



**CONGRESO
IBEROAMERICANO**
DE CIENCIA, TECNOLOGÍA,
INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

**CONGRESSO
IBERO-AMERICANO**
DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA,
INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

Problemas de optimización: un análisis en la construcción de significados

BACCELLI, S.; ANCHORENA, S.; FIGUEROA, S.M.; PRIETO, G.

Problemas de optimización: un análisis en la construcción de significados

BACCELLI, S.; ANCHORENA, S.; FIGUEROA, S.M.; PRIETO, G.
Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata. Argentina
sbaccelli@gmail.com; pollo_mdp@yahoo.com; stellafigueroa@gmail.com;
gloria.prieto1@gmail.com

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es presentar el análisis de los obstáculos en la construcción de significados, que dificultan la resolución de problemas de optimización en estudiantes de primer año de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina). La resolución de este tipo de problemas resulta fundamental para la formación del perfil del ingeniero, con lo cual este tema adquiere relevancia.

Se utiliza como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción y la Cognición Matemática (Godino, Batanero y Font, 2009).

El análisis realizado permite evidenciar el cambio en los resultados obtenidos por parte de los alumnos, antes y después de una experiencia didáctica que tuvo como objetivo producir una mejora en los aprendizajes ligados a la resolución de dichos problemas.

Para evaluar el desempeño de los alumnos se diseñó y administró un instrumento. Se detectó que la mayoría de las dificultades que muestran los alumnos, se centran en el empleo inapropiado de los procedimientos asociados a dichos problemas (Baccelli, Anchorena, Moler y Aznar, 2013). También se observaron falencias en los argumentos utilizados por los estudiantes para justificar o validar dichos procedimientos (Baccelli, Anchorena, Figueroa y Prieto, 2013). Se identificaron conflictos semióticos subyacentes, que resultaron insumos fundamentales para el diseño de la experiencia didáctica.

Una vez implementada la experiencia, se relevaron datos nuevamente, comparando los resultados con los obtenidos antes la intervención didáctica. Si bien se observa una mejora sustancial en la construcción de significados, se detecta, sin embargo, que persisten discrepancias entre los significados pretendidos y los evidenciados por los estudiantes. Se presentan, en consecuencia, líneas de orientación para la mejora en el diseño de una nueva intervención.

INTRODUCCIÓN

Para los ingenieros la optimización es esencial en el desarrollo de su profesión: los problemas que deben resolver implican, casi siempre, como tarea específica, obtener la solución de un problema técnico optimizando el uso de los recursos disponibles. Lograr la producción máxima, utilizando una dotación fija de recursos, o bien obtener un nivel de producción dado utilizando la mínima cantidad de recursos, son algunos de los ejemplos que podemos nombrar y que hacen a la relevancia de la enseñanza de procesos vinculados con la optimización.

En este contexto, los contenidos de matemática, referidos a máximos y mínimos relativos de funciones, se vinculan con las competencias y capacidades requeridas por el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI), donde una de sus competencias genéricas es la resolución de problemas.

Es preocupante que la mayoría de los estudiantes de un primer curso de Análisis Matemático de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Mar del Plata (Argentina) fracase en la resolución de problemas de optimización. En las

evaluaciones, la mayoría de los estudiantes ni siquiera aborda estos problemas, mientras que los que lo intentan evidencian dificultades en el planteo, en el desarrollo y en la verificación de los resultados obtenidos.

Por tal razón este trabajo se focaliza en el análisis de las dificultades en la resolución de problemas de optimización en estudiantes de primer año. Dicho análisis pone en evidencia el significado que un grupo de alumnos le otorga a problemas de optimización.

Así mismo, para producir una mejora en los aprendizajes ligados a la resolución de dichos problemas, el estudio realizado muestra el cambio en las producciones de los alumnos, antes y después de una intervención didáctica.

Para dicho análisis se plantean los siguientes objetivos:

- Realizar un análisis de las resoluciones de problemas de optimización producidas por los alumnos, utilizando las herramientas que provee el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS).
- Definir funciones semióticas, asociadas a la resolución de problemas de optimización, como instrumento para la determinación de conflictos semióticos y como parte del análisis del significado evidenciado por los alumnos en sus resoluciones.
- Obtener información relevante para el diseño de estrategias de enseñanza.

