CONGRESO IBEROAMERICANO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA, INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN
BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO
BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVEMBRO 2014

Las funciones racionales en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación: el estudio de las asíntotas utilizando GeoGebra como soporte

LLANOS, VC; OTERO, MR; GAZZOLA, MP

Las funciones racionales en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación: el estudio de las asíntotas utilizando GeoGebra como soporte.

Viviana Carolina Llanos; María Rita Otero; María Paz Gazzola
Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT).
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA).
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).
Argentina.

vcllanos@exa.unicen.edu.ar; rotero@exa.unicen.edu.ar; mpgazzola@exa.unicen.edu.ar

Las funciones racionales en el marco de un Recorrido de Estudio y de Investigación: el estudio de las asíntotas utilizando GeoGebra como soporte.

Resumen

En este trabajo se presentan algunos resultados de una enseñanza basada en Recorridos de Estudio e Investigación (REI). El REI propuesto corresponde a un estudio longitudinal que dura dos años con estudiantes entre 14 y 17 años. Los resultados que se desarrollan este trabajo corresponden a la última parte del REI que permite estudiar la Organización Matemática de las funciones racionales en la escuela secundaria argentina. Se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Yves Chevallard. Se describen algunos resultados obtenidos en torno a la construcción de las asíntotas mediante la utilización del software GeoGebra.

Palabras Clave: Escuela secundaria, Recorridos de estudio e investigación, Funciones racionales, Asíntotas, GeoGebra.

1. Introducción

En la actualidad, la enseñanza de la matemática ha sido reducida al estudio de respuestas, dejando de lado las preguntas que les dieron origen. La desaparición del estudio de preguntas, sustituidas por respuestas finalizadas conduce al fenómeno denominado por Chevallard, (2004, 2007) de la *pérdida de sentido* y *monumentalización del saber*. Este fenómeno didáctico, consiste en enseñar obras matemáticas como objetos ya creados, transparentes e incuestionables, como si fueran monumentos, a los cuales a lo sumo se los puede visitar. Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI) son dispositivos didácticos propuestos por Chevallard, en el marco de la *pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo*, con el fin de enfrentar el fenómeno de *monumentalización* del saber antes caracterizado. Los REI se basan en el estudio de preguntas *Q*, como punto de partida del saber matemático y en la construcción de posibles respuestas a dichas preguntas, por parte de la comunidad de estudio. En una enseñanza por REI cambia el tiempo y la forma en que se organiza el estudio en una clase usual, y también, el lugar que ocupan el profesor y los alumnos con relación al saber.

Este trabajo es parte de una investigación más amplia que pretende introducir en la escuela secundaria un cambio radical en la manera de estudiar matemática (Otero, Fanaro, Corica, Llanos, Sureda, Parra, et. Al. 2013). Lo hace a partir de un REI monodisciplinar que parte de la pregunta generatriz Q_0: *¿Cómo operar con curvas cualesquiera si solo se dispone de la representación gráfica de las mismas y de la unidad en los ejes*? (Llanos, Otero 2012, 2013a, 2013b). Las posibles respuestas a la pregunta *Q* permiten estudiar todas las funciones algebraicas presentes en los programas de estudio de los últimos tres años en la escuela secundaria Argentina.

En este trabajo presentaremos sólo algunos resultados obtenidos de la implementación del REI, centrándonos en la última parte del recorrido, relativa a las funciones racionales. En particular, centraremos el análisis en el estudio de las asíntotas de dichas funciones con la utilización del software GeoGebra como soporte.

2. Marco Teórico

Se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2009), que ha definido los fenómenos de *pérdida de sentido* y *monumentalización del saber*, y como una alternativa a la enseñanza monumental los Recorrido de Estudio e Investigación (REI), en el marco de la *pedagogía de la investigación y cuestionamiento del mundo*.

Para desarrollar la *pedagogía de la investigación y del cuestionamiento del mundo* en la escuela secundaria, se requiere modificar radicalmente el contrato de estudio actual, asumiendo que el saber matemático es el producto de respuestas a ciertas preguntas, de interés para el grupo de estudio en un momento determinado. Dichas preguntas requieren construir respuestas funcionales, útiles y no definitivas, que estarán en un proceso permanente de discusión y reformulación. Esto demandaría también, un cambio en los programas de estudio, que podrían transformarse en pares de preguntas *Q* y respuestas *R* que se constituyen en y por la clase. En este contexto, Chevallard (2004) formula la noción de REI, como un modelo general para el diseño y análisis de procesos de estudio que permiten estudiar matemática de una manera funcional.

Los Recorridos de Estudio e Investigación (REI)

Los REI son un dispositivo didáctico que coloca al estudio de las preguntas *Q* como punto de partida del conocimiento. El estudio de *Q* es realizado por el grupo de alumnos *X* bajo la dirección del profesor *y* (o un conjunto de profesores *Y*), esto provoca la emergencia de un sistema didáctico representado por S(*X*,*Y*,*Q*) cuyo objetivo es aportar una posible respuesta *R* a la pregunta *Q*, que aporta un sentido y una razón de ser a los conocimientos construidos.

En el inicio de un REI, se propone una cuestión *Q*, llamada *pregunta generatriz*, porque posee la propiedad de *generatividad*, es decir, permite formular numerosas preguntas derivadas, cuyo estudio llevará a la (re)construcción de un gran número de organizaciones matemáticas, que surgirán como respuesta a las preguntas que requirieron de su construcción. Así, el proceso de estudio queda determinado como $P=(Q_i;R_i)_{1\leq i\leq n}$, siendo Q_i todas las cuestiones que habitan dicho corazón ♥ y R_i las respuestas a estas cuestiones (Chevallard, 2007).

