



**CONGRESO
IBEROAMERICANO**
DE CIENCIA, TECNOLOGÍA,
INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

**CONGRESSO
IBERO-AMERICANO**
DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA,
INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE CIENCIAS MATEMÁTICAS POTENCIADAS POR TECNOLOGÍAS

BOSCH, H., BERGERO, M., CARVAJAL, L., DI BLASI REGNER, M.,;
DIMITRIJEWITS, A., GEROMINI, N., RAMPAZZI, M.

ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE CIENCIAS MATEMÁTICAS POTENCIADAS POR TECNOLOGÍAS

BOSCH, H., BERGERO, M., CARVAJAL, L., DI BLASI REGNER, M.,
DIMITRIJEWITS, A., GEROMINI, N., RAMPAZZI, M.

hbosch@fibertel.com.ar, msbergero@gmail.com, mario.dibiasi@gmail.com,
mcrampazzi@fibertel.com.ar

RESUMEN

Son conocidas las dificultades que tienen los alumnos en comprender las fórmulas matemáticas, particularmente en álgebra y cálculo. Los métodos convencionales de enseñanza de matemática conducen a la frustración de la gran mayoría de los alumnos. Los libros clásicos, ejercicios y métodos tradicionales de enseñanza de matemática, todavía omnipresentes en la segunda década del Siglo XXI, no involucran la tecnología computacional para la resolución de problemas matemáticos.

Es preciso que haya un corrimiento de paradigma de la didáctica de Ciencias Matemáticas, ligando a ella las didácticas de otras ciencias y sus aplicaciones. Se plantea así la concepción de transversalidad encuadrada en el estudio integrado de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemática (*Sciences, Technology, Engineering and Mathematics – STEM*). Estas disciplinas son concebidas en conjunto e integradas. La estadística y la computación deben considerarse ramas esenciales que integran las ciencias matemáticas. En resumen, computación, modelización y validación experimental de los modelos constituyen las tres piezas esenciales para el desarrollo de la enseñanza de las ciencias matemáticas. La comunidad de educadores de matemática debe estar atenta a esta transformación.

La tecnología debe ser usada para ayudar al estudiante a interactuar con los contenidos de las ciencias y matemática en una forma de promover un mayor entendimiento de ideas complejas, facilitar la solución de problemas complejos y crear nuevas oportunidades de educación. Se debe contar con nuevas infraestructuras de aprendizaje integradas con hardware computacional, redes y software operativo.

Esta nueva infraestructura permitirá trabajar con datos e información a los efectos que los alumnos se capaciten en manipularlos, representarlos y comunicarlos.

Encuadrado en este enfoque se desarrollan investigaciones para producir recursos didácticos sobre la base de problemas donde el alumno puede experimentar con números y gráficos. Para alentar este cambio se requiere la producción de nuevos recursos didácticos diferentes a los disponibles de décadas pasadas, los cuales deben usarse en entornos de aprendizajes diferentes al aula tradicional con nuevas prácticas de enseñanza (experimental). Como ejemplo se plantean desarrollos de modelos matemáticos de fenómenos físicos con la validación de datos experimentales.

Introducción

La Sociedad y la naturaleza nos presentan problemas concretos, siendo los científicos y técnicos los que deben resolverlos. Para ello es preciso seguir una metodología de suponer que los fenómenos sociales y de la naturaleza pueden ser representados por modelos.

Para desarrollar un modelo es preciso disponer de buenos datos de la realidad, haber realizado una investigación empírica, programar cómo se observará el fenómeno, con que herramientas, cómo observar, experimentar y medir, cómo coleccionar la información. Para resolver los algoritmos matemáticos es necesario aplicar métodos y herramientas, fundamentalmente desarrollados en los últimos años, conocidos como Sistemas Algebraicos Computacionales (SAC).

Pero no sólo es necesario resolver el algoritmo, sino que es necesario validar la solución con los datos experimentales. Esta validación indicará cuán precisas han sido las hipótesis sobre las cuales se ha basado el modelo.

A continuación se presenta la modelización de algunos problemas de la vida real. Se mencionan ejemplos de cómo presentar los problemas más familiares, cómo se realizan las mediciones, cómo se plantean los algoritmos, y cómo se comparan las predicciones del modelo con las mediciones realizadas.

En la primera serie de ejemplos se encaran los modelos relacionados con la fuerza gravitatoria y la fuerza de arrastre que actúan sobre un cuerpo que cae libremente.

En la segunda serie de ejemplos se encaran modelos cuyo algoritmo básico de representación tiene una estructura común. La solución se relaciona con una función exponencial.

La tercera serie se relaciona con el movimiento armónico simple.

Modelo descriptivo del movimiento de caída de un cuerpo de masa m por atracción de la fuerza gravitatoria de la tierra

Se parte del conocimiento que Newton estableció sobre la fuerza que ejerce la tierra sobre un cuerpo de masa m . El módulo de la fuerza es proporcional al producto de las masas (cuerpo y tierra) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los centros de las masas. La constante de proporcionalidad es la constante de gravitación universal G .