A continuación se presentan los elementos del marco teórico utilizados en este trabajo.

MARCO TEÓRICO

El EOS desarrollado por Godino, Batanero y Font (2009), pretende explicar y valorar los procesos que se producen en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, teniendo en cuenta el triple aspecto de la actividad matemática como actividad de resolución de problemas socialmente compartida, como lenguaje simbólico y como sistema conceptual lógicamente organizado.

Uno de los conceptos centrales es el de *práctica matemática*, concebida como toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas (Godino y Batanero, 1994). Las prácticas pueden ser características de una persona, o compartidas en el seno de una institución. En estas prácticas matemáticas intervienen objetos, que pueden ser *ostensivos* (símbolos, gráficos, etc.) y *no ostensivos* (conceptos, proposiciones, etc.), que son representados en forma textual, oral, gráfica o incluso gestual.

Es así que, el significado de un objeto matemático se considera *institucional* cuando emerge del sistema de prácticas matemáticas, ligadas a una institución, en un campo de problemas. Por otro lado, el significado de un objeto se considera *personal* cuando emerge de la práctica de una persona, y está igualmente asociado a la resolución de cierto tipo de problemas en una institución.

A la disparidad o discordancia entre los significados institucionales y personales se la denomina *conflicto semiótico*. Si dicha disparidad se produce entre significados institucionales hablamos de conflictos semióticos de tipo epistémico, mientras que si la disparidad se produce entre prácticas que forman el significado personal de un mismo sujeto los designamos como conflictos semióticos de tipo cognitivo. Cuando la disparidad se produce entre las prácticas (discursivas y operativas) de dos sujetos en interacción comunicativa (por ejemplo, alumno-alumno o alumno-profesor) hablaremos de conflictos (semióticos) interaccionales.

Los objetos que emergen de las prácticas van sufriendo transformaciones, incrementando el campo de problemas y modificando el sistema de prácticas para ampliar sus significados. En un primer nivel Godino, Batanero y Font, (2009), proponen

los objetos denominados primarios: elementos lingüísticos en sus diversos registros, situaciones – problemas, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos. Estos objetos se relacionan formando *configuraciones*, pensadas como redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, incluidas las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas*, desde una mirada institucional, o *cognitivas*, desde un punto de vista personal.

Se describen las relaciones existentes entre los objetos primarios diciendo que:

En las configuraciones epistémicas o cognitivas, las situaciones-problemas son origen o razón de ser de la actividad, y las que vienen a motivar el conjunto de reglas que aparecen en ella. El lenguaje, por su parte, sirve de instrumento para la acción. Los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre si, todo lo cual viene a regular el uso del lenguaje, que por su parte, sirve de instrumento para la comunicación (Pochulu, 2012, p.70)

Todos los objetos primarios que conforman las configuraciones pueden ejercer el rol de expresión o de contenido de una *función semiótica*. Plantear el aprendizaje en términos de significados, “otorga una relevancia central al proceso mediante el cual un sujeto crea un significado vinculando una expresión con un contenido a través de una *función semiótica*” (Distéfano, Aznar y Pochulu, 2012, p.65). Esta última la establece un sujeto (persona o institución) de acuerdo a una regla de correspondencia. La función semiótica destaca el carácter esencialmente relacional de la actividad matemática y sirve para explicar algunas dificultades y errores de los alumnos, dado que los conflictos que causan equivocaciones en los alumnos no resultan de su falta de conocimientos, sino que son producto de no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica (Godino, Batanero y Font, 2009).

En la Tabla 1 se describen diferentes tipos de funciones semióticas según el objeto primario interviniente, teniendo en cuenta la clasificación presentada en Godino (2003).

Tabla 1. Tipos de funciones semióticas

Tipo de función semiótica	Contenido
<i>Lingüística</i>	Término, expresión, gráfico u otro elemento lingüístico
<i>Situacional</i>	Situación-problema
<i>Conceptual</i>	Concepto, definición
<i>Proposicional</i>	Propiedad o atributo del objeto
<i>Actuativa</i>	Acción u operación, algoritmo o procedimiento
<i>Argumentativa</i>	Argumentación

METODOLOGÍA

Tipo de investigación

Se llevó a cabo una investigación exploratorio descriptiva.