Para que una enseñanza por REI pueda llevarse a cabo, son necesarios diversos cambios relativos a las funciones didácticas *mesogénesis*, *topogénesis* y *cronogénesis*. La *mesogénesis* es la fabricación del medio *M* por la clase, mediante sus producciones externas e internas, las cuales incluyen las diversas preguntas Q_i, como las distintas *R* producidas por los alumnos y las obras *O* disponibles. A esta condición mesogenética está ligada una condición propia de la *topogénesis*: la construcción del medio ya no es sólo responsabilidad del profesor, sino que es producto de la clase. De esta manera, el *topos* del alumno adquiere un mayor protagonismo, pues no sólo debe aportar una respuesta a las distintas preguntas sino incorporar en el medio toda obra que desee. Esto genera un cambio también en el topos del profesor quien ahora no sólo actúa como un media más de la clase, sino que es el director del estudio.

La *cronogénesis* permite analizar y describir la gestión del tiempo didáctico. Esta función diferencia a los REI de otros dispositivos didácticos, debido a que esta fabricación del medio *M* genera una dilatación del tiempo didáctico y una extensión del tiempo de reloj requerido (Chevallard, 2009).

3. Metodología de investigación

La investigación es de corte cualitativo, etnográfico y exploratorio. Corresponde a un estudio longitudinal, que dura dos años con el mismo grupo de estudiantes. Aquí sólo se analizan los resultados obtenidos en la última parte del REI referida a una cuestión derivada de Q_0 que conduce al encuentro de la OM de las funciones racionales, más precisamente al estudio de las asíntotas de estas funciones, analizando la incidencia del del software GeoGebra para dicho estudio.

Contexto de implementación: se realizaron cuatro implementaciones en aula en una misma institución educativa de la ciudad de Tandil, provincia de Buenos Aires. Los cursos fueron seleccionados intencionalmente por el equipo de investigación, y en total participaron 121 estudiantes de 4to y 5to Año de la escuela secundaria entre las dos cohortes. Los resultados que se presentan corresponden a la última parte del REI. En esta instancia los alumnos ya han estudiado, en otras partes del recorrido, las OMs de las funciones polinómicas de grado dos y mayor en el marco del REI.

En todas las clases, los estudiantes trabajan en grupos de 4 integrantes. Cada estudiante elige con quien estudiar en la clase. El profesor que es el director del estudio, aporta en cada encuentro una pregunta que es desconocida por los estudiantes y se busca una respuesta entre todos los integrantes de la clase. Inicialmente al interior de cada grupo; y luego la que se acuerda como la más aproximada y aceptada por la clase.

Recolección y análisis de datos: se obtuvieron todos los protocolos escritos de los N=121 estudiantes de cada clase. Los mismos se digitalizan y se devuelven en la clase inmediata siguiente. Esto garantiza la continuidad del trabajo pues los estudiantes disponen permanentemente de sus producciones y los investigadores obtienen un registro de lo construido en cada encuentro. En todas las clases, se tomaron registros de audio “generales” que se completan con las notas de campo del profesor y de los investigadores del equipo.

4. Las funciones racionales en el marco del REI

El REI propuesto parte de la pregunta generatriz Q_0: *¿Cómo operar con curvas cualesquiera si sólo se dispone de la representación gráfica de las mismas y de la unidad en los ejes?* (Llanos, Otero, 2013b). Las diferentes OM que pueden reconstruirse a partir de esta cuestión Q_0 estarán determinadas por la elección de las curvas y la operación que se proponga realizar entre ellas.

Así, si se parte de la multiplicación de dos rectas, se genera un primer recorrido que permite reconstruir la Organización Matemática de las funciones polinómicas de segundo grado (Llanos, Otero, 2013a, 2013b). Si se parte de varias rectas o combinaciones entre parábolas y rectas o entre parábolas, etc., se genera un recorrido de estudio que permite reconstruir la OM de las funciones polinómicas en el cuerpo de los reales. Por último, si se trata de la división de rectas, o de rectas y parábolas, o parábolas y rectas, o entre parábolas, se genera un recorrido, que permite construir la OM de las funciones racionales (Otero, Llanos, Gazzola 2012, Gazzola, Llanos, Otero 2013).

Cada una de estas elecciones genera preguntas derivadas Q_1, Q_2, Q_3, a su vez, generan un conjunto de otras preguntas que originan los diferentes recorridos y permiten la construcción de las diferentes organizaciones matemáticas. En nuestro caso, nos ocupamos del cociente entre las curvas, y la pregunta que guía el estudio es Q_3: *¿cómo realizar el cociente entre funciones polinómicas si sólo se conocen sus representaciones gráficas y la unidad en los ejes*? De ella, Pueden desprenderse varias preguntas derivadas como se muestra en la *figura* 1, cuyas respuestas permiten no sólo estudiar las diferentes características de las funciones racionales sino otorgarle una razón de ser a esas funciones.