Actividad 1

- Plantee el algoritmo correspondiente a la descripción de Newton*
- Establezca la relación de las constantes G , masa M y radio R de la tierra*
- Defina la expresión del peso del cuerpo*

a) El algoritmo es
$$F = \frac{G \cdot M \cdot m}{R^2} \quad (1)$$

b) El producto
$$\frac{G \cdot M}{R^2} = g \quad (2)$$

es llamado aceleración de la gravedad, cuyo valor es

$$g = 9,806 \frac{m}{s^2} \quad (3)$$

a 45° de latitud y nivel del mar.

De esta manera queda definido el peso **P** del cuerpo de masa *m*, atraído por la masa gravitatoria *M* de la tierra a una distancia *R*

$$P = m \cdot g. \quad (4)$$

Es necesario validar el modelo de Newton de atracción gravitatoria entre el cuerpo de masa *m* y la tierra de masa *M* mediante una experiencia de laboratorio que se propone a continuación.

Actividad 2

Desarrollo de una experiencia de caída libre de un cuerpo. Obtención de registros de velocidad y desplazamiento

Se dispone de un sistema de registro, procesamiento y representación de datos automático, constituido por una foto compuerta y una interfaz ligada a una computadora. Como cuerpo cuya caída libre se analiza, es una persiana de plástico con bandas negras y transparentes igualmente espaciadas. (Ver Fig. 1). En la Fig. 2 se muestra la posición de la foto compuerta y la persiana, que se deja caer libremente. En la Fig. 3 se muestra el registro de velocidades medias de cada intervalo Δx entre dos bandas negras de la persiana en función del tiempo. Se ajustan estos valores con una recta obteniéndose el valor de la pendiente. En esta figura se muestran los valores experimentales ajustados con una recta de pendiente $9,75 \pm 0,02$.

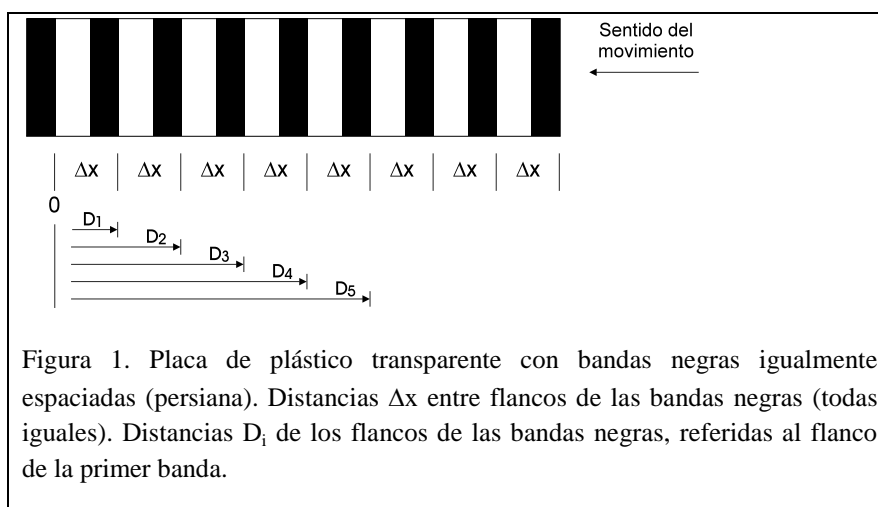


Figura 1. Placa de plástico transparente con bandas negras igualmente espaciadas (persiana). Distancias Δx entre flancos de las bandas negras (todas iguales). Distancias D_i de los flancos de las bandas negras, referidas al flanco de la primer banda.