Población y Muestra

La población objetivo está formada por los alumnos de la asignatura Análisis Matemático A perteneciente al primer año de las carreras de la Facultad de Ingeniería de la UNMdP.

Se trabajó con 183 alumnos de la cohorte 2010. De ellos, se seleccionaron 78 alumnos que rindieron un parcial donde se evaluó la problemática en cuestión. Se establecieron dos grupos, determinados por las comisiones:

- Comisión 1 (C1) formado por 48 alumnos.
- Comisión 5 (C5) integrado por 30 alumnos que participaron de una intervención didáctica orientada a producir una mejora en la construcción de significado relativo a problemas de optimización.

Instrumentos

Para la recolección de datos se consideraron tres problemas de optimización. Dos de ellos suministrados antes de la experiencia didáctica, que se muestran en la Figura 1.

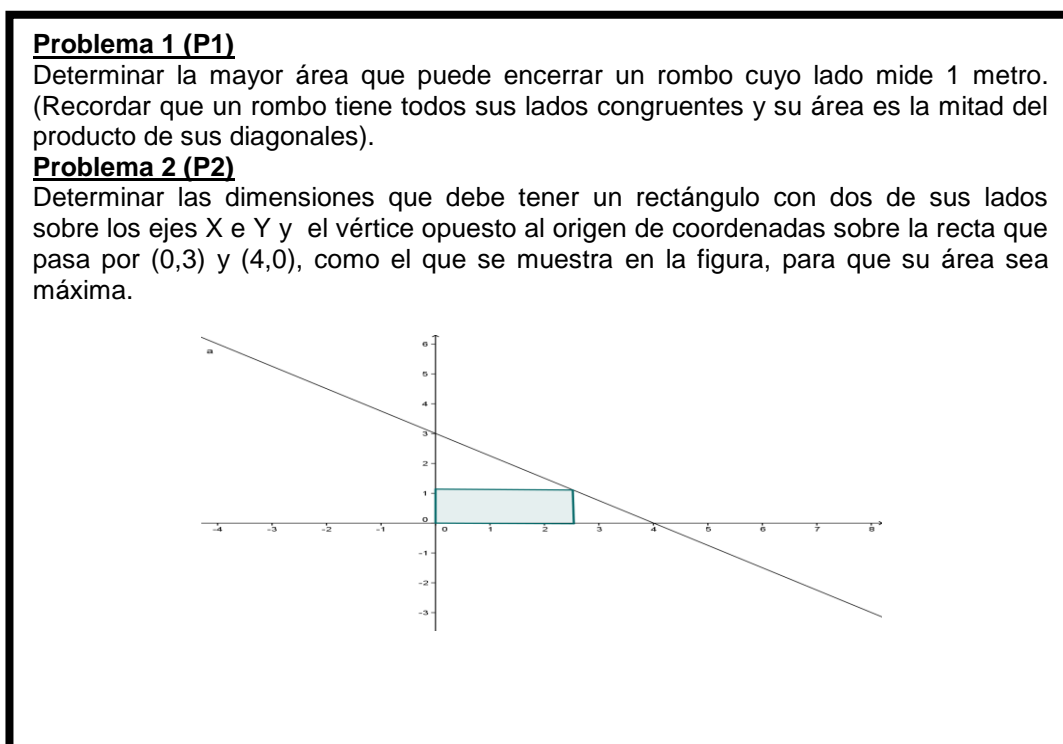


Figura 1. Problemas P1 y P2 administrados antes de la experiencia.

El tercer problema de optimización correspondiente a un ítem del parcial evaluado, se presenta en la Figura 2.

Complete y justifique con el desarrollo:

- Se quiere construir una caja de cartón de base cuadrada, abierta (sin tapa) de 32 dm^3 de volumen. Las dimensiones para que dicha caja tenga superficie mínima son.....

Figura 2. Problema P3 administrado después de la experiencia.

Procedimientos

En una **primera** etapa Se administró el instrumento formado por los problemas P1 y P2. Al momento de la toma de los datos ya habían concluido las actividades teóricas y prácticas referidas al tema en cuestión.