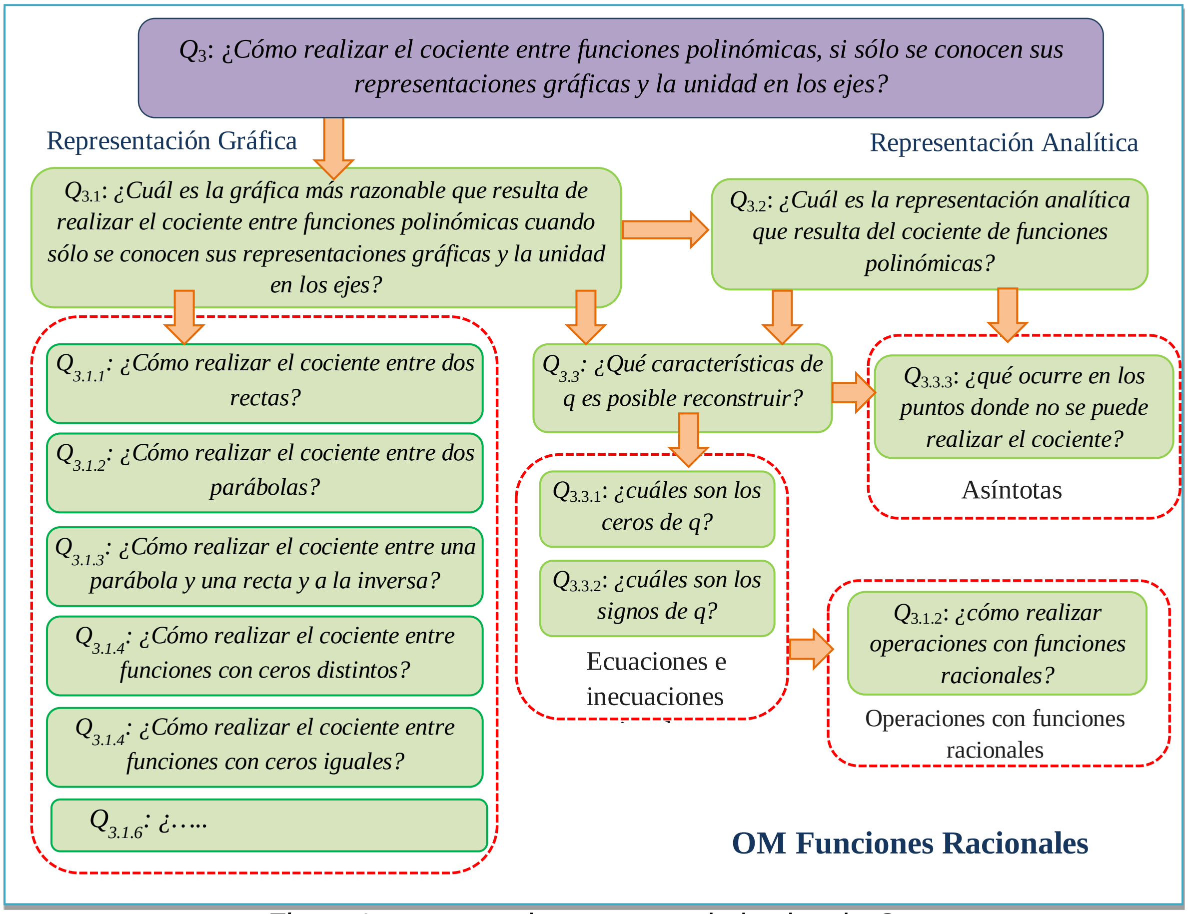


Figura 1: esquema de preguntas derivadas de Q_3.

Esta forma de estudiar se aleja del tratamiento escolar tradicional de la función racional, donde la representación gráfica, la representación algebraica, las propiedades y las asíntotas se imponen por definición. En este trabajo se muestra como estas características son el resultado de una adaptación de técnicas construidas antes, y la generación de otras a estudiar en esta última parte del recorrido.

El estudio de Q_0, parte de la obtención de la gráfica más razonable para q, que resulta de la división de dos funciones (dos rectas, una recta y una parábola y viceversa), utilizando técnicas geométricas cuando se conocen sólo las representaciones gráficas de esas funciones y la unidad en los ejes. Luego, se recuperan las mismas representaciones gráficas, pero, se proporciona la escala de los ejes y se proponen algunos puntos que pertenecen a las funciones representadas gráficamente.

Para ejemplificar las situaciones que guían el estudio se presentan las situaciones 1 y 3 del recorrido, correspondientes ambas al cociente entre dos rectas:

Las funciones f y g están dadas por los gráficos de la siguiente Figura. La función $q = \dfrac{f}{g}$

Situación 1

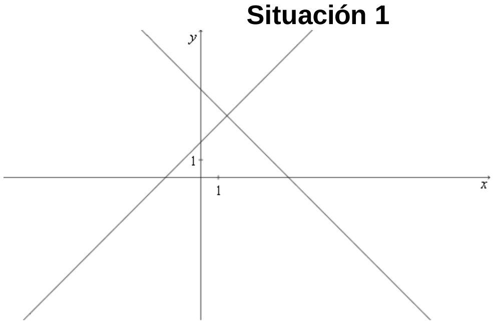


Figura2: Representación gráfica de las rectas *f* y *g*

(a) ¿Cuál podría ser la gráfica más razonable para q?
(b) ¿Qué características de la gráfica de q podrías justificar?
(c) ¿Es q una función?