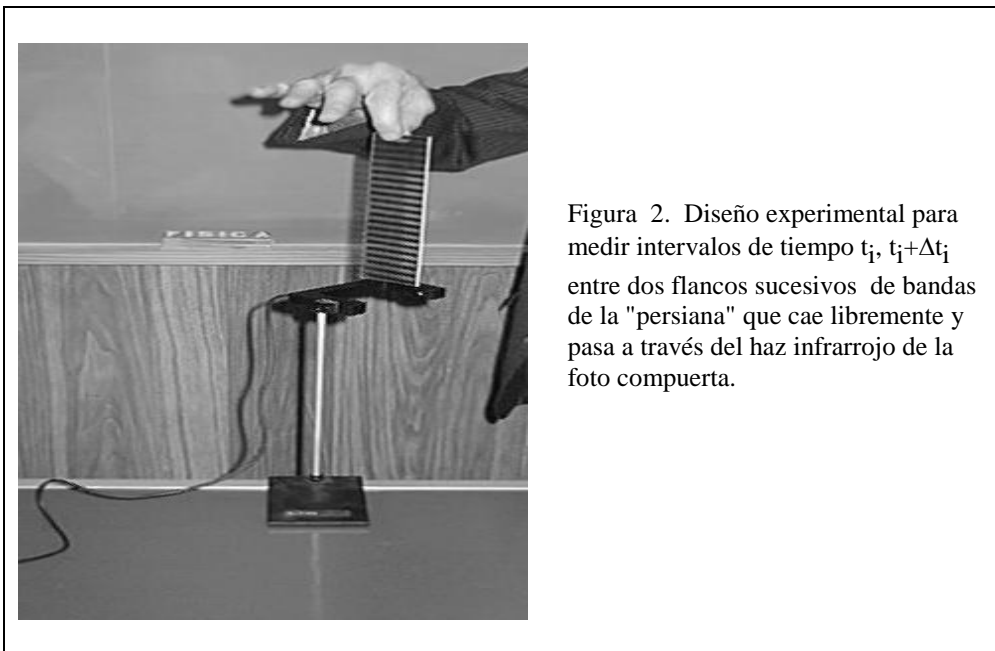


Figura 2. Diseño experimental para medir intervalos de tiempo t_i , $t_i + \Delta t_i$ entre dos flancos sucesivos de bandas de la "persiana" que cae libremente y pasa a través del haz infrarrojo de la foto compuerta.

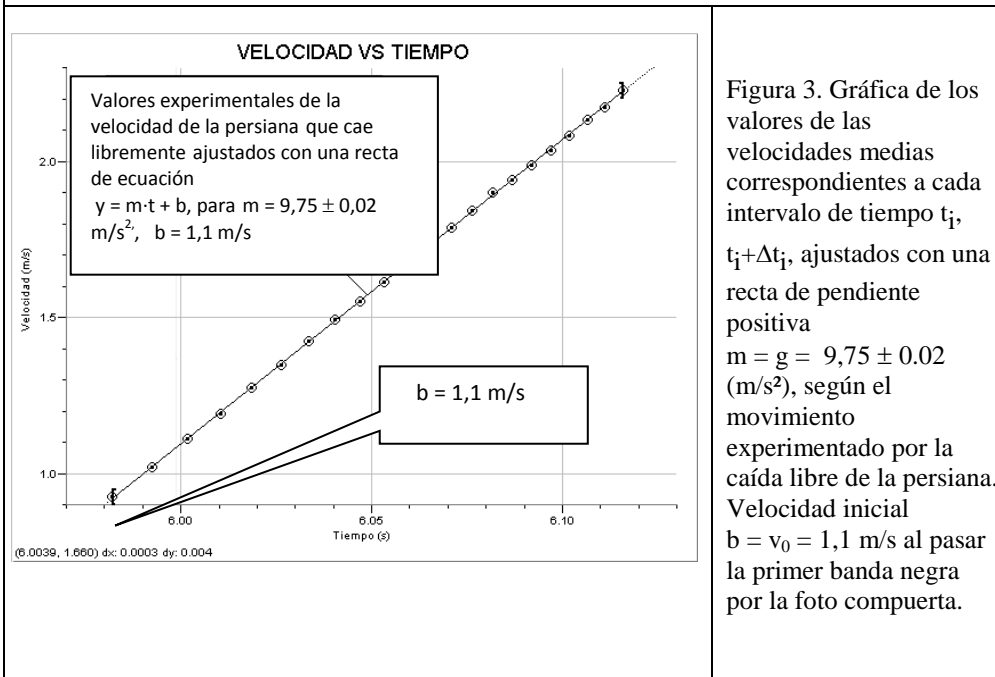


Figura 3. Gráfica de los valores de las velocidades medias correspondientes a cada intervalo de tiempo t_i , $t_i + \Delta t_i$, ajustados con una recta de pendiente positiva $m = g = 9,75 \pm 0.02 \text{ (m/s}^2\text{)}$, según el movimiento experimentado por la caída libre de la persiana. Velocidad inicial $b = v_0 = 1,1 \text{ m/s}$ al pasar la primer banda negra por la foto compuerta.

Se ha obtenido un valor experimental de la constante de gravedad g , que resulta muy aproximado al valor determinado como constante internacional.