Para contrastar las producciones de los alumnos, en una **segunda** etapa, se utilizaron las configuraciones epistémicas de ambos problemas confeccionadas en base a las resoluciones de expertos. Las mismas pueden observarse en el trabajo de Baccelli, Anchorena, Moler y Aznar (2013, pp. 105-106).

En un **tercer** momento se establecieron funciones semióticas que tienen como antecedente un objeto primario y como consecuente las prácticas realizadas para resolver la situación problema. En la Tabla 2, se definen las funciones semióticas asociadas con el tipo de errores más frecuentes.

Tabla 2. Funciones semióticas intervinientes en P1 y P2

Antecedente	Función semiótica	Consecuente
Condición del problema	F_1	Relación entre variables que debe presentarse en la función a optimizar
Función área en dos variables	F_2	Identificación de la función a optimizar en dos variables
Función a optimizar en una variable	F_3	Re-expresión en función de una sola variable la función área
Derivada de la función	F_4	Función obtenida a partir de la aplicación de reglas de derivación a la función a optimizar
Punto crítico	F_5	Obtención del valor que hace cero la derivada primera o que no la define.
Criterios para determinar si un valor crítico es un extremo relativo	F_6	Variación del signo de la derivada primera en un entorno del punto crítico o signo de la derivada segunda en dicho punto o variación de la función en un entorno

En una **cuarta** etapa, se analizaron las configuraciones cognitivas correspondientes a cada problema. Dicho análisis permitió detectar los errores más frecuentes en las resoluciones de los alumnos. Luego se relacionaron las funciones semióticas con los errores mencionados con el fin de detectar posibles conflictos semióticos.

Posteriormente, se realizó una experiencia didáctica que se llevó a cabo en dos encuentros presenciales y se desarrolló en la Comisión 5 (C5). En el primer encuentro, se trabajó una guía de actividades para resolver en forma conjunta con los alumnos.

Durante la experiencia se puso el acento en aquellos objetos matemáticos que presentaron dificultades y que se hacen evidentes en las funciones semióticas establecidas en forma incorrecta por los alumnos. En un segundo encuentro se realizó la devolución de las tareas propuestas en la guía.

A modo de post-test se realizó el mismo análisis que para los problemas P1 y P2, de las producciones de los alumnos correspondientes al problema mostrado en la Figura 2.

Dicho problema involucra las mismas funciones semióticas que P1 y P2, es decir las definidas en la Tabla 2.

La Figura 3 muestra las funciones semióticas intervinientes en la resolución de un alumno. Cabe destacar que tiene establecidas todas las funciones semióticas requeridas para la resolución satisfactoria del problema.