Situación 3

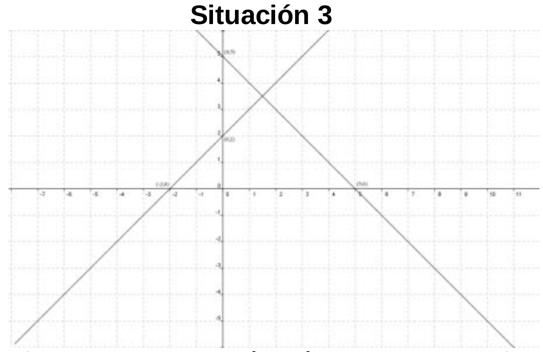


Figura3: Representación gráfica de las rectas *f* y *g*

a) Obtener la representación algebraica para q
b) Graficar q e indicar las características de las gráficas que podes justificar.

Para dar respuesta a la situación 1, los estudiantes obtienen la curva más razonable para *q* identificando en primera instancia los signos y los *puntos* que los estudiantes llaman puntos seguros de *q* (para esto se valen de la identificación de los ceros, usan la unidad, el menos uno y utilizan el hecho de que en la intersección de las funciones graficadas, la ordenada de *q* vale uno, por tratarse de un cociente). Para obtener otros *puntos seguros,* los estudiantes readaptan y modifican la técnica de la construcción geométrica que usaron en las partes precedentes del recorrido para realizar la multiplicación de rectas. Construyen triángulos semejantes, aprovechando el dato de la unidad y formulando las proporciones que justifican cómo pueden obtener la ordenada del punto que representará el cociente que buscan, en cualquier abscisa. Las técnicas matemáticas que se requieren para construir curvas cuando sólo se conoce la unidad se encuentran en el trabajo de Llanos y Otero (2013b). En la Figura 4 se presenta el protocolo del estudiante A33 que ejemplifica las características de la gráfica que se quiere construir, con relación a la situación 1.

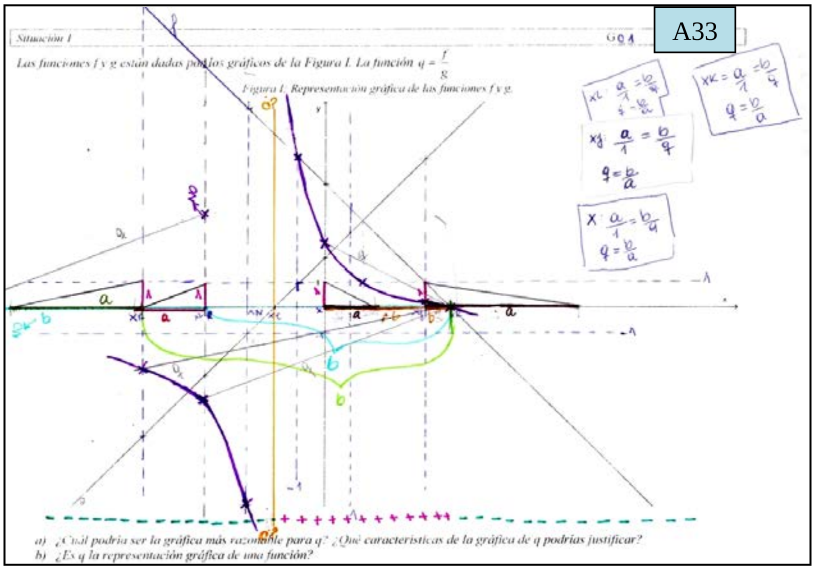


Figura 4: protocolo correspondiente al estudiante A33

Una vez construidas las características de la curva para *q*, con la situación 3, los estudiantes identifican las representaciones algebraicas de las funciones que se quieren dividir y luego encuentran la expresión para *q*. A modo de ejemplo en la Figura 5, se presentan los resultados del estudiante A19 para la *situación 3*.

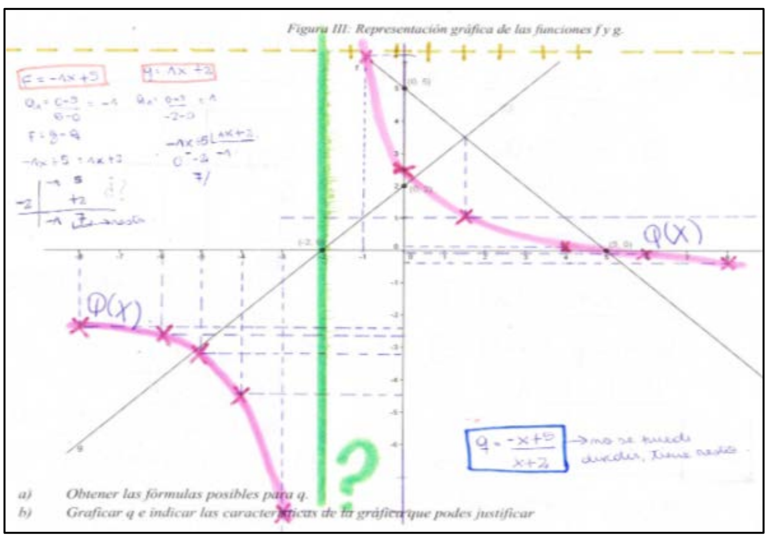


Figura 5: Protocolos correspondientes al estudiante A19.