Actividad 3

Formulación del Modelo del movimiento de caída del cuerpo

- a) ¿Qué relación matemática existe entre la aceleración del cuerpo y la velocidad?
- b) ¿Qué relación matemática existe entre la velocidad del cuerpo y su desplazamiento en función del tiempo?

a) Se parte de la definición de la aceleración (constante) g de un cuerpo en movimiento de caída libre con rozamiento del aire despreciable, como la derivada de la función velocidad v del cuerpo respecto del tiempo, para cualquier instante t

$$g = \frac{dv}{dt} \quad (5.a)$$

Queda de esta manera planteado el algoritmo que predice la velocidad del cuerpo en función del tiempo relacionado con la aceleración de la gravedad, con condición inicial para $t = 0$, es $v = v_0$.

$$v(t) = v_0 + g \cdot t \quad (5.b)$$

b) Se parte también del conocimiento que la función velocidad es igual a la derivada de la función desplazamiento del cuerpo hacia la tierra respecto del tiempo, para cualquier instante t

$$v(t) = \frac{dz}{dt} \quad (6.a)$$

Con lo cual queda planteado el segundo algoritmo con la condición inicial para $t = 0$, es $z = z_0$, distancia del punto de lanzamiento del cuerpo respecto del origen de un sistema de coordenadas situado sobre la tierra.

a) *Como práctica, se requiere resolver el algoritmo (6.a) y obtener la predicción del modelo de Newton relativo al desplazamiento del cuerpo*

A veces es necesario recurrir a Sistemas Algebraicos Computacionales, otras veces, como la presente, se trata de integrar una simple ecuación diferencial con las condiciones iniciales. Se integra este algoritmo entre el tiempo $t = 0$, al cual le corresponde un desplazamiento inicial z_0 , y el tiempo t , para un desplazamiento $z(t)$:

$$z(t) = v_0 \cdot t + 0,5 \cdot g \cdot t^2 + z_0 \quad (6.b)$$

Mediante las dos integraciones sucesivas se ha obtenido la predicción que describe el desplazamiento escalar del cuerpo hacia la tierra, a partir de un instante $t = 0$ con velocidad v_0 y desplazamiento z_0 , para cualquier instante posterior t .

Por lo tanto, se concluye que el desplazamiento de caída libre de un cuerpo en el aire con rozamiento despreciable está representado por una función cuadrática, tal que el coeficiente del término cuadrático es igual a la mitad de la aceleración de la gravedad constante. El desplazamiento está caracterizado por tres constantes, z_0 , v_0 , g . Las dos primeras dependen de la experiencia que se realice.

Actividad 4

Validación de las predicciones del modelo con la experiencia

Se ha verificado que la aceleración de la persiana (cuerpo de prueba) es constante y positiva, con un valor que se aproxima al valor de g

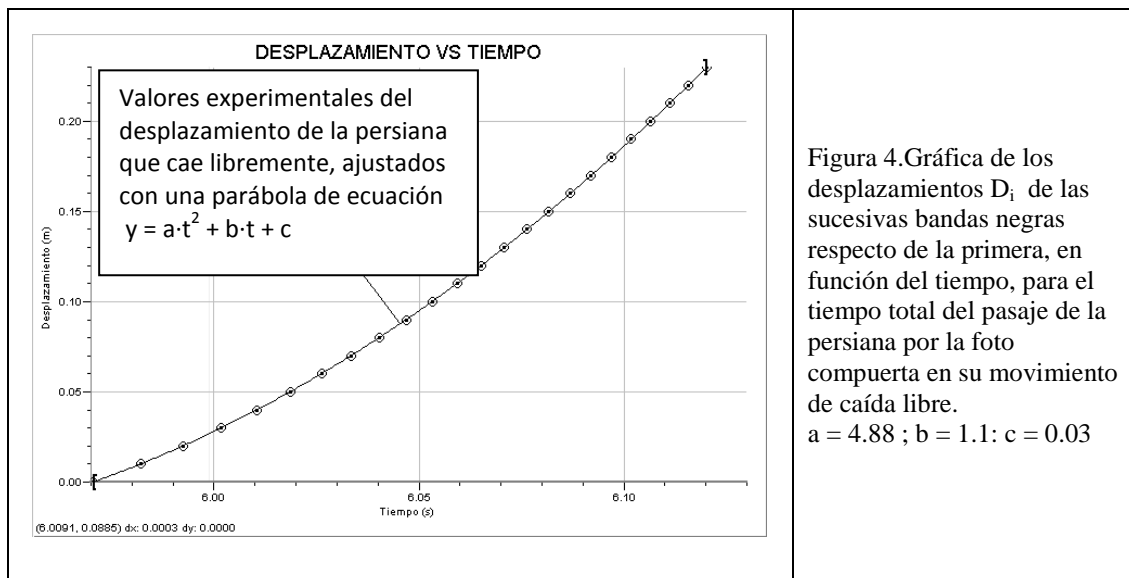
Aceleración invariante y positiva: $a = 9,75 \text{ m/s}^2 \cong g$.

La Fig. 4 muestra el registro de los valores del desplazamiento de las diferentes bandas de la persiana respecto de la primera banda, en función del tiempo. Los valores experimentales de las constantes son

$$z_0 = 0,03 ; v_0 = 1,1 \text{ y } a = 4,88. \quad (7)$$

La función desplazamiento es una función cuadrática cuyos coeficientes son las constantes indicadas

$$z(t) = z_0 + v_0 \cdot t + 0,5 \cdot g \cdot t^2 = 0,03 + 1,1 \cdot t + 4,88 \cdot t^2. \quad (8)$$



Conclusiones

De acuerdo con los datos experimentales, el desplazamiento vertical del cuerpo está representado por una función cuadrática, tal que el coeficiente del término cuadrático es igual a la mitad de la aceleración de la gravedad g , constante; el coeficiente del término lineal es igual a la velocidad inicial y el término independiente es igual a la posición inicial del borde de la persiana respecto de la compuerta.