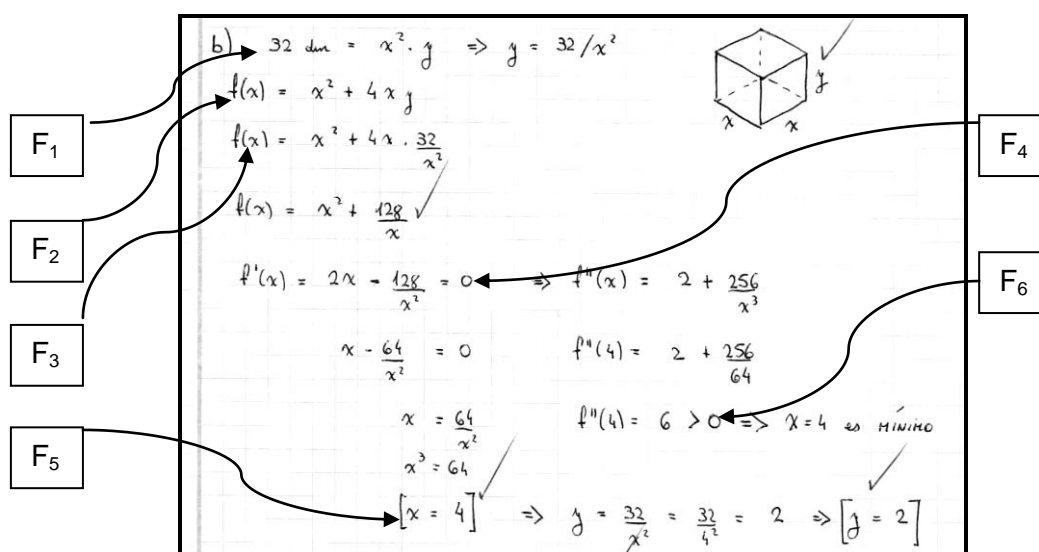


Figura 3. Resolución y funciones semióticas del P3

Se compararon cualitativa y cuantitativamente los resultados obtenidos. A cada función semiótica establecida se asignó el valor 1, y en caso contrario 0. Se estableció para cada problema un puntaje que resulta de la suma de las funciones semióticas establecidas. Dichos puntajes son Puntaje1, Puntaje2 y Puntaje3, y hacen referencia a los problemas P1, P2 y P3, respectivamente.

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

Resultados correspondientes a los problemas P1 y P2

El análisis realizado sobre las resoluciones de los problemas P1 y P2 replica lo que acontece históricamente en las evaluaciones de la asignatura al momento de la corrección de los mismos. Esto es, la baja cantidad de estudiantes que resuelven los problemas mencionados.

El Gráfico 1 compara los porcentajes de funciones semióticas establecidas, calculados sobre las 183 configuraciones cognitivas analizadas para los dos problemas.

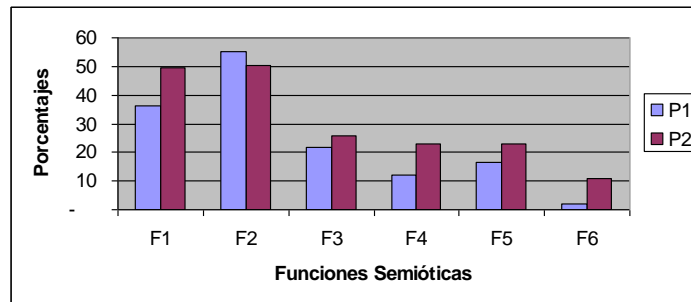


Grafico 1. Porcentaje de Funciones Semióticas establecidas en P1 y P2

La función F_1 , del tipo situacional-conceptual, evidencia que un 36% de los alumnos para P1 y un 50% para P2, tiene construido el significado personal asociado a la formulación de la ecuación que caracteriza la condición del problema.

Dada las características en el planteo de cada problema, uno en el lenguaje coloquial y el otro en el geométrico, es posible desagregar la función F_1 en sub-funciones que permiten explicar, con detalle las dificultades que se originan en el planteo de cada problema. Tal es el caso de las funciones desagregadas para el P1 citadas en Baccelli; Anchorena; Figueroa y Prieto (2013). Estas funciones permiten determinar los conflictos semióticos que explican los errores cometidos por los alumnos y muestran, en parte, el significado atribuido por estos alumnos. Por ejemplo considerar, erróneamente, la figura de análisis del problema P1 como un cuadrado siendo que es un rombo. Hecho que también justifica de alguna forma la diferencia de porcentaje mostrado en el Gráfico 1 entre P1 y P2.

Las funciones proposicionales - actuativas F_2 y F_3 , tienen un comportamiento similar en ambos problemas. Los resultados F_3 muestran la dificultad de los alumnos de determinar la función a maximizar en una variable, incluso en aquellos que tienen establecidas las funciones F_1 y F_2 . Se produce aquí un conflicto semiótico que pone de manifiesto otra disparidad de significado, como puede verse en la Figura 4.