Desde la situación 1 se introduce el problema de estudiar una característica fundamental de las funciones racionales: el caso de la división por cero. Se identifican los puntos donde la función divisor se hace cero y se analiza el comportamiento de la gráfica para *q* en los puntos próximos al "cero del denominador", ya que en este punto no es posible realizar el cociente entre las ordenadas de las curvas. Se discute acerca de cómo representar este punto en la gráfica, así como las posibilidades que pueden presentarse: que el dividendo y el divisor sean cero simultáneamente, o que no lo sean; lo cual permite

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 1**251**

entre otras cosas analizar la existencia de *q* y sus asíntotas. Se propone a los estudiantes retomar todas las funciones estudiadas en las situaciones anteriores y

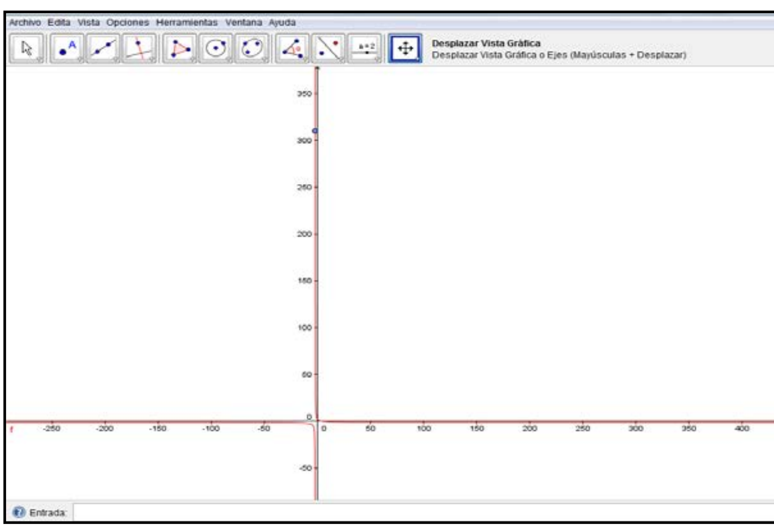
a) *Analizar el comportamiento de q considerando valores de x muy próximos a aquellos que anulan el denominador.*
b) *Analizar el comportamiento de q considerando valores de x cuyo valor absoluto sea cada vez mayor.*

Para analizar las características de la curva en estos puntos, se utilizó el software Geogebra. Para ello, cada grupo de estudiantes contó con una netbook que fue proveída por el equipo de investigación. Se decidió introducir esta herramienta para que los estudiantes puedan analizar de manera relativamente completa los puntos necesarios para dar una respuesta adecuada al problema.

El estudio de las asíntotas de las funciones racionales con GeoGebra

Para analizar los distintos valores de *q*, los estudiantes grafican inicialmente la función que se quiere analizar en el software y el profesor sugiere definir un punto perteneciente a la curva y programarlo para deslizarlo por la gráfica. Eso permite obtener información precisa sobre el comportamiento de los puntos en la curva y los valores que se elijan en una tabla. Se acuerda analizar por separado cada una de las ramas de las funciones para considerar que ocurre en puntos próximos al cero de la función denominador, tanto por la izquierda como por la derecha de los mismos.

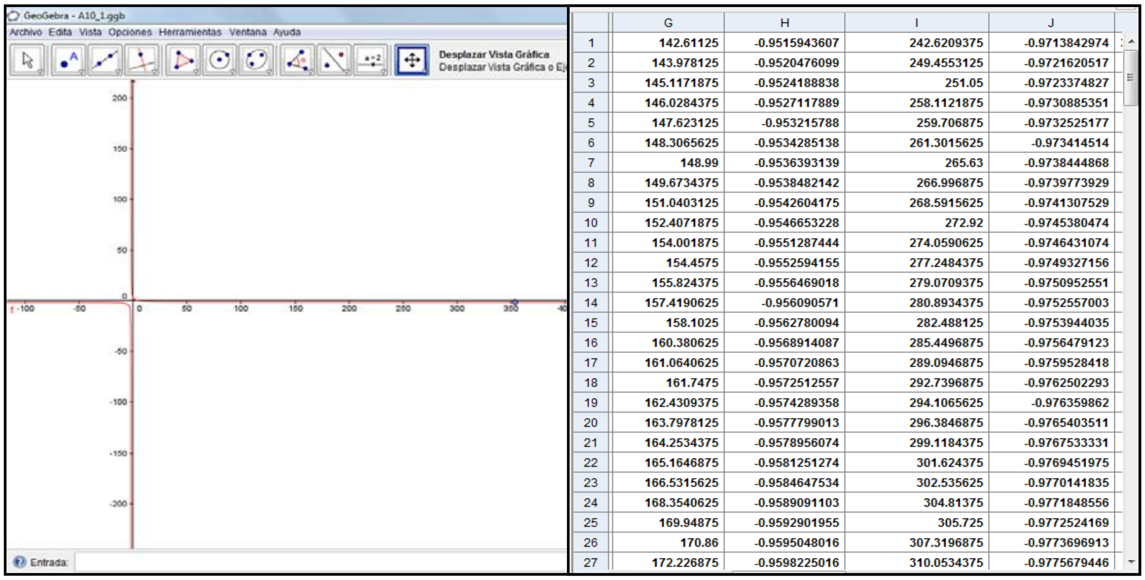
Por ejemplo, para $q_1 = \dfrac{-x+5}{x+2}$, correspondiente a las situaciones analizadas antes, el grupo G01 realiza la gráfica y obtiene diferentes valores como se muestra en la *Figura* 6. Al acercarse lo suficientemente al valor *-2*, la función crece rápidamente según los resultados obtenidos para una de las ramas. En la tabla, los valores de la izquierda corresponden a *x* y los de la izquierda corresponden a los valores de *q*.