Modelo descriptivo del desplazamiento de un cuerpo dentro de un fluido por efecto de la acción de la gravedad de la tierra y de la fuerza de arrastre del fluido sobre el cuerpo

En general, se plantean problemas de caída de cuerpos en el aire y se supone que el rozamiento entre el cuerpo y las moléculas de aire es despreciable. Pero, como se demostrará a continuación, si el cuerpo es liviano y tiene una superficie suficientemente grande, el aire ejerce una fuerza de frenado, llamada fuerza de arrastre.

Fuerza de arrastre

Se plantea el caso de un filtro de café que cae desde una cierta altura. El cuerpo cae por efecto de la acción de la gravedad de la tierra, pero el aire ejerce una fuerza de arrastre o fricción que lo empuja hacia arriba.

Para tener una apreciación cuantitativa del efecto de la fuerza de arrastre sobre el cuerpo, es preciso realizar una experiencia y observar que la aceleración va disminuyendo del valor $a = g$ hacia un valor nulo (velocidad constante). Por lo tanto, la velocidad no siempre es proporcional al tiempo. Existe un quiebre de la linealidad hacia una velocidad constante, llamada velocidad límite, a partir de un determinado instante. Luego el cuerpo se mueve con velocidad límite constante al ser su aceleración nula.

Actividad 1

Desarrollo de una experiencia de caída libre de un cuerpo. Obtención de registros de velocidad y desplazamiento

Se utiliza un radar ultrasónico para determinar la velocidad y desplazamiento del filtro de café en su caída en el aire. El radar se acopla a una interfaz y ésta a una computadora. La Fig. 1 muestra el arreglo experimental. En la Fig. 2 se ilustra el gráfico de la velocidad en función del tiempo, mostrando claramente que la velocidad llega a un valor máximo, llamado velocidad límite, constante. Su valor se estima en

$$v_t = 2,97 \frac{m}{s}. \quad (1)$$


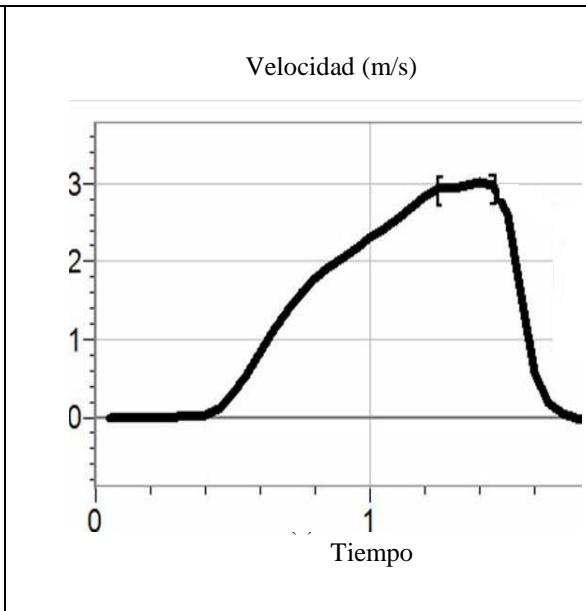
Actividad 2

Formulación del Modelo del movimiento de caída del cuerpo

Primera suposición: La fuerza de arrastre es la que influye sobre la velocidad del cuerpo hasta que ésta resulta constante. Se supone que la fuerza de arrastre que ejerce el aire sobre el cuerpo es proporcional a la velocidad de caída, cuya magnitud es

$$F_a = k \cdot v. \quad (2)$$

- Determine la ecuación de movimiento del cuerpo de peso mg sometido a una fuerza de arrastre proporcional a la velocidad. Determine la expresión de velocidad límite y de la constante de proporcionalidad.*
- Determine la ecuación de velocidad en función del tiempo con los valores hallados de las constantes*

	 <p style="text-align: center;">Velocidad (m/s)</p> <p style="text-align: center;">Tiempo</p>
<p>Figura 1. Arreglo experimental para determinar la velocidad de caída en el aire de un filtro de café. Se utiliza un radar ultrasónico colocado arriba del filtro y una interfaz conectada a una computadora.</p>	<p>Figura 2. Registro de la velocidad de caída del filtro de café en el aire. Antes de tocar el suelo se observa la velocidad constante.</p>

a) La ecuación de movimiento mientras el cuerpo cae (aceleración del cuerpo va disminuyendo desde el valor g , cuando es lanzado, al valor nulo)

Para un tiempo t de caída resulta $a = g - \mu \cdot v$;

Para el tiempo $t = t_l$ cuando $a = 0$ y $v = v_l$ resulta $g - \mu \cdot v_l = 0$.