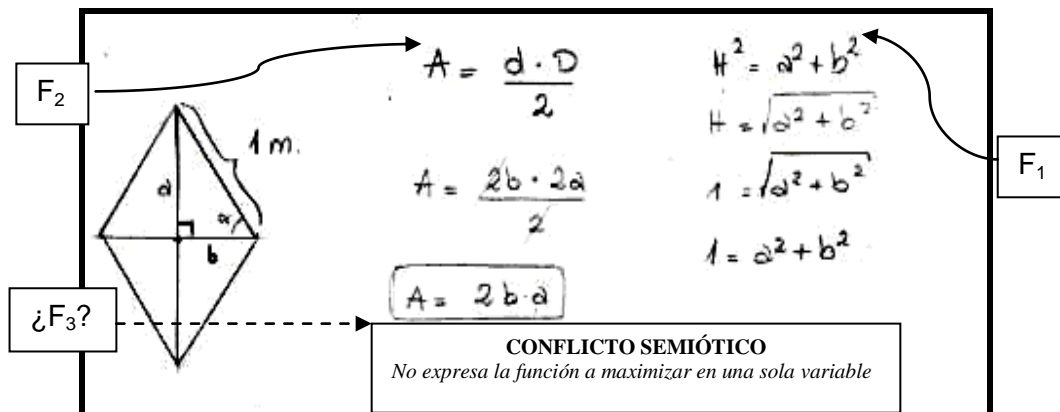


Figura 4. Conflicto semiótico asociado a F_3

La función F_4 es del tipo actuativa y no tiene grandes diferencias con F_3 hecho que revela que, quienes han definido la función en una variable, derivan sin dificultad. La diferencia de porcentajes entre los dos problemas es previsible, ya que la función a derivar correspondiente a P1 es de una complejidad mayor.

La función F_5 es del tipo conceptual y presenta un comportamiento similar que F_3 y F_4 .

La notoria diferencia de porcentajes que presenta la función F_6 , que corresponde a una función argumentativa, permite detectar otro conflicto semiótico. Dicho conflicto se produce cuando los alumnos suponen que si un valor es punto crítico entonces es extremo. La Figura 5 ejemplifica la situación antes mencionada y corresponde a la resolución del problema P2 de un alumno.

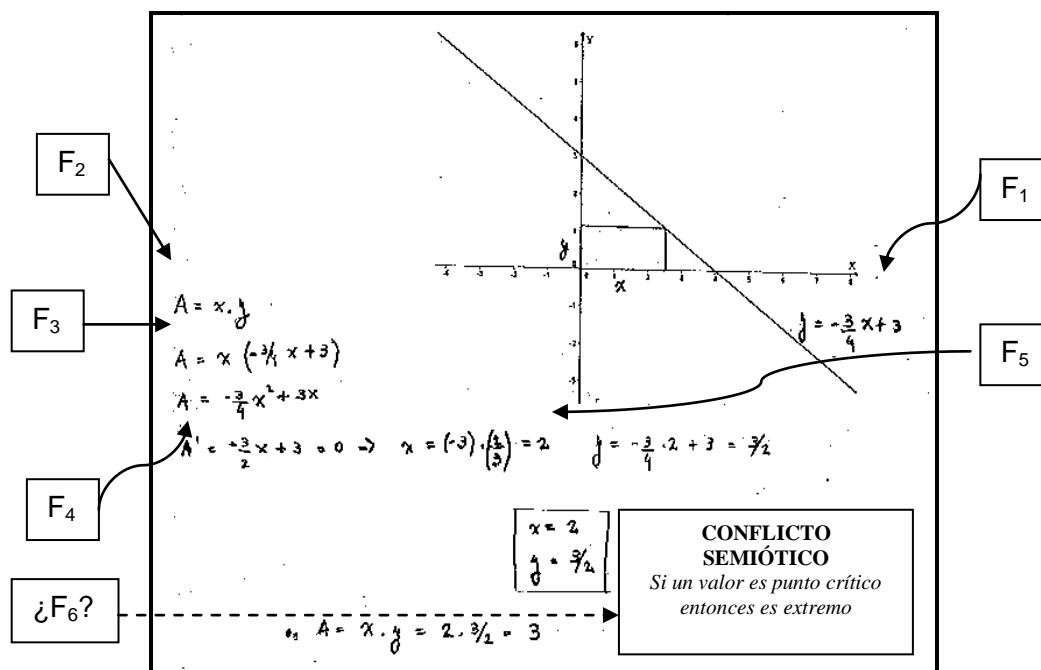


Figura 5. Conflicto semiótico asociado a F_6

Los conflictos semióticos mencionados son del tipo interaccional ya que se producen por la disparidad de significado entre los distintos sujetos involucrados.

