CONGRESO IBEROAMERICANO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA, INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN
BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO
BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVEMBRO 2014

LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA MEDIANTE EL USO DE GEOGEBRA COMO PROPUESTA DIDÁCTICA

RUIZ, K; CORDÓBA, Y; RENDÓN, C.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA MEDIANTE EL USO DE GEOGEBRA COMO PROPUESTA DIDÁCTICA

Karen Yuliana Ruiz Restrepo, Universidad de Antioquia, kren_1726@hotmail.com
Yeiler Córdoba Asprilla, Universidad de Antioquia, y-coa@hotmail.com
Carlos Eduardo Rendón Arcila, Universidad de Antioquia, juancho8050@hotmail.com

Resumen.Este trabajo de Investigación surge de una necesidad que hemos detectado en nuestra experiencia con estudiantes del grado 11, mejorar su comprensión del concepto de Derivada, por tanto pretendemos formular una propuesta metodológica que involucre mecanismos de tipo visual-geométrico, ya que se presenta una gran dificultad al analizar graficas como lo menciona Claudia Salazar etc. (2009); al aplicar este mecanismo buscamos que se mejore la integración de los conceptos (tasa de variación media y derivada) a través de la interacción con un software como el Geogebra, que contribuya al mejoramiento de la comprensión, así lo señala Iranzo (2009). El Geogebra nos permite la representación de imágenes dinámicas que faciliten la visualización de los conceptos, el proceso de razonamiento con el infinito y la deducción por parte de los alumnos, este programa facilita la representación de funciones que resultan costosas de visualizar a través del lápiz y papel o tablero.
Nuestra intención es hacer uso de los ordenadores para ofrecer a los estudiantes un enfoque menos formal del concepto de derivada mediante características como propone Gloria Sánchez etc.(2008), que permitan al alumno desarrollar pensamientos propios a través de la observación y que no se limiten a la memorización de los contenidos que el profesor expone. El alumno comprenderá el concepto de derivada a través de la relación existente entre la derivada y la tasa de variación media ya que una vez conocida dicha interpretación se introducirá la interpretación geométrica de la derivada como pendiente de la recta tangente a la curva; logrando con este estudio asumir una postura racional y critica frente a la existencia de recursos tecnológicos diseñados con fines de enseñanza como propone Ricardo Cantoral Uriza (2000).

1. INTRODUCCIÓN. El objetivo de esta investigación ha sido ha sido identificar y describir la relación e integración entre el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento didáctico del contenido con relación al concepto de derivada. En efecto, nos interesa describir la naturaleza y estructura de las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, en el nivel de bachillerato (grado once) del sistema educativo colombiano.

En nuestro propósito hemos adaptado las categorías teóricas y analíticas que proporcionan el marco enseñanza para la comprensión (EpC), llegando a la construcción de la descomposición del concepto de derivada y a la definición de los niveles de comprensión del esquema de la derivada en las dos dimensiones definidas: gráfica (visualización de imágenes dinámicas) y analítica (comprensión de los conceptos), las cuales se revisan a partir de los aportes de los resultados obtenidos tanto en la encuesta como en la observación participante. Por lo tanto el

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

estudio se centra en cómo alcanzar una correcta comprensión del concepto derivada haciendo uso del GeoGebra.

El problema que motiva esta investigación radica en que los cursos tradicionales en el grado once, cantidades significativas de estudiantes no logran comprender los conceptos básicos en particular, la tasa de variación media y la derivada.

El proyecto tiene como objetivo hacer una propuesta de trabajo basada en la utilización de GeoGebra, dado que esta herramienta potencia la percepción visual y geométrica de los conceptos, facilitando con ellos su comprensión. El interés por la utilización de mecanismos tipo visual-geométrico es porque para una correcta comprensión de los contenidos es importante la percepción visual de los contenidos, especialmente en estudiantes “visuales” (Krutrtskii 1976). Por ellos mostramos en este trabajo una clasificación de las imágenes, procesos y habilidades visuales, para analizar la repercusión de la visualización en la enseñanza.

Por ultimo como nos indica Iranzo (2009), es muy conocido que las tecnologías computacionales tienen un fuerte impacto profesional en la práctica de las matemáticas. Destacaremos el uso de GeoGebra, como software libre, de fácil manejo.

2. JUSTIFICACIÓN. Desde la historia las matemáticas, han estado ligadas al desarrollo del cálculo por esta razón se puede afirmar la posibilidad de modelar todo lo que nos rodea. Una de las metas que se debe proponer en la educación matemática es el desarrollo de competencias necesarias para comprender el mundo, por consiguiente el reto de esta investigación es la apropiación del concepto de derivada y su aplicación desde la TIC GeoGebra como propuesta didáctica. La enseñanza de este concepto no se reduce solo a partir de la definición de límite sino que se pueden tomar otras nociones a partir de la solución de problemas mediante ideas básicas del infinito, aproximaciones y variaciones.

Desde el aspecto educativo se puede afirmar que la enseñanza del cálculo es donde se presentan los problemas más fuertes en la educación, ya que presenta varias dificultades referidas a:

La concepción inscrita en la tradición axiomática-deductiva del cálculo. Convertir los conceptos básicos límite y derivada en un conocimiento algorítmico desde lo algebraico.

Por lo anterior , se plantea como propósito describir los fundamentos del desarrollo de la derivada sin la noción de limite y plantear una propuesta didáctica mediante el software libre GeoGebra y actividades que produzcan aprendizajes significativos del concepto de derivada venciendo obstáculos epistemológicos que se presentan en el aula para apropiarse así de un nuevo conocimiento.

En el campo de la investigación de la didáctica de las matemáticas se admite, desde hace décadas, el interés de utilizar software matemáticos, por las ventajas pedagógicas que se observan desde el punto de vista educativo: la gran capacidad de almacenamiento, la propiedad de simular fenómenos naturales difíciles de observar en la realidad, la interactividad con el usuario o la posibilidad de llevar a cabo un proceso de aprendizaje y evaluación individualizada, entre muchas aplicaciones educativas que estos software proporcionan (López, etc. 2005).

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

3. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA. Tradicionalmente la enseñanza de las matemáticas se reduce a un discurso, en el cual las únicas herramientas que se utilizan son los libros, la tiza y el tablero. Actualmente se viene utilizando herramientas informáticas en el aula, como medio didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje, pero estas no transciende más allá de una proyección de un contenido, que en su medida reemplaza la tiza y el tablero pero la metodología sigue siendo la misma, sin despertar una motivación más en el estudiante, porque, el docente es quien sigue llevando el protagonismo en el aula y el estudiante continua siendo una persona pasiva en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Muchas veces el docente solo se conforma con que el estudiante responda mediante una actividad evaluativa los conceptos que él le ha trasmitido, que en su mayoría son bastante descontextualizado, lo que produce que el estudiante no pueda aplicarlo en su diario vivir y que no haya una reflexión por parte de este. Un ejemplo de esto es la enseñanza de la derivada, la cual es un concepto bastante complejo para los estudiantes, de difícil comprensión, donde en su enseñanza solo se memorizan las reglas de derivación para resolver unos ejercicios planteados.