De donde la velocidad límite es una función de la constante g y la constante μ

$$v_l = g / \mu = 2.97 \text{ m/s.} \quad (3)$$

b) Interesa conocer cómo varía la velocidad del cuerpo en función del tiempo, para lo cual se debe partir de la ecuación de movimiento

$$a = g - \mu \cdot v.$$

Por lo tanto $dv / [g - \mu \cdot v] = dt$

Se plantea la ecuación integral $t = \int_0^v dv / [g - \mu \cdot v]$ (4)

Con la condición para $t = 0$ es $v = 0$; para $t = t_l$ es $v = v_l = 2.97 \text{ m/s}$

La integración de la ecuación (4) puede obtenerse de un sistema computacional, resultando

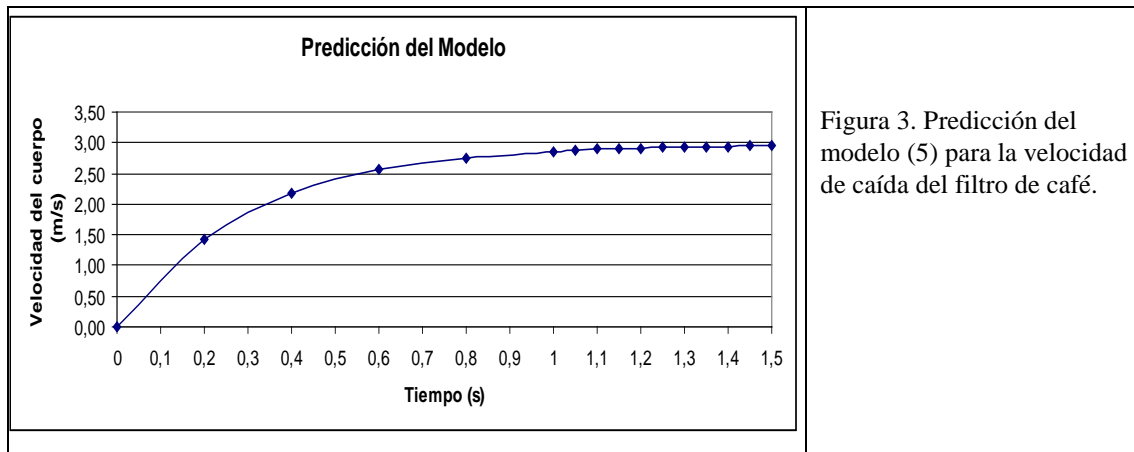
$$t = \int_0^v \frac{dv}{[g - \mu \cdot v]} = -(1/\mu) \cdot \ln [1 - \mu \cdot v]$$

$$\ln [1 - (\mu \cdot v)] = - \mu t = 3.3 t$$

Teniendo en cuenta la relación (3) resulta

$$v(t) = 2,97 \cdot (1 - e^{-3,3 \cdot t}). \quad (5)$$

La función exponencial (5) constituye la predicción del modelo de velocidad de caída del filtro de café en el aire, suponiendo que la fuerza de arrastre es proporcional a la velocidad. Su gráfica se ilustra en la Fig. 3 para un intervalo de tiempo (0-1,4 s) (tiempo de caída del cuerpo).



Segunda suposición: La fuerza de arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad del cuerpo. Lo cual implica que el efecto de la fuerza de arrastre es más fuerte. Se supone

$$F_a = k^2 v^2.$$

Actividad 3

- a) *Determine la ecuación de movimiento del cuerpo de peso mg sometido a una fuerza de arrastre proporcional a la velocidad. Determine la expresión de velocidad límite y de la constante de proporcionalidad.*
- b) *Determine la ecuación de velocidad en función del tiempo con los valores hallados de las constantes*

a) La ecuación de movimiento mientras el cuerpo cae, para un tiempo t es

$$a = g - \gamma^2 \cdot v^2.$$

Para el tiempo $t = t_f$ cuando $a = 0$ y $v = v_f$ resulta $g - \gamma^2 \cdot v_f^2 = 0$.