Comparación entre los puntajes de las dos comisiones

Para mostrar el significado evidenciado en las configuraciones cognitivas, se compararon las producciones de los alumnos antes y después de la intervención didáctica. El puntaje asignado a cada problema analizado varía entre 0 y 6, representa la cantidad de funciones semióticas establecidas por los alumnos. En la Tabla 3 se presentan los puntajes de los tres problemas de las comisiones C1 y C5.

Tabla 3. Puntajes obtenidos en las pruebas. En el caso de la comisión C5, P3 se realiza después de la intervención didáctica de la que no participa C1.

Comisiones		Puntaje						
		0	1	2	3	4	5	6
C5	P1	20%	47%	13%	0%	7%	13%	0%
	P2	33%	37%	17%	0%	0%	10%	3%
	P3	30%	6%	6%	20%	6%	3%	27%
C1	P1	19%	33%	25%	11%	6%	6%	0%
	P2	33%	17%	27%	3%	2%	10%	8%
	P3	44%	21%	15%	2%	6%	4%	8%

Una primera observación de esta tabla permite afirmar que el mayor puntaje obtenido de los problemas P1 y P2 no supera el 3% de los alumnos, y es significativamente menor que el 27% del problema P3 correspondiente al parcial. Mientras que en la C1 los dos primeros problemas no muestran cambios con respecto al tercero.

Por otro lado, el mayor puntaje con seis puntos lo obtuvo la comisión C5, con un 27% de los alumnos, luego de la intervención didáctica. En contraposición con el 8% obtenido por la comisión C1.

El 44% de la comisión C1 que obtiene puntaje 0, pone en evidencia que no lograron establecer ninguna de las funciones semióticas definidas, contra el 30% en la comisión C5.

Asimismo es destacable el 20% de los alumnos que obtuvo puntaje 3 en la C5 comparado con el 2% de la comisión C1.

Comparación entre las funciones semióticas establecidas por las dos comisiones en el problema P3

En el Gráfico 2 se presenta el porcentaje de alumnos que estableció cada una de las seis funciones semióticas en el problema P3, correspondiente al parcial, comparando al comisión C5 con la C1.

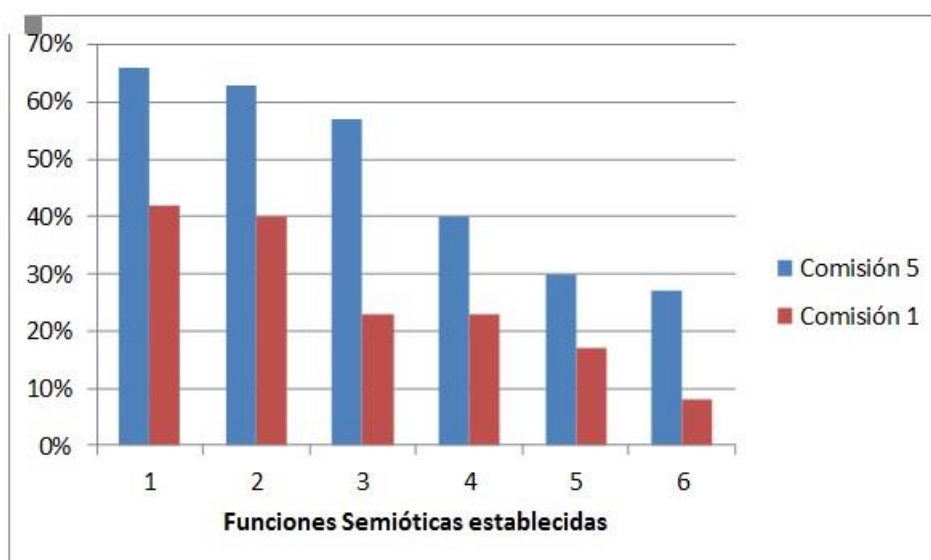


Grafico 2. Porcentaje de Funciones Semióticas establecidas en P3 para las dos comisiones

Se puede observar que el porcentaje de funciones semióticas establecidas en la comisión donde se produjo la intervención didáctica es notablemente mayor que en la comisión C1.

