists$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ .

Se consideraron elementos teóricos del Enfoque Cognitivista y del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2009).

Se definieron algunas funciones semióticas, ligadas a la construcción de significado de los símbolos en estudio. Se elaboró la configuración epistémica de los ítems correspondientes a los ejercicios propuestos en el instrumento.

A partir de estas configuraciones y de las funciones semióticas definidas, se analizó y estableció la vinculación entre ellas en cada ítem. De esta manera se obtuvo un esquema de análisis que conjuga y vincula las herramientas mencionadas para describir los procesos cognitivos en juego.

## INTRODUCCIÓN

Las representaciones semióticas son un insumo indispensable en el quehacer matemático, por lo que las problemáticas relacionadas con los aspectos semióticos presentan gran relevancia por tratarse de herramientas que hacen viable la adquisición de los conceptos matemáticos. Duval subraya este hecho afirmando “No hay noesis sin semiosis” (2004, p. 16). Por su parte, Vergnaud (1990) expresa que las investigaciones deben dirigirse a estudiar los procesos cognitivos propios del pensamiento matemático, y que la actividad matemática se desarrolla en un contexto de representación que es, necesariamente, semiótico.

Los alumnos que ingresan a carreras universitarias que contienen Matemática en su plan de estudio se enfrentan a la necesidad de leer y escribir utilizando símbolos que son de uso exclusivo de esta ciencia y que no tienen sentido fuera de ella. Estos símbolos no son de uso frecuente en la escuela media pero son indispensables en el desarrollo de asignaturas de Matemática impartidas a nivel universitario. La habilidad del dominio de la escritura y lectura de expresiones que involucran este tipo de símbolos es necesaria para los estudiantes desde el momento inicial, ya que los docentes los emplean constantemente en el desarrollo de las clases, la bibliografía contiene gran cantidad de expresiones simbólicas y se espera que ellos produzcan resoluciones que los requieren.

Sin embargo, los símbolos no son objetos directos de enseñanza y, en muchos casos, se supone que su significación por parte del alumno se genera simplemente, y de manera casi espontánea, por la mención del vocablo que lo identifica en lenguaje natural.

En la práctica docente se observan las numerosas dificultades que los alumnos presentan al momento de leer o escribir en forma simbólica, que conducen a pensar que el proceso de significación de esos símbolos no ha alcanzado el nivel que estas asignaturas requieren para desarrollar eficientemente sus prácticas matemáticas.

En este trabajo, se presenta un análisis de los procesos cognitivos que están involucrados en la construcción del significado. Dicha construcción implica, no sólo el conocimiento de su denominación coloquial, sino de todas las reglas y convenciones que hacen a su uso. Entran en juego las prácticas de simbolización y de interpretación, que requieren de una cantidad de procesos mentales de distinta complejidad. Bajo esta perspectiva, se formularon preguntas que resultaron regentes en la investigación: ¿Qué procesos cognitivos llevan a cabo los estudiantes cuando realizan actividades de simbolización y de interpretación con representaciones simbólicas básicas de la Matemática superior? ¿De qué manera se vinculan esos procesos? ¿Estos procesos son comunes a los distintos símbolos?

Para ello se trabajó con estudiantes ingresantes a distintas carreras universitarias que cursaban la primera asignatura del área Álgebra.

## MARCO TEÓRICO

La construcción de significado de un símbolo es un proceso muy amplio que puede ser abordado desde diferentes perspectivas.

Para esta investigación se consideraron conceptos provenientes tanto del Enfoque Cognitivista y como del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS).

En el transcurso de la investigación se emplearon diferentes nociones y constructos que permiten describir y caracterizar el proceso de significación en estudio. En una primera aproximación, se tomó el concepto de *proceso cognitivo*, entendido como cualquier procedimiento que se lleva a cabo para incorporar conocimientos. Los procesos cognitivos que resultan de interés en esta investigación son aquellos que se asocian al pensamiento matemático de orden superior, tales como representar, clasificar, abstraer, generalizar, formalizar (Azcárate, 1998).

Conjuntamente, se tuvo en cuenta la concepción que el EOS tiene de una *práctica matemática*, que se define como cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos (Godino Batanero y Font, 2008). A partir de este concepto, surge la noción de *significado*. El significado se define entonces como “el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas” (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.7). Para el EOS, la cuestión del significado de los objetos matemáticos es de índole ontológica y epistemológica, puesto que se centra tanto la naturaleza como en el origen de dichos objetos (Godino, Batanero y Font, 2008).