Con el gran avance que ha tenido la tecnología y la aplicación en el campo educativo, el interés de este proyecto es: "**El estudio de la comprensión del concepto de derivada mediante el uso de GeoGebra TIC como herramienta didáctica".**

4. PREGUNTA. ¿Cómo utilizar GeoGebra para mejorar la comprensión del concepto de derivada en el análisis de los puntos donde una función es derivable o no, a estudiantes del grado once?

5. OBJETO MATEMÁTICO. La derivada

6. RASTREO HISTÓRICO.

El cálculo, como algoritmo desarrollado en el campo de la matemática, incluye el estudio de los límites, derivadas, integrales y series infinitas, y constituye una gran parte de la educación de las universidades modernas. Más concretamente, el cálculo infinitesimal es el estudio del cambio, en la misma manera que la geometría es el estudio del espacio.

El cálculo infinitesimal tiene amplias aplicaciones en la ciencia y la ingeniería y se usa para resolver problemas para los cuales el álgebra por sí sola es insuficiente. Este cálculo se construye en base al álgebra, la trigonometría y la geometría analítica e incluye dos campos principales, cálculo diferencial y cálculo integral, que están relacionados por el teorema fundamental del cálculo. En matemática más avanzada, el cálculo es usualmente llamado análisis y está definido como el estudio de las funciones.

Más generalmente, el cálculo puede referirse a cualquier método o sistema de cuantificación guiado por la manipulación simbólica de las expresiones.

Muy bien, ahora que sabemos un poco mejor que es el cálculo infinitesimal, comencemos a ver la historia de la derivada.

Los problemas típicos que dieron origen al cálculo infinitesimal, comenzaron a plantearse en la época clásica de la antigua Grecia siglo III a.c, pero no se encontraron métodos sistemáticos de resolución hasta veinte siglos después.

En cuanto a la derivada, hay 2 conceptos principales que le dieron origen:

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

a) El problema de la tangente a una curva de Apolonio de Perge.

Apolonio de Perge, Apolonio de Perga o Apolonio de Pérgamo (Griego antiguo: Ἀπολλώνιος) (Perge, c. 262 - Alejandría, c. 190 a. C.) fue un geómetra griego famoso por su obra Sobre las secciones cónicas. Fue Apolonio quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola, a las figuras que conocemos.

También se le atribuye la hipótesis de las órbitas excéntricas o teoría de los epiciclos para intentar explicar el movimiento aparente de los planetas y de la velocidad variable de la Luna.

Sus extensos trabajos sobre geometría tratan de las secciones cónicas y de las curvas planas y la cuadratura de sus áreas. Recopiló su obra en ocho libros y fue conocido con el sobrenombre de El Gran Geómetra.

En geometría plana euclidiana, el problema de Apolonio consiste en encontrar las circunferencias tangentes a tres circunferencias dadas. Apolonio de Perge (circa 262 a. C. - circa 190 a. C.) propuso y resolvió este problema en la obra Ἐπαφαί, (Epaphaí, «Tangencias»). Aunque esta obra se ha perdido, se conserva una referencia a ella en un manuscrito redactado en el siglo IV por Pappus de Alejandría. Las circunferencias dadas son de radio arbitrario, es decir, incluyen los casos extremos de radio nulo (un punto) y de radio infinito (una recta), lo que proporciona hasta diez tipos de problemas de Apolonio. Excluyendo a las familias de posiciones particulares que presentan infinitas soluciones, o ninguna, y a las familias de posiciones que, por simetría, tienen algunas soluciones equivalentes o prohibidas, la resolución general del problema resulta en ocho circunferencias que son tangentes a las tres circunferencias dadas.

El enunciado original del problema de Apolonio pide la construcción de una o más circunferencias que sean tangentes a tres objetos dados. Los objetos pueden ser rectas, puntos o circunferencias de cualquier tamaño. Estos objetos pueden ser colocados en cualquier disposición y se pueden cortar unos a otros; sin embargo, se suelen tomar diferentes, es decir, que no coincidan. Las soluciones del problema a veces se llaman «circunferencias de Apolonio», aunque este término también se usa para otros tipos de circunferencias asociadas con Apolonio.

b) El problema de los extremos máximos y mínimos de Pierre de Fermat

El teorema de Fermat para el análisis matemático afirma que:

Si una función f alcanza un máximo o mínimo local en c, y si la derivada f '(c) existe en el punto c, entonces f '(c) = 0.

Pierre de Fermat (Beaumont-de-Lomagne, Francia, 20 de agosto de 1601; Castres, Francia, 12 de enero de 1665) fue un jurista y matemático francés apodado por Eric Temple Bell con el sobrenombre de «príncipe de los aficionados».

Fermat fue junto con René Descartes uno de los principales matemáticos de la primera mitad del siglo XVII.

Descubrió el cálculo diferencial antes que Newton y Leibniz, fue co-fundador de la teoría de probabilidades junto a Blaise Pascal e independientemente de Descartes, descubrió el principio fundamental de la geometría analítica. Sin embargo, es más conocido por sus aportaciones a la teoría de números en especial por el conocido como último teorema de Fermat, que preocupó a los matemáticos durante

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

aproximadamente 350 años, hasta que fue demostrado en 1993 por Andrew Wiles ayudado por Richard Taylor.

Fermat es uno de los pocos matemáticos que cuentan con un asteroide con su nombre, (12007) Fermat. También se le ha dado la denominación de Fermat a un cráter lunar de 39 km de diámetro.

En el siglo XVII Los matemáticos perdieron el miedo que los griegos le habían tenido a los infinitos: Johannes Kepler y Bonaventura Cavalieri fueron los primeros en usarlos, empezaron a andar un camino que llevaría en medio siglo al descubrimiento del cálculo infinitesimal.

A mediados del siglo XVII, las cantidades infinitesimales fueron cada vez más usadas para resolver problemas de cálculos de tangentes, áreas, volúmenes; los primeros darían origen al cálculo diferencial, los otros al integral.

Apostol, Tom M. (1967). *Calculus, Vol. 1: One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra*. 1 (2ª edición). Wiley. I
Spivak, Michael (1994). *Calculus* (3ª edición). Publish or Perish.
Stewart, James (2002). *Calculus* (5ª edición). Brooks Cole.

7. OBJETIVO GENERAL. Profundizar en que puntos una función es derivable y en qué punto no admite derivada para que mediante el GeoGebra, la interpretación física y gráfica permita la enseñanza del concepto, mejorando la comprensión de los estudiantes.

8. MARCO TEÓRICO. El marco teórico que se desarrolla a continuación, permite conocer los conceptos básicos necesarios para el entendimiento del desarrollo de este proyecto, mediante una breve descripción del concepto de comprensión sobre el cual se basa el marco enseñanza para la comprensión (EpC).

Describe cómo surge, su organización y sus ventajas con respecto al método de la enseñanza tradicional.

El marco conceptual enseñanza para la comprensión ordena la investigación para ayudar a los educadores a analizar, diseñar, poner en práctica y evaluar practicas centradas en la comprensión de los alumnos. No dispone respuestas a las preguntas sino que cuenta con módulos coherentes y específicos para ayudar a los docentes a desarrollar sus propias respuestas.

El marco de la enseñanza para la comprensión. La EpC adjudica que lo que aprenden los estudiantes, debe ser interiorizado y realizable de ser utilizado en ámbitos tanto dentro como fuera de las aulas.