De donde la velocidad límite es una función de la constante g y la constante γ^2

$$v_t = \sqrt{(g)/\gamma} = 3.13/\gamma = 2.97 \text{ m/s} \quad (6)$$

b) Interesa conocer cómo varía la velocidad del cuerpo en función del tiempo, para lo cual se debe partir de la ecuación de movimiento la ecuación diferencial

$$(dv/dt) = (g - \gamma \cdot v^2) \quad (7.a)$$

Con la condición para $t = 0$ es $v = 0$; para $t = t_t$ es $v = v_t = 2.97 \text{ m/s}$. Luego

$$dv/g [1 - (\gamma/g) \cdot v^2] = dt$$

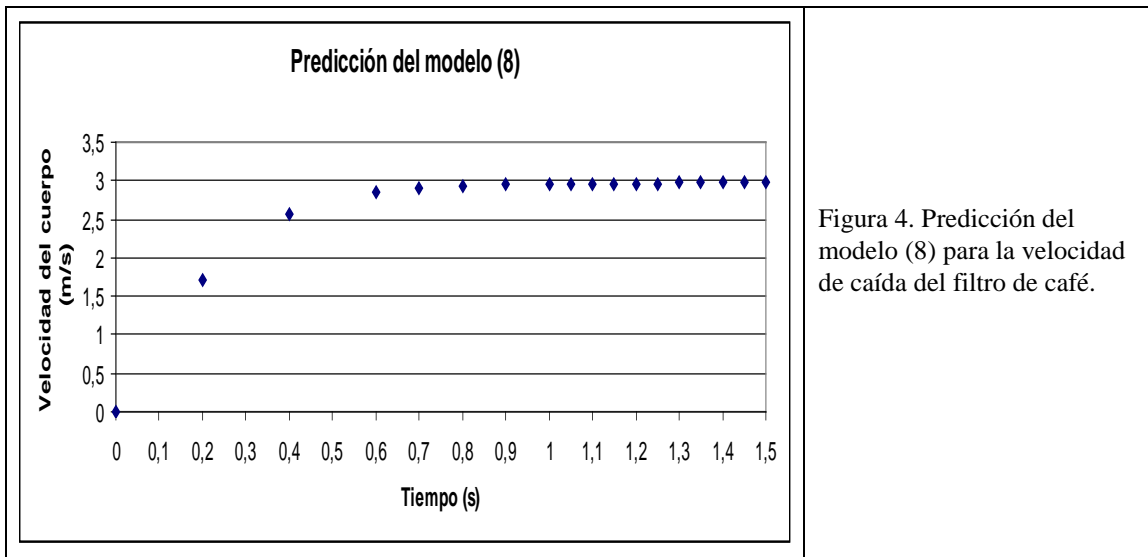
Como $(\gamma/g) = 1/v_t^2 = 1/2.97^2 = 0.11$ resulta

$$dv/ [1 - 0.11 \cdot v^2] = 9.81 \cdot dt \quad (7.b)$$

La integración de la ecuación (7.b) puede obtenerse de un sistema computacional, resultando

$$v = 2.97 \tanh(\sqrt{g} \cdot t) = 2.97 \tanh(3.13 \cdot t) \quad (8)$$

La función (8) constituye la predicción del modelo de velocidad de caída del filtro de café en el aire, suponiendo que la fuerza de arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad. Su gráfica se ilustra en la Fig. 4 para un intervalo de tiempo (0-1,5 s) (tiempo de caída del cuerpo).



Actividad 4

Validación de las predicciones del modelo con la experiencia

El gráfico de la Fig. 5 muestra la representación de las dos funciones (5) y (8) y la función experimental de la Fig. 2, para el intervalo de tiempo en donde la fuerza de fricción o de arrastre actúa claramente, es decir en el intervalo de tiempo [1,1 ; 1,5] s.

De acuerdo con estos gráficos, se concluye que la aproximación más apropiada a los resultados experimentales es que la fuerza de arrastre sea proporcional a la velocidad del cuerpo que cae dentro del fluido.