Para el EOS, el aprendizaje supone la apropiación por parte del estudiante de los significados validados en el seno de una institución, mediante su participación en las comunidades de prácticas (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007; Godino, Batanero y Font, 2008). Plantear el aprendizaje en términos de significados, otorga una relevancia central al proceso mediante el cual un sujeto crea un significado vinculando una expresión con un contenido a través de una *función semiótica*. Esta función es establecida por un sujeto (persona o institución) de acuerdo con un cierto criterio o regla de correspondencia. De esta manera, los distintos objetos no resultan aislados entre sí, sino que se vinculan a través de las funciones semióticas construidas entre ellos, pudiendo ejercer el rol de antecedente o de consecuente (Godino Batanero y Font, 2008).

Debido al rol preponderante que juegan los objetos, el EOS considera que el problema epistémico-cognitivo no puede desligarse del ontológico. Así, la tipología de objetos primarios, u objetos de primer orden, según Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2007), está constituida por: situaciones-problemas, elementos lingüísticos, conceptos, proposiciones y argumentos. Estas seis entidades primarias postuladas no son objetos aislados sino que se vinculan entre sí: las situaciones-problemas son el origen y motivación de la actividad, el lenguaje actúa como soporte para representar a las restantes entidades y sirve de instrumento para la acción, los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que, conjuntamente con las definiciones, resuelven las situaciones-problemas. Estas relaciones entre los objetos primarios determinan las *configuraciones*, definidas por Godino, Batanero y Font (2008) como “las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos.” (p. 8).

Todos los elementos que conforman las configuraciones pueden ejercer el rol de expresión o contenido de funciones semióticas. De este modo, las funciones

semióticas y la ontología matemática asociada tienen en cuenta la naturaleza relacional de la matemática y amplían el significado de representación.

## METODOLOGÍA

La investigación realizada es de tipo cualitativo. Para acotarla, se hizo un recorte sobre los símbolos a estudiar, seleccionando seis símbolos de uso frecuente en las asignaturas del área Álgebra en el nivel superior:  $\in$ ,  $\subset$ ,  $\forall$ ,  $\exists$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ .

Se elaboró un instrumento *ad-hoc* y se realizaron entrevistas semiestructuradas, para indagar en los procesos que realizan los estudiantes en la lectura o en la formulación de expresiones simbólicas. El mencionado instrumento tuvo dos versiones que fueron administradas en años consecutivos. La primera versión fue un piloto y la segunda resultó a partir de mejoras y reformulaciones que fueron consecuencia de los análisis realizados a los datos relevados con la primera versión.

En ambas versiones, se incluyeron actividades de lectura y escritura de expresiones simbólicas. Estas actividades requirieron la escritura de ejemplos de uso, la constatación de estructuras sintácticas, conversiones entre los registros coloquial y simbólico-algebraico, y la asignación de valores de verdad.

Se propusieron expresiones con distinto nivel de complejidad: expresiones atómicas con símbolos de pertenencia o inclusión, expresiones moleculares con operador lógico de conjunción o disyunción y expresiones moleculares con una variable cuantificada. Esta variación en la complejidad de las expresiones estuvo destinada a que se pudiera extraer información de un modo segmentado.

Todas las expresiones refieren a unidades temáticas que se imparten en la escuela media, de modo que el contenido matemático al que la expresión refiere no resultara un obstáculo en la comprensión de la expresión.

La primera versión del instrumento se administró a 41 estudiantes de las carreras de Ingeniería. La segunda versión fue administrada a 101 estudiantes de primer año de las carreras de Ingeniería, Bioquímica, Profesorado y Licenciatura en Matemática y Profesorado y Licenciatura en Biología, de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina). Los datos fueron relevados, en cada caso, a mediados del curso de Álgebra, durante el primer cuatrimestre de cursada.

## RESULTADOS Y ANÁLISIS

La construcción de significado de un símbolo es un proceso muy amplio que involucra dos prácticas principales: una asociada a la sintaxis, la *simbolización*, y otra asociada al aspecto semántico que podría denominarse *interpretación*.

Después de un primer relevamiento de datos, se constató que numerosos estudiantes, si bien podían asociar el símbolo con su nombre, no distinguían si una expresión estaba correctamente escrita o cometían errores en las tareas ligadas al contenido semántico de una expresión dada.