	A	B
1	-0.83	4.9829059829
2	-0.8975	5.3492063492
3	-0.965	5.7632850242
4	-1.0325	6.2351421189
5	-1.1	6.7777777778
6	-1.1675	7.4084084084
7	-1.235	8.1503267974
8	-1.3025	9.0358422939
9	-1.37	10.11111111...
10	-1.4375	11.44444444...
11	-1.505	13.14141414...
12	-1.5725	15.37426900...
13	-1.64	18.44444444...
14	-1.7075	22.93162393...
15	-1.775	30.11111111...
16	-1.8425	43.44444444...
17	-1.91	76.77777777...
18	-1.9775	310.1111111...
19		

Figura 6: imagen correspondiente a la resolución del grupo G01

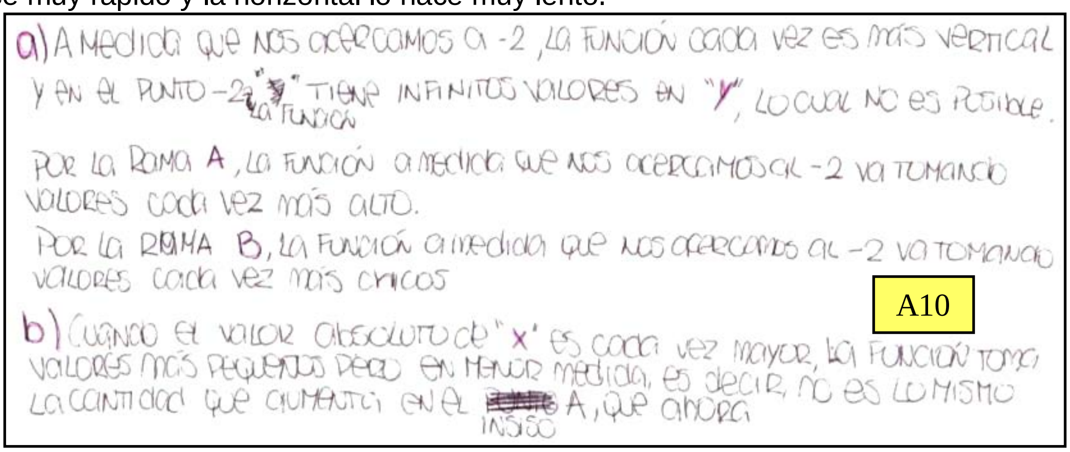
Para el inciso b, este mismo grupo tomó valores de *x* suficientemente grandes y se puede observar en la *Figura* 7 que la función tiene un decrecimiento muy lento y se acerca al valor -1, aunque nunca toma este valor. Esto corresponde a la asíntota horizontal, que en este caso se encuentra en *y*=-1.



	G	H	I	J
1	142.61125	-0.9515943607	242.6209375	-0.9713842974
2	143.978125	-0.9520476099	249.4553125	-0.9721620517
3	145.1171875	-0.9524188838	251.05	-0.9723374827
4	146.0284375	-0.9527117889	258.1121875	-0.9730885351
5	147.623125	-0.953215788	259.706875	-0.9732525177
6	148.3065625	-0.9534285138	261.3015625	-0.973414514
7	148.99	-0.9536393139	265.63	-0.9738444868
8	149.6734375	-0.9538482142	266.996875	-0.9739773929
9	151.0403125	-0.9542604175	268.5915625	-0.9741307529
10	152.4071875	-0.9546653228	272.92	-0.9745380474
11	154.001875	-0.9551287444	274.0590625	-0.9746431074
12	154.4575	-0.9552594155	277.2484375	-0.9749327156
13	155.824375	-0.9556469018	279.0709375	-0.9750952551
14	157.4190625	-0.956090571	280.8934375	-0.9752557003
15	158.1025	-0.9562780094	282.488125	-0.9753944035
16	160.380625	-0.9568914087	285.4496875	-0.9756479123
17	161.0640625	-0.9570720863	289.0946875	-0.9759528418
18	161.7475	-0.9572512557	292.7396875	-0.9762502293
19	162.4309375	-0.9574289358	294.1065625	-0.976359862
20	163.7978125	-0.9577799013	296.3846875	-0.9765403511
21	164.2534375	-0.9578956074	299.1184375	-0.9767533331
22	165.1646875	-0.9581251274	301.624375	-0.9769451975
23	166.5315625	-0.9584647534	302.535625	-0.9770141835
24	168.3540625	-0.9589091103	304.81375	-0.9771848556
25	169.94875	-0.9592901955	305.725	-0.9772524169
26	170.86	-0.9595048016	307.3196875	-0.9773696913
27	172.226875	-0.9598225016	310.0534375	-0.9775679446

Figura 7: imagen correspondiente a la resolución del grupo G01

Los resultados que los estudiantes obtuvieron del software se pueden interpretar en el protocolo de A10 que se muestra en la Figura *8*. Este estudiante expresa como la función *q*, a medida que se acerca al valor *-2* (el cual corresponde a la asíntota vertical) se vuelve cada vez “más vertical” y nunca “lo toca”. Expresa, además, una diferencia muy importante entre las asíntotas verticales y las horizontales, y es que la asíntota vertical crece muy rápido y la horizontal lo hace muy lento.



a) A MEDIDA QUE NOS ACERCAMOS A -2, LA FUNCIÓN CADA VEZ ES MÁS VERTICAL Y EN EL PUNTO -2 LA FUNCIÓN "Y" TIENE INFINITOS VALORES EN "Y", LO CUAL NO ES POSIBLE.