La comprensión se ha considerado como un método educativo primordial en las instituciones educativas como base para un aprendizaje constante y lleno de posibilidades convirtiéndose a veces en la norma.

Definición de comprensión. La capacidad de comprensión de los estudiantes se evidencia en la actitud de los estudiantes al realizar un uso significativo de conceptos teorías, narraciones y procedimientos disponibles en las matemáticas. Por lo tanto comprender no es solo conocer sino también la habilidad de utilizarlo en la vida cotidiana. Se comprende cuando se es capaz de recibir una retroalimentación constructivista, ya que si no hay experiencia no puede haber una comprensión.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

Contexto histórico. Según Murnane (1996) el interés por la enseñanza para la comprensión se dio en Estados Unidos a partir de los años 90, dada la necesidad de orientar habilidades en la escuela que permita a los alumnos ser pensadores críticos, gente que planea y resuelve problemas siendo capaz de ir más allá.

De acuerdo con Stone (1999) la enseñanza para la comprensión es igual de antigua a la historia humana pues diversas religiones tenían maestros que expresaban sus enseñanzas por medio de parábolas y metáforas para lograr una conexión con el mundo. También Platón enseñaba por medio de alegorías y Confucio destacaba las imágenes con palabras.

La historia de la educación también se relaciona con docentes mediante artes y oficios basados en la comprensión. Los educandos se acercan a los docentes por estadios para perfeccionar su arte u oficio ya que el aprendizaje importante surge del hecho de hacer algo y comprender concretamente los procesos y el medio.

La comprensión ha sido valorada desde que existen las escuelas. Sin embargo la forma de llegar a ella no siempre ha sido clara pues las necesidades educativas no eran las mismas para todos por ejemplo las de las mujeres eran mínimas estableciendo suficiente la lectura, escritura y habilidades domésticas. Quedando la comprensión entendida como compromiso profundo de las búsquedas intelectuales.

A finales del siglo XIX y comienzos del XX Dewey enfatizo en una nueva pedagogía progresista que integra el contenido escolar en la vida cotidiana. En la visión de Dewey la organización de las materias es importante. Proponía enseñar alrededor de temas con amplias posibilidades, niveles de complejidad, concepción muy relacionada con la definición de tópicos generativos.

La década de 1960 género una nueva reforma educativa Jerome Bruner (1969) proponía un acercamiento a un aprendizaje reflexivo de las materias que estableciera conexiones solidas con la vida de los estudiantes y la necesidad de comprender el contenido. Sin embargo Stone (1999) las reformas fueron debatidas en los 70 y 80 volviendo nuevamente a lo básico ya que las reformas curriculares habrían exigido que las escuelas alteraran muchas de sus prácticas y estructuras establecidas. Además los valores del progresismo aun luchan por ser aceptadas.

Pero a pesar de todo desde 1967, un grupo de investigadores de la Escuela de Posgraduados de la Universidad de Harvard crearon lo que se conoce como el Proyecto Cero de Harvard inicialmente aplicado a la enseñanza de las artes. Ellos estudiaron el desarrollo de la capacidad de utilización de símbolos, observando de manera empírica y desde una perspectiva psicobiologica, la evolución de dicha capacidad en los niños normales, pero también en personas con alguna discapacidad a causa de alguna lesión llamados niños tontos sabios y en niños autistas. Derivando proyectos con la formulación de las inteligencias múltiples, dentro de las nuevas estructuras de la mente y la consolidación teórica de un marco de enseñanza para la comprensión.

Según Stone (1999) desde 1988 a 1995 el grupo de investigadores de la escuela de graduados de educación de Harvard colaboro con docentes de las escuelas cercanas en una investigación que abordo cuestiones como: ¿Que vale la pena comprender?, ¿Qué deben comprender los alumnos?, ¿Cómo puede fomentarse la comprensión? Y ¿Cómo se puede averiguar lo que comprenden los alumnos?

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

Según Stone (1999), durante el primer año de investigación los directores del proyecto reunieron docentes de lenguaje, matemáticas, historia y sociales de una escuela media (11 a 13 años) y varias escuelas secundarias (14 a 18 años) de Massachusetts. Se encontraron con un grupo de investigadores interesados en el aprendizaje, la pedagogía, el desarrollo de los docentes y el mejoramiento de la escuela. Durante el tercer año del proyecto, la investigación en el aula con el marco conceptual preliminar demostró que llegar a comprender cómo enseñar para la comprensión es un proceso complejo. Basándose en estos hallazgos, diseñaron un proyecto de investigación intensivo de acción colaborativa con 4 docentes que trabajaban en 4 escuelas en diferentes materias. Este estudio, realizado entre 1993 y 1994, analizó el proceso de aprendizaje tendiente a enseñar para la comprensión, la naturaleza de la práctica en el aula configurada por este marco conceptual y el trabajo de los alumnos en estas clases.

10. METODOLOGÍA. En este proyecto se hace referencia al paradigma cualitativo el cual orienta el proceso de investigación. Este modelo es pertinente al tema de estudio, pues pretende facilitar la visualización de imágenes dinámicas y la comprensión de los conceptos (tasa de variación media Y derivada) que conllevan al conocimiento de los puntos en donde una función es derivable.

El paradigma cualitativo "Se fundamenta en una perspectiva interpretativa centrada en el entendimiento del significado de las acciones de seres vivos, sobre todo de los humanos y sus instituciones (busca interpretar lo que va captando activamente)". Postula que la realidad se define a través de las interpretaciones de los participantes en la investigación respecto de sus propias realidades. De este modo convergen varias "realidades", por lo menos la de los participantes, la del investigador y la que se produce mediante la interacción de todos los actores. Además son realidades que van modificándose conforme transcurre el estudio y son las fuentes de datos (Hernández, Fernández y Baptista 2006).

Para nuestro proceso de investigación utilizaremos un estudio de casos, el cual se realiza de una forma directa a personas o grupos durante un cierto periodo, en nuestro caso será un grupo de tres a cuatro estudiantes del grado once de una institución de carácter oficial del municipio de Medellín, donde se tendrá en cuenta una observación participante de carácter cualitativo donde se conocerá la vida cotidiana de un grupo desde el interior del mismo, y una entrevista de carácter cuantitativo.

Como fuentes de recolección de información utilizaremos: Entrevista semiestructurada, Observaciones, módulo de trabajo.

La entrevista semiestructurada determina de antemano cual es la información relevante que se quiere conseguir. Se hacen preguntas abiertas dando oportunidad a recibir más matices de la respuesta, permite ir entrelazando temas, pero requiere de una gran atención por parte del investigador para poder encauzar y estirar los temas. (Actitud de escucha). El objetivo de esta entrevista es identificar los conocimientos y las falencias que los estudiantes tienen acerca del objeto de estudio, para determinar la viabilidad de aplicación de nuestro proyecto.

La entrevista se va a distribuir en tres bloques, donde cada bloque tendrá aproximadamente 10 preguntas; en el primer bloque nuestro objetivo es conocer en el entrevistado el dominio que tiene sobre el manejo de programas matemáticos y los saberes previos acerca del concepto de derivada con preguntas "suaves" que disminuyan la presión que genera una entrevista. En él según y tercer bloque son preguntas un poco más complejas dejando a un lado lo introductorio, donde el

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

entrevistado pueda dar evidencias sobre los conocimientos que tiene acerca del objeto de estudio.