En la búsqueda de explicar las dificultades observadas y de analizar la complejidad de las prácticas mencionadas, se analizaron los procesos cognitivos que estaban involucrados o implicados en estas dos prácticas.

De esta manera, se determinó que en la actividad de simbolización están presentes los procesos de:

- *Memorización*, para recordar la asociación entre el nombre del símbolo y su representación semiótica.
- *Codificación/ Decodificación*, para sustituir los objetos por símbolos convencionales.
- *Clasificación*, para situar cada objeto interviniente en una categoría de acuerdo con el rol que juega en la expresión.
- *Generalización*, para identificar las estructuras sintácticamente correctas de acuerdo con los símbolos intervinientes en una expresión.

En la actividad de interpretación se identificaron los procesos de:

- *Memorización*, para recordar la asociación entre el nombre del símbolo y su representación semiótica.
- *Clasificación*, para distinguir si los objetos intervinientes están en una determinada categoría que le otorgue sentido a la expresión.
- *Generalización*, para extender a todos los elementos de un conjunto el análisis realizado a partir de algunos casos.
- *Síntesis*, para relacionar y constituir en un todo los elementos que forman parte de la expresión.

Como puede observarse, los procesos de clasificación y generalización aparecen tanto en la actividad de simbolización como en la de significación, sin embargo en cada una refiere a acciones distintas. Es decir que estos procesos son relativos a la actividad y, en particular, a las características del símbolo, como puede verse en el detalle que se presenta en la Tabla 1. En la misma se especifican estos procesos de clasificación y de generalización en relación a cada uno de los seis símbolos en estudio, para las prácticas de simbolización y de interpretación.

Actividad	Proceso	$\in$	$\subset$	$\wedge$	$\vee$	$\forall$	$\exists$
	Simbolización	Clasificación	Distinguir los objetos que intervienen en la expresión y clasificarlos como <i>elemento y conjunto</i>	Distinguir los objetos que intervienen en la expresión y clasificarlos como <i>conjuntos</i>	Distinguir los objetos que intervienen en la expresión y clasificarlos como <i>proposiciones</i>	Distinguir los objetos que intervienen en la expresión y clasificarlos como <i>proposiciones</i>	Distinguir los objetos que intervienen en la expresión y clasificarlos como <i>esquema proposicional</i>
Generalización		Identificar la estructura <i>elemento-conjunto</i>	Identificar la estructura <i>conjunto-conjunto</i>	Identificar la estructura <i>proposición-proposición</i>	Identificar la estructura <i>proposición-proposición</i>	Identificar la estructura <i>Cuantificador-esquema proposicional</i>	Identificar la estructura <i>Cuantificador-esquema proposicional</i>
Interpretación	Clasificación	Determinar si el elemento está en la categoría que define al conjunto	Determinar si cada uno de los elementos del primer conjunto está en la categoría del segundo conjunto	Determinar si cada una de las proposiciones está en la categoría Verdadero/Falso	Determinar si la proposición está en la categoría Verdadero/Falso	Determinar si cada una de las proposiciones derivadas del esquema proposicional está en la categoría Verdadero/Falso	Determinar si cada una de las proposiciones derivadas del esquema proposicional está en la categoría Verdadero/Falso
	Generalización		Para decidir si TODOS los elementos del primer conjunto pertenecen al segundo			Para decidir todas o algunas de las proposiciones son verdaderas	Para decidir todas o algunas de las proposiciones son verdaderas

			conjunto				
--	--	--	----------	--	--	--	--

Tabla 1. Procesos cognitivos comunes a las prácticas de simbolización e interpretación en relación a cada símbolo

Los procesos de memorización, clasificación y generalización son comunes a ambas prácticas. Sin embargo, los dos últimos tienen distinto alcance en cada una de ellas, es decir que se diferencian por sus “contextos de aplicación”. Esto conduce a pensar que el aporte de cada uno de ellos a la construcción de significado es diferente. Por ejemplo, podría presentarse el caso en el que un alumno pudiera clasificar en la actividad de simbolización pero no en la de interpretación. Además, estos dos procesos no pueden evaluarse de manera discriminada.

Todas estas consideraciones ponen de manifiesto que los procesos cognitivos en sí mismos no resultan una herramienta precisa para describir la construcción del significado en el modo deseado.