POR LA RAMA A, LA FUNCIÓN A MEDIDA QUE NOS ACERCAMOS AL -2 VA TOMANDO VALORES CADA VEZ MÁS ALTO.

POR LA RAMA B, LA FUNCIÓN A MEDIDA QUE NOS ACERCAMOS AL -2 VA TOMANDO VALORES CADA VEZ MÁS CHICOS

A10

b) CUANDO EL VALOR ABSOLUTO DE "X" ES CADA VEZ MAYOR, LA FUNCIÓN TOMA VALORES MÁS PEQUEÑOS PERO EN MENOR MEDIDA, ES DECIR, NO ES LO MISMO LA CANTIDAD QUE AUMENTA EN EL INSISO A, QUE AHORA

Figura 8: Protocolo correspondiente al alumno A10

Para completar el estudio, se analiza también el caso de la función $q_3(x)=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x+2}$, que no presenta asíntotas sino un punto de discontinuidad. En la visualización de la pantalla del software (*Figura* 9), del grupo G05, se puede apreciar cómo buscan valores próximos a x=-2 y verifican que el software "devuelve" valores para cualquier caso, excepto en ese punto que aparecen signos de interrogación.

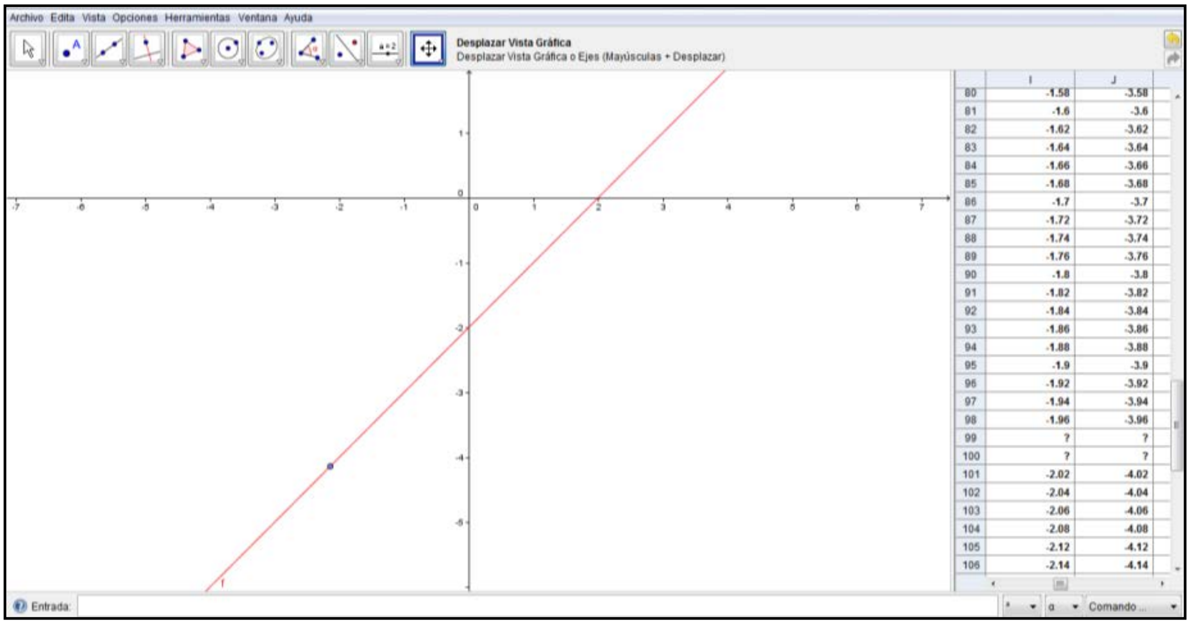


Figura 9: visualización de la pantalla del software del grupo G5

Algunos de los resultados obtenidos, son representados en la *Figura* 10 con los protocolos de los estudiantes A15 y A31, que expresan en palabras lo que sucede en esos puntos problemáticos.

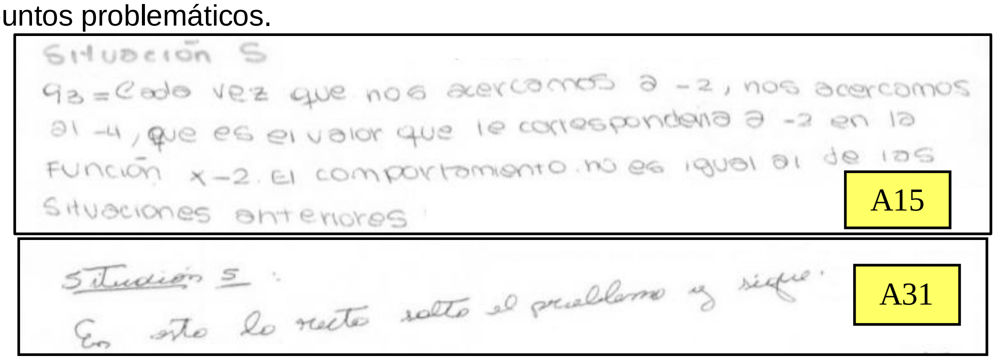


Figura 10: protocolos correspondientes a los alumnos A15 y A31 respectivamente

Una vez analizados todos estos casos, los estudiantes proponen definiciones para las asíntotas y puntos de discontinuidad y además, sus respectivas ecuaciones. Los protocolos correspondientes a los alumnos A30 y A16 permiten interpretar cómo se dio esta construcción en el *medio*.