De acuerdo a nuestro marco la Observación se realizara de una forma participativa, es decir, donde el investigador comparte más con los investigados, su contexto y experiencia para conocer directamente toda la información que poseen los sujetos de estudio sobre su propia realidad, es decir, desde el interior del mismo. Observaremos comportamientos, destrezas que los estudiantes tengan con las actividades propuestas (manejo de applet, visualización grafica) y la aplicabilidad que los estudiantes le den.

El modulo consiste en un conjunto de applet interactivos específicos para cada uno de los conceptos que son objeto de estudio, a partir de este se realizaran las observaciones descritas anteriormente.

NIVELES Y DESCRIPTORES

El marco de la enseñanza para la comprensión, trabaja las dimensiones de contenido, métodos, propósitos, y formas de comunicación. Las dimensiones de la comprensión ofrecen una forma de hacer la definición de comprensión más específica y permite identificar 4 aspectos, el marco describe 4 niveles de comprensión:

- **Comprensión ingenua:** está conformado por las experiencias en las situaciones reales, ideas y concepciones del individuo donde se realizan acciones físicas o mentales con el fin de crear una idea del nuevo tema o concepto.
- **Comprensión principiante:** el estudiante se ve en la necesidad de reemplazar las imágenes asociadas con una sola actividad por una imagen mental además el estudiante la examina y determina los distintos atributos asociados con dicha imagen, observa las propiedades internas de una imagen específica, además de las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales.
- **Comprensión aprendiz:** el estudiante conoce las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes, abandona los orígenes de la acción mental, para finalmente producir definiciones matemáticas completas además utiliza su pensamiento formal, es decir, produce verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado, además de que es capaz de combinar definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones para identificar los componentes esenciales, las ideas de conexión y los medios para cruzar entre dichas ideas.
- **Comprensión maestría:** el estudiante es capaz de explicar las interrelaciones de dichas observaciones mediante un sistema axiomático y es capaz de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crea preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo.

Es importante resaltar que en este trabajo nos centraremos en la dimensión de contenido ya que esta evalúa el nivel hasta el cual los alumnos han traspasado las perspectivas intuitivas o no escolarizadas y el grado hasta el cual puede moverse con flexibilidad entre ejemplos y generalizaciones.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

<u>Descriptores</u>

- ❖ Aplicar la tasa de variación media en funciones.
- ❖ Introducir el concepto tasa de variación media con problemas aplicados
- ❖ Crear ejemplos numéricos concretos de la tasa de variación media.
- ❖ Ser capaces de generalizar los ejemplos.
- ❖ Calcular la pendiente de la recta secante representada en un intervalo concreto y luego general.
- ❖ Relacionar entre la pendiente de la recta secante y la tasa de variación media.
- ❖ Introducir la interpretación geométrica de la derivada.
- ❖ Realizar semejanza entre lo que ocurre con la recta secante, al reducir la amplitud de un intervalo dado.
- ❖ deducir que ocurre con la pendiente de la recta secante, conforme se reduce la amplitud de un intervalo dado.
- ❖ establecer una relación entre la interpretación geométrica de la tasa de variación y la recta secante.
- ❖ Hacer uso de la fórmula de la tasa de variación media y la relación establecida con la recta secante para deducir la fórmula de la derivada.

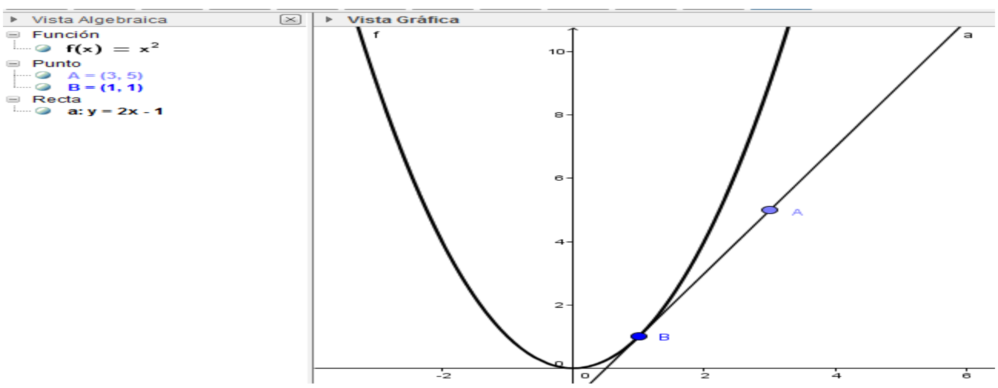
LA ENTREVISTA

Preguntas:

1. Cuál es el valor de la pendiente de la recta que cumple las siguientes condiciones :

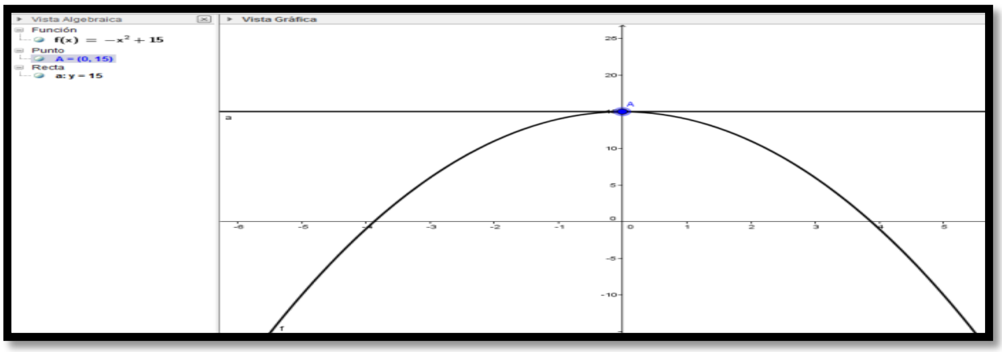
a. pasa por los puntos
   - $P_1(3,2)$ y $P_2(7,0)$
   - $P_5(3,5)$ y $P_6(3,5)$

b. Pasa por los puntos A y B(usa la gráfica para identificarlos) :

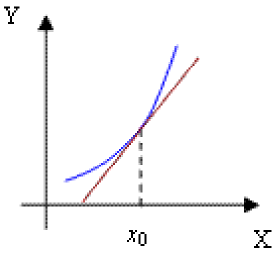
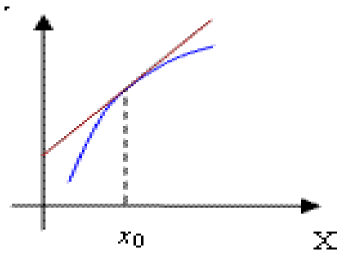
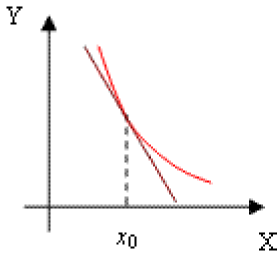
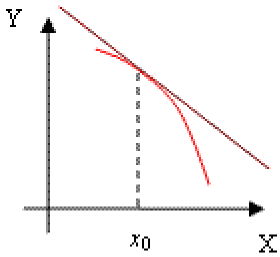
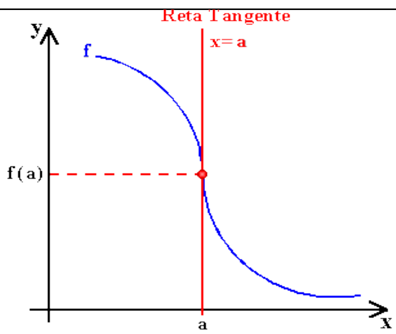
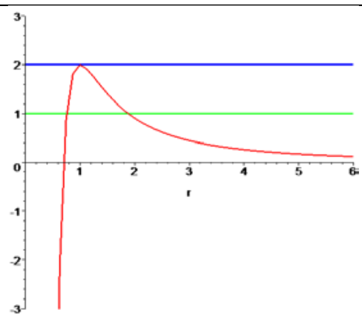


¿Conoces otra forma para encontrar la pendiente de una curva sin usar los puntos?