Tampoco las prácticas de simbolización e interpretación, tal como fueron planteadas, permiten describir en forma eficiente la construcción del significado. Por ejemplo, se observó que muchos alumnos, si bien podían asociar un símbolo con su nombre, no conseguían resolver tareas de lectura y escritura evidentemente ligadas a la práctica de simbolización del mismo. Esto lleva a plantear que en la simbolización hay dos etapas que deberían estudiarse en forma diferenciada.

A partir de todas estas apreciaciones, y siempre bajo la concepción de significado que contempla el EOS, se reconsideraron las prácticas involucradas en la construcción del significado de un símbolo. De este análisis surgieron tres prácticas bien diferenciadas: conocer el símbolo, reconocer una estructura formal para leer o escribir una expresión simbólica y comprender el contenido de la expresión.

Posteriormente, se representó a cada uno de estas prácticas, componentes del significado de un símbolo, a través de *funciones semióticas*, que conjugan los distintos objetos implicados e involucran a los procesos cognitivos antes analizados. Se definieron así, tres funciones semióticas:

**F1:** relaciona el vocablo de su denominación con el símbolo

**F2:** relaciona el símbolo con la estructura sintáctica de la expresión que lo contiene

**F3:** relaciona la proposición en la que está presente el símbolo, con su valor de verdad, el cual depende también de los significados de los operandos involucrados.

A modo de ejemplo, se presentan en la Figura 1 las funciones semióticas para el caso particular del símbolo de pertenencia, en el que se detallan el antecedente y el consecuente para cada una de ellas.



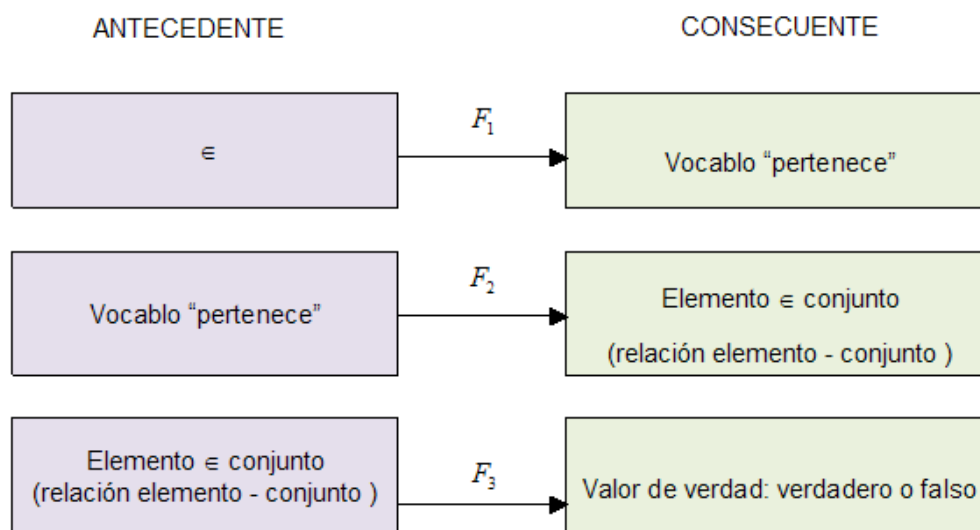


Figura 1. Funciones semióticas para el símbolo de pertenencia

Como ya se expresó, la función  $F_2$  se establece entre la denominación del símbolo y la estructura determinada por la sintaxis de la representación. Es importante destacar que esa sintaxis involucra tanto el orden de los elementos como los roles jugados por ellos.

Es necesario realizar algunas observaciones respecto de esta función semiótica ( $F_2$ ), pues existen particularidades en relación a cada uno de los símbolos estudiados:

- En el caso de la pertenencia, la sintaxis exige que, para que una expresión esté "bien formada", si el operando de la izquierda forma parte de una determinada categoría, el de la derecha debe ser un conjunto de objetos de dicha categoría.
- Para una expresión en la que participe el símbolo de *conjunción* o el de *disyunción*, la condición para que la expresión esté bien formada es que ambos operandos sean proposiciones.

Cabe una observación para el caso de la conjunción. A diferencia de la Lógica, en Matemática son de uso habitual representaciones en las que se hace un "uso tácito" de este símbolo. Por ejemplo, la expresión " $a, b \in \mathbb{R}$ " por convención se interpreta como:  $(a \in \mathbb{R}) \wedge (b \in \mathbb{R})$ .