CONCLUSIONES

El detalle que proporcionan las herramientas teóricas y metodológicas del EOS permite reflejar el significado personal y el significado institucional referido a problemas de optimización. En particular, los objetos primarios intervinientes en las configuraciones resultaron fundamentales para la definición de las funciones semióticas involucradas. Dichas funciones explican los errores que cometen los

alumnos al resolver estos problemas. Así mismo, las funciones mal establecidas permiten identificar los conflictos semióticos, que se evidencian a partir de la comparación entre significados personales e institucionales.

La identificación de conflictos semióticos tuvo un papel central en la planificación de la experiencia didáctica, trabajando con los alumnos en forma presencial, para superar dichos conflictos.

La mejora en los resultados obtenidos es notoria. Se observa no solamente en el puntaje asignado a cada problema, sino también en el establecimiento de cada una de las funciones semióticas de la comisión intervenida con respecto a la no participación de la experiencia.

Los problemas que sirvieron como instrumento de recolección de datos, si bien corresponden al mismo campo de problemas, están enunciados desde registros diferentes. Los problemas P1 y P3 corresponden al registro coloquial, mientras que P2 está enunciado en el registro gráfico. En estos tres problemas apelan a diferentes conceptos previos, y conversiones entre lenguajes, sin embargo las funciones semióticas intervinientes, en lo que refiere a la resolución del problema de optimización, son comunes. Estas seis funciones brindan una herramienta teórica y metodológica aplicable, en contexto similar, a problemas de optimización con estas particularidades.

En relación a las funciones semióticas definidas podemos concluir que: F_1 y F_2 actúan en forma independiente una de la otra, la función F_3 está asociada a un procedimiento clave para la resolución satisfactoria de los problemas planteados. Las restantes funciones semióticas se van estableciendo en forma secuencial.

El error cometido por los alumnos, al considerar el punto crítico como extremo, trae aparejado el bajo porcentaje que posee la función asociada F_6 . Si bien en el problema P3 se obtuvieron mejores resultados en la comisión participante de la intervención que en la otra comisión, las producciones analizadas muestran la dificultad de los estudiantes en argumentar sus procedimientos. Hecho que se ve reflejado en los porcentajes de establecimiento de la función semiótica correspondiente, menos del 10% para C1 y menos de 30% para C5.

La información obtenida en este trabajo de investigación sirvió para el diseño de la experiencia didáctica, siendo un insumo fundamental para el rediseño e implementación de futuras estrategias didácticas. El análisis de la idoneidad del proceso de instrucción referido a problemas de optimización enriquecerá al estudio presentado en futuras investigaciones.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BACCELLI, S., ANCHORENA, S., MOLER, E. Y AZNAR, M. (2013). "Análisis de las dificultades de los alumnos de ingeniería en la aplicación de procedimientos para la resolución de problemas de optimización". *Revista Números*. [en línea]. Vol. 84, pág. 99-113. [Fecha de consulta: 04/09/14].
- BACCELLI, S.; ANCHORENA, S.; FIGUEROA, S.; PRIETO G. (2013). "Análisis de significado para mejorar los aprendizajes en problemas de optimización". *VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM)*. Montevideo, Uruguay. Recuperado el 4 de setiembre de 2014 de <http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/paginas/cb9.html>
- DISTÉFANO, M., AZNAR, M., POCHULU, M. (2012). "Errores asociados a la representación geométrica-vectorial de los números complejos: un análisis ontosemiótico". *Unión*, Vol.30, pág. 61-68.

- GODINO, J. D., BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14 (3), pág. 325-355.
- GODINO, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas: Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Universidad de Granada. Recuperado el 1 de octubre de 2011 de <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/monografiatfs.pdf>
- GODINO, J. D., BATANERO, C., FONT, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Versión ampliada del artículo: GODINO, J. D., BATANERO, C. & FONT, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, Vol. 39 (1-2), pág. 127-135. Recuperado el 12 de agosto de 2011 de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- POCHULU, M. (2012). "Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática". En: POCHULU, M. y RODRÍGUEZ, M. (compiladores) *Educación Matemática: Aportes a la formación docente desde distintos enfoques teóricos*. Argentina. Villa María: Editorial Universitaria Villa María. 1a. ed., pág. 63-89.