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190



2. De las siguientes imágenes identifica cuando la pendiente es negativa, positiva, cero y cuando no existe.

PENDIENTE DE UNA CURVA		
 **(a)**	 **(b)**	 **(c)**
 **(d)**	 (e)	 (f)

3. De acuerdo con los puntos anteriores ¿Que entiendes por pendiente de una recta?

4. Con las rectas de la pregunta dos, cuándo identificas que ellas son:

a. Negativa
b. Positiva
c. Cero
d. No existe.

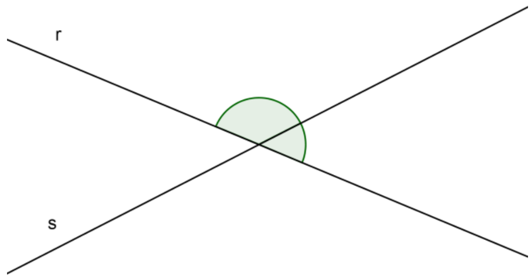
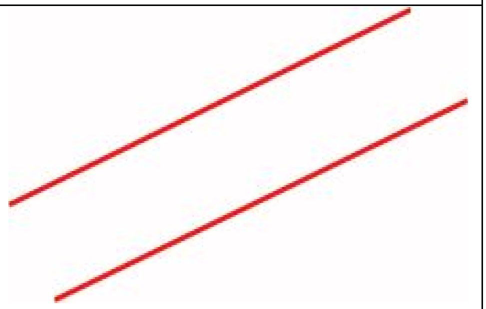
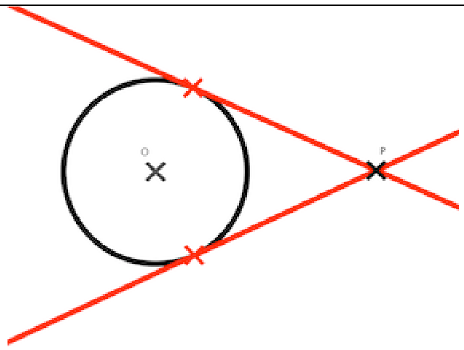
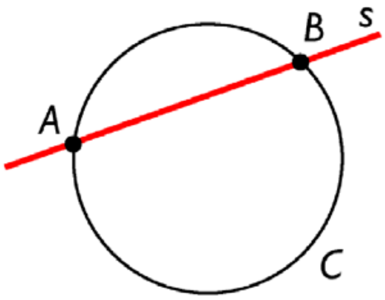
5. ¿Qué entiendes por recta tangente y recta secante?

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

> ***Aporte de información:*** *Consideremos que una recta tangente es aquella que toca a una curva en un solo punto y la recta secante es la recta que toca a la curva en dos puntos.*

.

6. De éstas imágenes identifica cuales son rectas tangentes y cuáles son rectas secantes.

RECTAS SECANTES Y TANGENTES	
 **Imagen #1**	 **Imagen #2**
 **Imagen#3**	 **Imagen # 4**

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

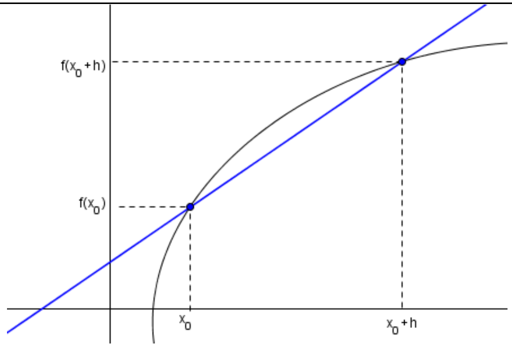


Imagen # 5

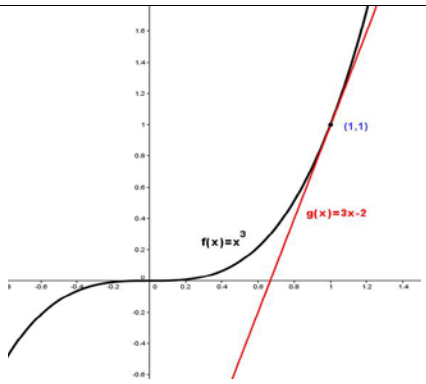
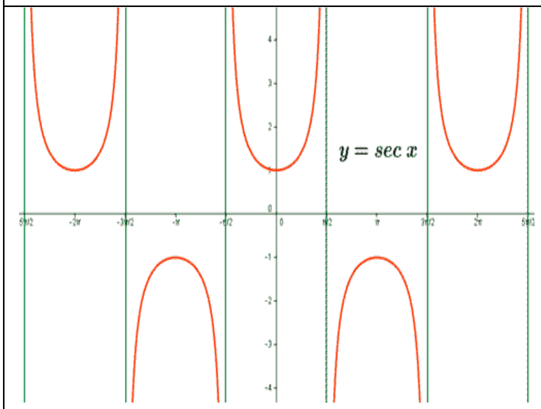
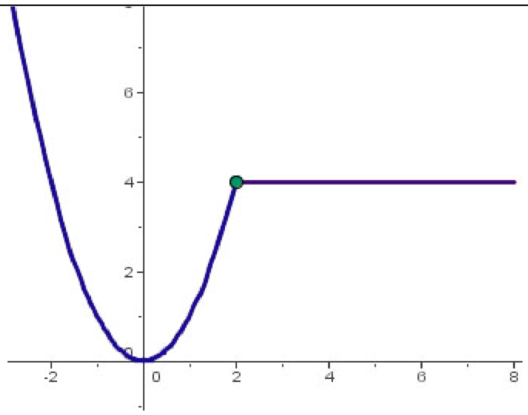


Imagen # 6

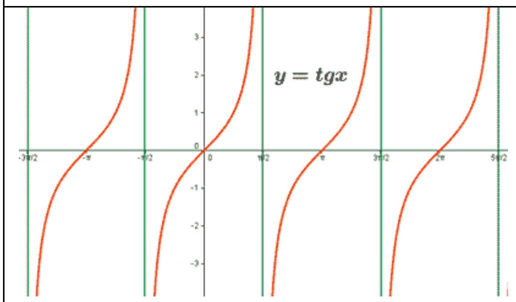
7. Identifica cuales de las siguientes curvas son continuas. Justifica tu repuesta