• Para considerar como bien formadas expresiones cuantificadas, el cuantificador debe estar seguido de un esquema proposicional (o forma proposicional) referido a la variable cuantificada. Resulta necesario puntualizar que existen algunas convenciones de uso en la Matemática admitidas como correctas que no lo son desde la estructura estrictamente bien formada de la Lógica, como por ejemplo el uso tácito del cuantificador universal. En esta investigación, se consideraron como correctamente escritas tanto las que tienen la forma que impone la Lógica como las de uso habitual en Matemática.

Las funciones semióticas definidas, de acuerdo a los elementos que vinculan, pueden clasificarse de la siguiente manera: F1 es *nominal*, F2 es *sintáctica* y F3 es *semántica*.

El establecimiento de estas funciones por parte de los alumnos fue posible de ser evaluado a través de tareas de lectura y escritura de expresiones simbólicas, que involucran la identificación del símbolo, la escritura de ejemplos utilizándolos, el reconocimiento de expresiones bien formadas y el establecimiento de valores de verdad, tal como se describió en la sección de Metodología.

Posteriormente, y en vistas a realizar un análisis más refinado de los objetos intervinientes, se confeccionó la configuración epistémica de los ítems correspondientes a los ejercicios propuestos en la segunda versión del instrumento.

A partir de estas configuraciones y de las funciones semióticas definidas, se analizó y estableció la vinculación entre ellas en cada ítem, teniendo en cuenta que las funciones semióticas tienen como antecedente y consecuente objetos primarios. En la Figura 2 se presenta un ejemplo de este análisis conjunto relativo al primer ejercicio del instrumento.

En dicho ejercicio se presentan los seis símbolos en estudio. Para cada uno se pide: indicar cómo se lee y escribir un ejemplo utilizándolo. La práctica involucrada en este ejercicio es entonces: leer un símbolo y escribir un ejemplo utilizándolo.

Claramente, no hay una respuesta única a la ejemplificación solicitada. Para confeccionar la configuración epistémica de la resolución correspondiente al símbolo de pertenencia, al que corresponde la configuración presentada en la Figura 2, se tomó como referencia uno de los ejemplos que más aparecía en las resoluciones de los estudiantes, en la que optaban por indicar que algún número en particular pertenecía a los números reales. De esta manera se realizó la configuración de la expresión:  $4 \in \mathbb{R}$ .