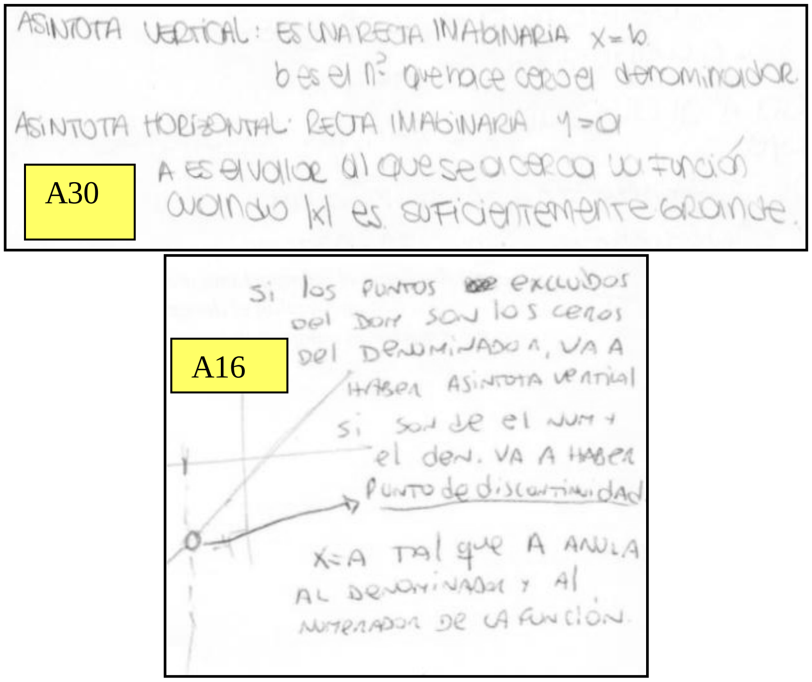


Figura 11: protocolos correspondientes a los alumnos A16 y A30

Este estudio, les permitió a los estudiantes ser los encargados de investigar y analizar lo que sucede en los puntos excluidos del dominio de las funciones racionales, construir definiciones y justificarlas. Además, a partir del uso del Geogebra, se pudieron reinterpretar los resultados obtenidos en las situaciones anteriores.

5. Conclusiones

En este trabajo se presentan los resultados de la última parte de un REI que dura dos años. Aquí se describen los resultados obtenidos por estudiantes de 5to Año de la escuela secundaria cuando estudian funciones racionales de una manera no habitual y recuperando las técnicas construidas en las primeras partes del recorrido.

Puede sintetizarse a partir del trabajo, que las características de las gráficas y las representaciones analíticas surgen como consecuencia de realizar una adaptación de las técnicas obtenidas antes en el marco del REI, excepto para el caso del cociente, en el punto donde el denominador es cero. Si bien por adaptación de las técnicas geométricas fue posible obtener algunas características en los puntos próximos a las asíntotas y puntos de discontinuidad, fue necesario introducir en la clase el soporte Geogebra, para analizar y justificar el comportamiento de las curvas en esos puntos y sus proximidades.

La inserción del software queda justificada en la investigación por la variedad de puntos que los estudiantes pueden analizar en un tiempo razonable, pudiendo no sólo obtener los valores en las proximidades y extremos; sino también interpretar el “error” que indica el software en las asíntotas y puntos críticos. Así mismo fue posible gracias al software analizar en simultáneo que significa eso en la gráfica de la función racional *q* en cuestión. Es a partir del Geogebra que los estudiantes pueden identificar y consensuar cuáles son las diferencias entre las asíntotas y los puntos de discontinuidad tanto gráfica como analíticamente; obteniendo como consecuencia una definición consensuada de estos conocimientos matemáticos fundamentales para el estudio de las funciones racionales y la generalización para otras funciones.

Los resultados ponen evidencia que el recorrido permitió que se estudien en este caso las funciones racionales de una manera que se aparta de la tradicional. Gracias a la incorporación del software al aula los estudiantes ocuparon un papel esencial en el estudio de las asíntotas de estas funciones, además de realizar una adaptación adecuada de las técnicas generadas en las primeras partes del REI, que han sido sin dudas constitutivas para el desarrollo de estos conceptos y de las características de las funciones racionales en su conjunto. Se destacan aquí el potencial de las técnicas y la calidad del trabajo matemático realizado.

6. Bibliografía

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 19/2, pp. 221-266.

Chevallard, Y. (2009). *La notion de PER: problèmes et avancées*. Disponible en http://yves.chevallard.free.fr/.

Gazzola, M. P.; Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2013). Research and Study Paths in the Teaching of Mathematics at Secondary school relative to the Rational Functions. *Journal of Arts & Humanities*, 2 (3), pp. 109-115.

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2013a). La pédagogie de l'enquête et du questionnement du monde: une étude longitudinale dans l'école secondaire argentine. *Review of Science, Mathematics and ICT Education. Re SM TICE,* vol. 7, pp. 27-46

Llanos, V. C.; Otero, M. R. (2013b). Operaciones con curvas: las funciones polinómicas de grado dos y la generalización a otras funciones. *Revista SUMA+ para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*, 73. Valencia.

Otero, M. R.; Fanaro, M.A., Corica, A.R., Llanos, V. C., Sureda, P., Parra, V. (2013). *Teoría Antropológica de lo Didáctico en el aula de matemáticas*. Tandil, Buenos Aires: Dunken