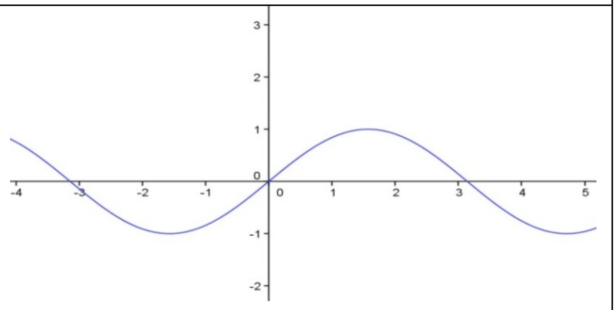
Curva #1



Curva #2

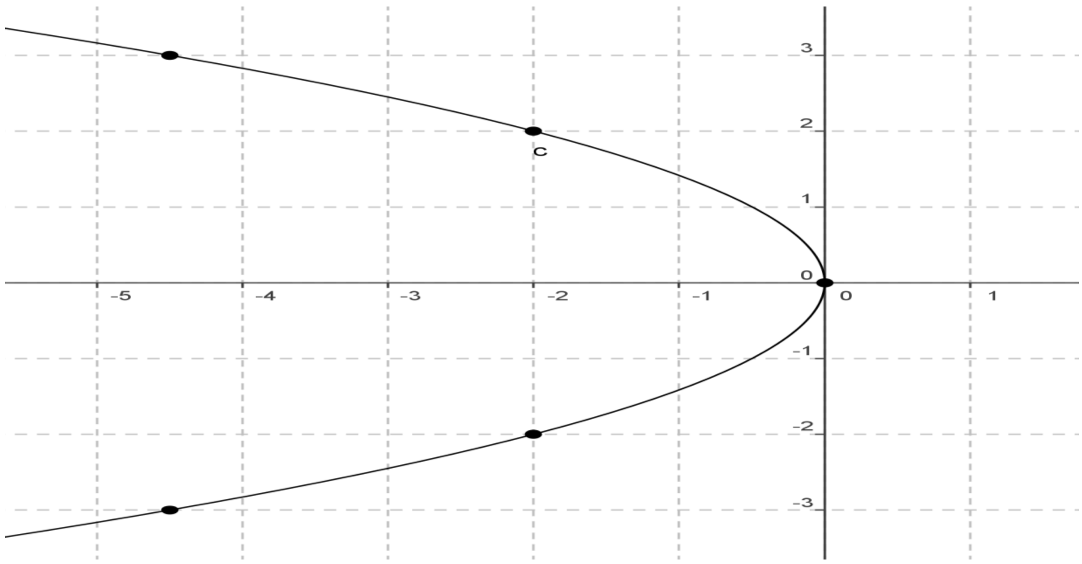


Curva #3



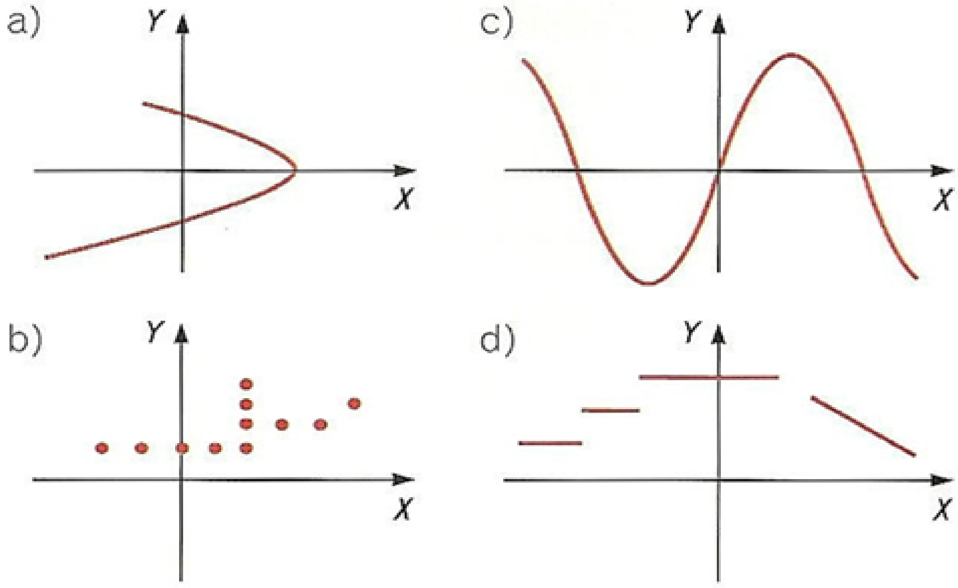
Curva #4

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

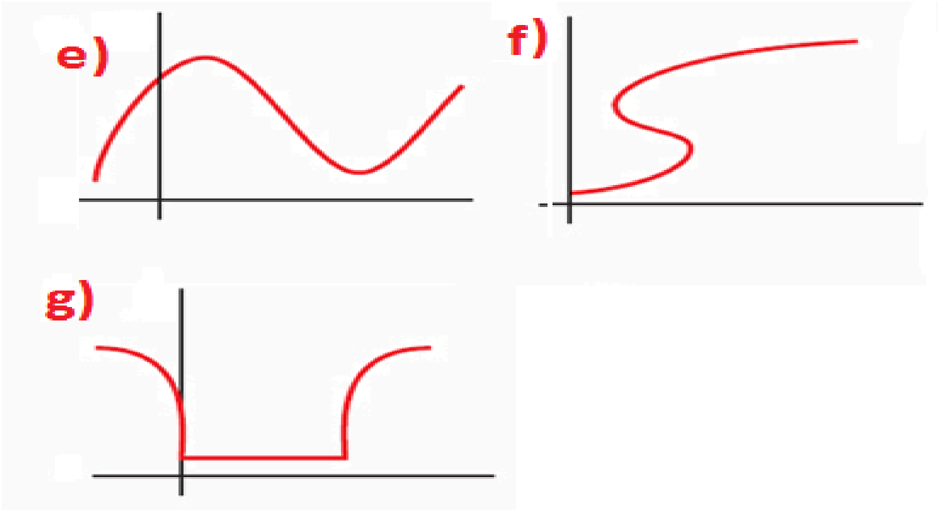


Curva #5

8. Observa las siguientes curvas:
¿Cuáles son funciones y cuales son relaciones? ¿Cuál es la razón de tu elección?



ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190



9. De las curvas que son funciones en la pregunta 8 ¿Cuáles corresponden a funciones continuas? Justifica tu elección

> ***Aporte de información**: Una función es una Relación a la cual se añade la condición de que a cada valor del Dominio le corresponde uno y sólo un valor del Recorrido.*
> *Intuitivamente, una función es continua en un punto, cuando no presenta huecos, picos, ni saltos en dicho punto, es decir, se puede hacer de un solo trazo sin levantar el lápiz.*

10. ¿Qué es para ti una función?
11. ¿Cuándo una función es continua?
12. Observa la siguiente tabla de valores correspondiente a la función $f(x)= x^2-3x$:

	X tiende a -1 por la izquierda					X tiende a -1 por la derecha			
x	-1,01	-1,001	-1,0001	...	-1	...	-0.9999	-0,999	-0,99
F(x)	4,0501	4,005001	4,00050001	...	?	...	3,99950001	3,995001	3,9501

13. ¿Cómo se comportan los valores de la función en las cercanías de x = -1?
14. ¿Qué sucede con la función f(x) cuando x se acerca a –1?