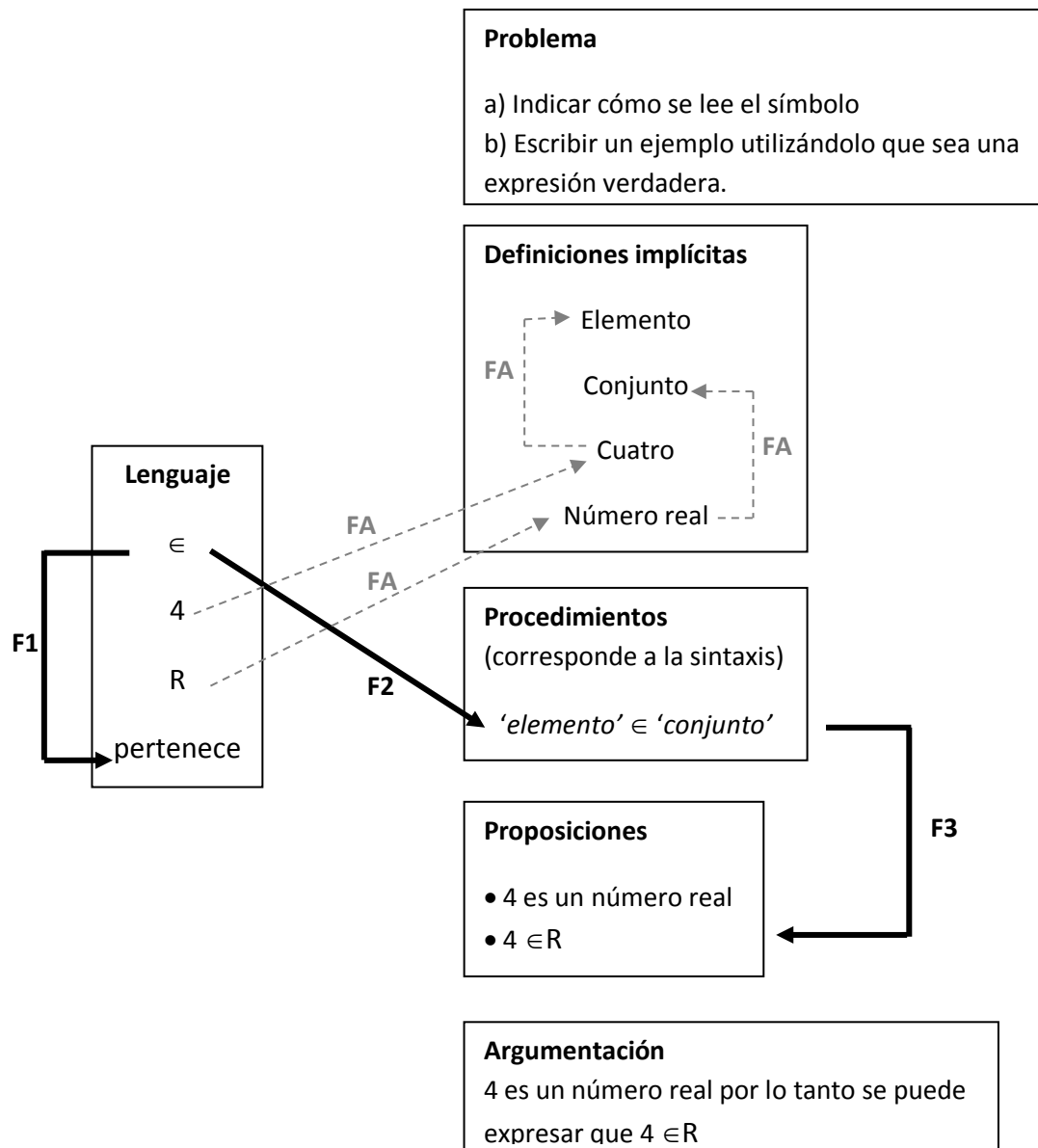


Figura 2. Configuración epistémica y funciones semióticas

**Observación:** Las expresiones FA indican una Función semiótica Auxiliar. Las mismas están presentes en la resolución del ejercicio pero no corresponden al proceso de simbolización propio del símbolo en estudio.

## CONCLUSIONES

En este trabajo se presentó un análisis del proceso de construcción de significado de algunos símbolos algebraicos que tienen la particularidad de no tener significación fuera del ámbito matemático, pero que son de uso frecuente en las asignaturas de la matemática superior.

Se observó que los procesos cognitivos involucrados, si bien están presentes, no resultan suficientes para describir el proceso general de construcción de significado de los símbolos en estudio, puesto que su alcance difiere de acuerdo al contexto de aplicación y por lo tanto su aporte en la construcción de significado debe ser diferenciado. Además estos procesos no son susceptibles de ser evaluados de manera discriminada.

Tampoco resultaron completamente apropiadas las primeras actividades contempladas – simbolización e interpretación– puesto que se observó que en la práctica de simbolización debían considerarse dos etapas diferenciadas, la de asociar el símbolo con su nombre y la de resolver tareas ligadas a la lectura o escritura empleando el símbolo en cuestión.

Este primer análisis, junto a la reconsideración de las prácticas ligadas al significado de un símbolo, condujeron a la utilización de una potente herramienta metodológica que utiliza el EOS como son las funciones semióticas. De esta manera, se definieron tres funciones semióticas que abarcan los aspectos nominal, sintáctico y semántico. La evaluación del establecimiento de dichas funciones semióticas fue viable a través de distintas actividades.

Se espera que la utilización de estas funciones semióticas en el análisis de las producciones de los alumnos permita describir y caracterizar de manera minuciosa el proceso de construcción de significados de los símbolos algebraicos.

## BIBLIOGRAFÍA

- AZCÁRATE, C. (1998). "Acerca de los procesos del pensamiento matemático avanzado". *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*. Vol.1, Num. 2, 235-240.
- DUVAL, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano*. Colombia: Universidad del Valle. Instituto de educación y pedagogía.
- GODINO, J. D., BENCOMO, D., FONT, V. y WILHELMI, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta\\_valoracion\\_idoneidad\\_5enero07.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf)
- GODINO, J. D., BATANERO, C. y FONT, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de: [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis\\_eos\\_10marzo08.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf)
- VERGNAUD, G. (1990) La teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathematiques*. Vol. 10, 2, 3, 133-170. Traducido por Juan D. Godino.