Situación problema: Un auto escolar se mueve describiendo esta trayectoria $\mathbf{y = x^3 + 2x}$, al cabo de 1 hora presenta una velocidad de 3km/h. A partir de allí comienza acelerar alcanzando una velocidad de 33 km/h al cabo de 2 horas.

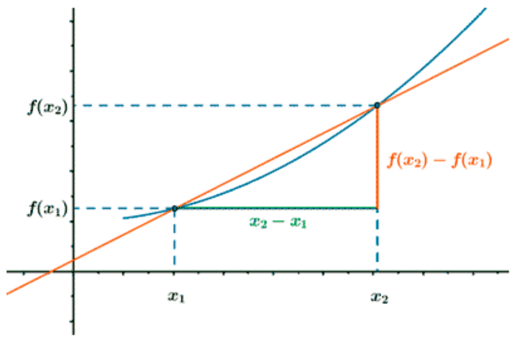
15 ¿Presenta el auto una velocidad constante? Explica.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

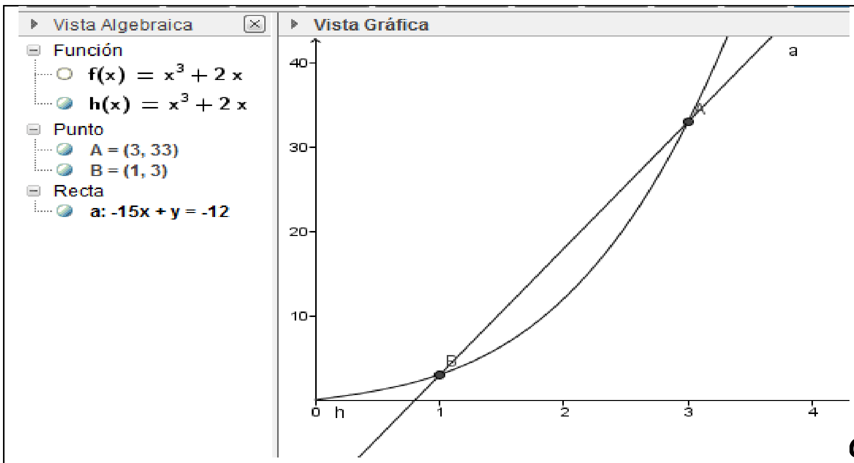
16 Si presenta algún cambio ¿Cuál es?

Aporte de información: Definimos la **TASA DE VARIACIÓN MEDIA** de una función f(x) en un intervalo [x_1, x_2] como:

$$TV = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$



La siguiente gráfica describe la trayectoria del móvil:



Grafica #1

15. Encuentra la tasa de variación media del auto escolar.
16. Encuentra la pendiente de la recta secante trazada a la curva (***Gráfica#1).***
17. ¿Qué relación encuentras entre la pendiente de la recta secante y la tasa de variación media?

Observa y manipula el siguiente applet (tasa de variación media).

18. De acuerdo a lo observado en el applet, ¿qué relación encuentras entre la tasa de variación media y la pendiente de la recta secante?
19. Teniendo en cuenta la relación que en contrastes en el punto anterior, ¿Qué es la tasa de variación media?

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

Manipula y observa el siguiente applet (Derivada)

20. ¿Qué observas al mover el deslizador?
21. Cuando mueves el deslizador acercándote a cero ¿Qué ocurre con la recta secante?
22. ¿Qué ocurre con los ángulos α y β al mover el deslizador?
23. ¿Encuentras alguna relación entre el acercamiento a cero y el comportamiento de la recta y los ángulos?

Aporte de Información: Tasa de variación Instantánea

24. De acuerdo con el aporte de Información anterior, ¿encuentras alguna relación entre la tasa de variación instantánea y la tasa de variación media?
25. Hacer que el deslizador se acerque a cero tanto como sea posible, qué efecto causa sobre la recta secante?
26. Los cambios en los ángulos α y β, están relacionados con los cambios ocurridos con la recta secante?
27. Los cambios en los ángulos α y β, están relacionados con los cambios ocurridos con la tasa de variación media?
28. ¿Podrías establecer qué condiciones debe cumplir una curva para que sea posible transformar en ella la recta secante en tangente, si conocemos el punto de corte de la recta con la curva?
29. ¿Podrías establecer qué condiciones debe cumplir una curva para que sea posible pasar en ella de la tasa de variación media a la tasa de variación instantánea?
30. ¿Cómo interpretarías en general la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea en una función?

MÓDULO

- **DURACIÓN**: una sesión de 60 min.
- **MOMNETO PREVIO**: los alumnos conocerán que la tasa de variación media de una función dado un intervalo se calcula mediante:

$$t.v.m\, f(x)_{[x_1,x_2]} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- **OBJETIVOS MATEMÁTICOS:**
  - ✓ Conocer la interpretación geométrica de la tasa de variación media.
  - ✓ Relacionar la aplicación de la tasa de variación media con su interpretación geométrica y deducir su definición.
  - ✓ No priorizar la memorización de la fórmula de la derivada, sino su deducción a través de la fórmula de la tasa de variación media.
  - ✓ Observar como la recta secante se aproxima a la recta tangente conforme se reduce la amplitud del intervalo.
  - ✓ Comprobar que esta misma relación se cumple para las pendientes de ambas rectas. La pendiente de la recta secante se aproxima a la pendiente de la recta tangente cuando la amplitud del intervalo disminuye.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

- **NIVELES DEL MARCO ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN:** durante el desarrollo del módulo se van proponiendo una serie de ejercicios con el fin de promover la comprensión.

Concepto de tasa de variación media

Comprensión principiante: Se comenzara con ejercicios donde los alumnos realizaran cálculos de la tasa de variación media a través de la observación de la gráfica, con el fin de crear el concepto de tasa de variación media (problema 1).

Comprensión aprendiz: Seguidamente los alumnos deben intuir la interpretación de la tasa de variación media al observar la pendiente de la recta secante, adoptando una imagen mental del concepto de tasa de variación media. (Problemas 2 y 3).

Comprensión maestría: Una vez comprendida la interpretación geométrica de la tasa de variación media, el alumno es capaz de establecer relaciones y observar propiedades de la tasa de variación media conforme varía la amplitud del intervalo (problemas 5-6).

Concepto de derivada:

Comprensión principiante: se comenzara introduciendo la interpretación geométrica de la derivada y su fórmula, para crear una idea del concepto (problema 7 literales 1-2).

Comprensión aprendiz: el alumno debe asociar la imagen creada de la tasa de variación media con la nueva imagen de la derivada, estableciendo una primera relación (problema 7, literales 3-5).

Comprensión maestría: la relación establecida entre la tasa de variación media y la derivada permite al alumno la observación de nuevas propiedades (problema 8).

- **DESARROLLO**

1. Se empieza con unas instrucciones para el uso de GeoGebra.
2. Comenzamos con un ejemplo numérico, en el cual en un intervalo concreto los alumnos calcularan la tasa de variación de la función representada (problema 1, literal 1).

   Seguidamente generalizaran esa tasa de variación en función del intervalo [a, a+h]. Es aquí donde el alumno tendrá el primer contacto con la fórmula matemática de la tasa de variación (problema 1, literal 2).

3. Dado que el alumno posee conocimientos para el cálculo de recta y sus pendientes, se les propone que calculen las medidas de los segmentos (problema 2).
4. Seguidamente se calculara la pendiente de la recta secante (problema 3), para que establezcan la relación entre la tasa de variación media y la recta secante (problema 4)
5. Después de conocer la interpretación de la tasa de variación media, introduciremos la interpretación geométrica de la derivada; pues conocida como pendiente de la recta tangente a la función, los estudiantes deberán relacionar la tasa de variación media con la recta secante, y esta a su vez con

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

la recta tangente, para finalmente deducir la fórmula de la derivada recordando su interpretación geométrica (problema 5-7).

6. Para afianzar todos estos nuevos conceptos adquiridos, los estudiantes tendrán que contestar una serie de preguntas con el fin de que aquellos que no habían logrado establecer relaciones tengan más oportunidades (problema 8).

PAPEL DEL GEOGEBRA

Al ofrecer imágenes dinámicas permite entender la idea de límite mediante la observación del movimiento de la recta secante cuando h toma valores cada vez más cercanos a cero.

Tradicionalmente se usa el concepto de límite para comprender la derivada, pero este suele crear confusiones en los alumnos pero el GeoGebra facilita la representación logrando una comprensión de la formula.

MÓDULO A REALIZAR DE LA TASA DE VARIACIÓN MEDIA Y DERIVADA

- La función que se encuentra representada en GeoGebra es $f(x)= (x+1)^2+1$
- El parámetro **a** posee un deslizador con valores de -5 a 5.
- El punto A= (a, f(a)).
- El parámetro **h** posee un deslizador con valores de -5 a 5.
- El punto B=(a+h, f(a+h)).
- Se observara que al mover el deslizador del parámetro **h** el valor de la distancia de los segmentos AC y BC varían.

Al observar los datos de la gráfica que se da, resolver los problemas:

PROBLEMA 1

1. Calcular la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [-2,2]
2. Calcular la tasa de variación media de la función f(x) en el intervalo [a, a+h] usando la ecuación conocida y dada previamente.

PROBLEMA 2

1. Calcular la distancia del segmento del punto A al punto C cuando a=-1, h=4 usando el método que conozcas.
2. Calcular la distancia del segmento del punto B al punto C cuando a=-1, h =4 usando el método que conozcas.
3. Calcular la distancia del segmento del punto A al punto C en función de **h** y **a** usando el mismo método usado en los literales anteriores.
4. Calcular la distancia del segmento del punto B al punto C en función de **h** y **a** usando el mismo método usado en los literales anteriores.

PROBLEMA 3

En la gráfica la recta secante es de color rojo que pasa por los puntos A y B por lo tanto:

1. Calcular la pendiente de la recta secante cuando a=-1, h=4.
2. Calcular la pendiente de la recta secante en función de **a** y **h** usando la ecuación para la pendiente.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

PROBLEMA 4

1. ¿Qué relación existe entre la tvm f $_{[x,\ x+h]}$ y la recta secante que pasa por los puntos A(x, f(x)) y un B(x+h, f(x+h))?

PROBLEMA 5

La pendiente de la recta tangente se encuentra representada en la gráfica por el color morado, por lo tanto:

1. Si aproximamos los valores de **h** a cero, ¿Qué le ocurre a la recta secante?

PROBLEMA 6

1. ¿Cómo varia la pendiente de la recta secante cuando aproximamos el punto B al punto A?
2. ¿Cuál será el límite de la pendiente de la recta secante cuando la **h** tiende a cero?
3. Conociendo la relación existente entre la tasa de variación media y la recta secante. Calcula:

$$\lim_{h\to 0} tvm\ f(x)_{[x,x+h]} =$$

PROBLEMA 7

1. Observar la interpretación geométrica de la derivada de una función.
2. Definir la derivada de una función mediante una formula.
3. Calcular:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{(-1+h)-(-1)} =$$

4. Calcular f' (-3)
5. Termina la definición de derivada de una función.

$$f'(x) = \lim_{h\to\cdots} \ldots$$

PROBLEMA 8

1. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas? Justifícalo.

- La derivada de una función en un punto, es la pendiente de la recta tangente en ese punto.
- La derivada de una función en un punto x es la pendiente de la recta secante entre [x,x+h]
- La pendiente de la recta secante entre dos puntos A=(x, f(x)) y B(x+h, f(x+h)) es:

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

- La pendiente de la recta secante y la recta tangente coinciden.
- Una recta secante se transforma en una recta tangente cuando uno de los puntos de corte se aproxima al otro.
- La derivada de una función es:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

BIBLIOGRAFIA

- ARIZA, A.; LLINARES, S. (2009) Sobre la aplicación y uso del concepto de derivada en el estudio de conceptos económico en estudiantes de bachillerato y universidad. *Enseñanza de las Ciencias.* 27(1), pp. 121-136. Universidad de Alicante.
-
- BALLARD, C.L., JOHNSON, M.F. (2004). Basic Math Skills and Performance in an Introductory Economics Class. The *Journal of Economic Education.* 35(1), pp.3-23
-
- BISHOP, A.J. (1989) Review of reseach on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*. Vol 11.1, pp. 7-16
- CANTORAL, R., Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis LaGrange, al diseño de una situación didáctica. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 3 (003), 265-292.
-
- CONTRERAS, M. (2012) Apuntes de clase de Análisis del *Máster Universitario de Profesor de Educación Secundaria.* Universidad de Valencia.
- DA SILVA, T. (2010) El estudio de las funciones lineales, cuadráticas y exponenciales con la ayuda del GeoGebra. *Trabajo de Fin de Máster.* Capítulo I, pp. 5-8. Universidad de Valencia.
-
- DEL GRANDE, J. (1990) Spatial sense, *Arithmetic Teacher.* Vol. 37.6, pp. 14-20.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190

- DOLORES, C. (2000) Una propuesta didáctica para la enseñanza de la derivada. *El futuro del cálculo infinitesimal.* Capítulo V, pp. 155-181. (Actas de ICME-8 Sevilla) Grupo Editorial Iberoamérica. México D.F.
- FREUDENTHAL, H. (1983) El lenguaje algebraico. *Didactical*

- SÁNCHEZ, G., García, M., Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(2), 267-296.

-
- SÁNCHEZ, G., García, M., Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. enseñanza de las ciencias, 24(1), 85–98.

- *Phenomenology of Mathematical Structures.* Traducción de Luis Puig en *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas.* Capítulo 6. CINESTAV, 2001. México.

- GUTIÉRREZ, A. (1991) Procesos y habilidades en visualización espacial. *Memorias de 3er Congreso Internacional sobre Investigación en Educación Matemática.* Capítulo I, PP. 44-47. Universidad de Valencia.

- SALAZAR, C., Díaz, H., Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto derivada. Tecné, Episteme y Didaxis No. 26.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1190