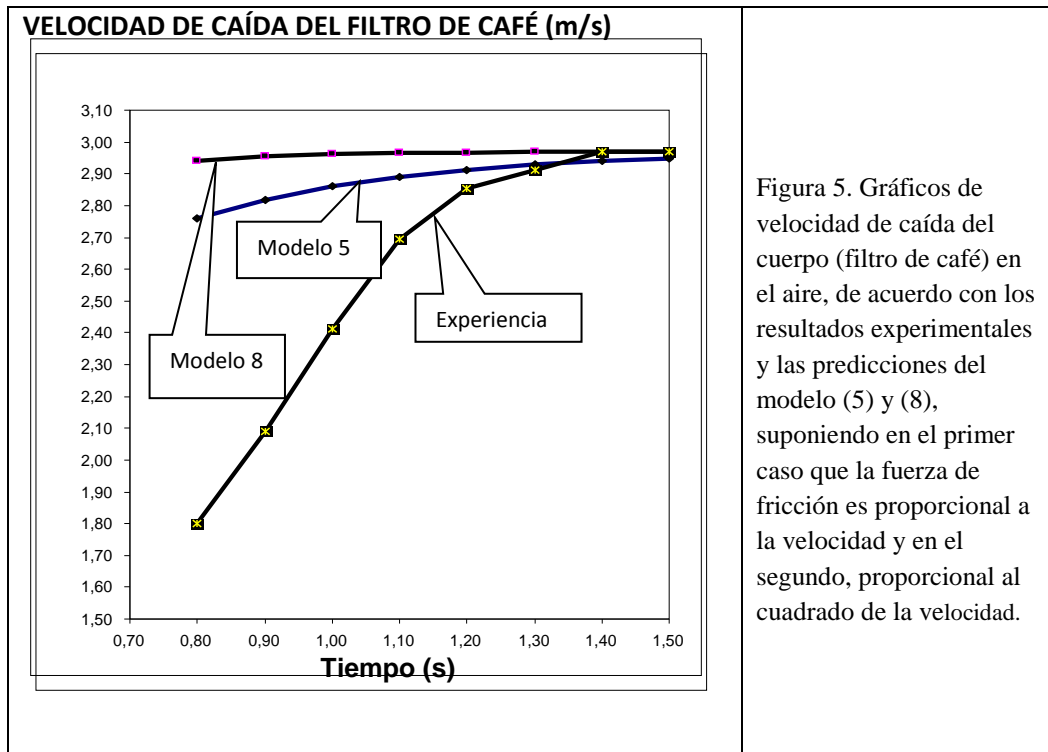


Figura 5. Gráficos de velocidad de caída del cuerpo (filtro de café) en el aire, de acuerdo con los resultados experimentales y las predicciones del modelo (5) y (8), suponiendo en el primer caso que la fuerza de fricción es proporcional a la velocidad y en el segundo, proporcional al cuadrado de la velocidad.

Modelo descriptivo de la atenuación de un haz de luz al pasar por un medio absorbente homogéneo

Se plantea un caso ilustrativo de la estructura algorítmica que conduce a su solución por medio de una función exponencial. Existen numerosos casos en la vida real que obedecen al modelo exponencial.

Actividad 1

Desarrollo de una experiencia para verificar cómo se atenúa un rayo de luz al pasar por sustancias absorbentes.

Se produce un haz de luz colimado (rayo láser) el cual pasa a través de varias placas de plexiglás coloreadas. El haz es detectado por un foto detector acoplado a una interfaz y computadora que registra los datos de intensidad de luz. A medida que se interponen placas de plexiglás de espesor constante Δx , se registra la intensidad de luz $I(x)$ con el foto detector. Se mide la intensidad $I(x)$ cada vez que se introduce una placa de plexiglás, obteniéndose los datos numéricos de la Tabla 1.

x	$I(x)$	$\Delta I = I(x+1) - I(x)$	$\frac{I(x+1) - I(x)}{I(x)}$	Exp (- 0,344·x)
0	1			1
1	0,7	-0,25	-0,357	0,71
2	0,45	-0,13	-0,289	0,50
3	0,32	-0,1	-0,313	0,36
4	0,22	-0,07	-0,318	0,25
5	0,15	-0,05	-0,333	0,18
6	0,1	-0,045	-0,450	0,13
7	0,06	-0,019	-0,345	0,09
8	0,04	-0,036		

Pdio: - 0,344

<p>Tabla 1. Cuadro de valores de intensidades luminosas medidas y valores $\frac{I(x+1) - I(x)}{I(x)}$ (cuarta columna). Quinta columna: Modelo exponencial tomando el promedio de valores de la cuarta columna</p>
--

Se analizan los datos y se reagrupan de acuerdo con las operaciones indicadas, obteniéndose la columna 4. Es decir, la relación de la pérdida de intensidad de luz

$$-\Delta I(x) = I(x+1) - I(x) \quad (1)$$

respecto de la intensidad incidente $I(x)$, por el espesor Δx ., independientemente del espesor x que ha atravesado la luz, es una constante.

$$-\Delta I/I(x) = \lambda \cdot \Delta x, \quad (2)$$

La constante λ es llamada, en este caso, constante de transparencia del plexiglás utilizado.

Actividad 2

Formulación del modelo de atenuación del haz de luz a medida que pasa por diferentes placas de idéntico espesor.

Se puede considerar espesores diferenciales de plexiglás, obteniéndose una estructura algorítmica que representa el comportamiento del sistema físico planteado

$$-\frac{dI(x)}{I(x)} = \lambda \cdot dx \quad (3)$$

con la condición inicial para $x = 0$ la intensidad de luz es $I(0) = 1$.

El método de integración de la ecuación diferencial (3) es simple, no siendo necesaria la utilización de Sistemas Algebraicos Computacionales como en casos más complejos. Se obtiene la función exponencial que predice cómo se atenúa la intensidad de luz al pasar por diferentes espesores de plexiglás

$$I(x) = I(0) \cdot e^{-\lambda \cdot x} \quad (4)$$

Actividad 3

Validación de las predicciones con los datos experimentales

La Fig. 1 muestra la representación gráfica de la predicción del modelo para diferentes placas interpuestas al haz de luz colimado, conjuntamente con los valores experimentales de intensidad de luz dados en la Tabla 1. Puede observarse un ajuste apropiado de la predicción del modelo con los valores experimentales.

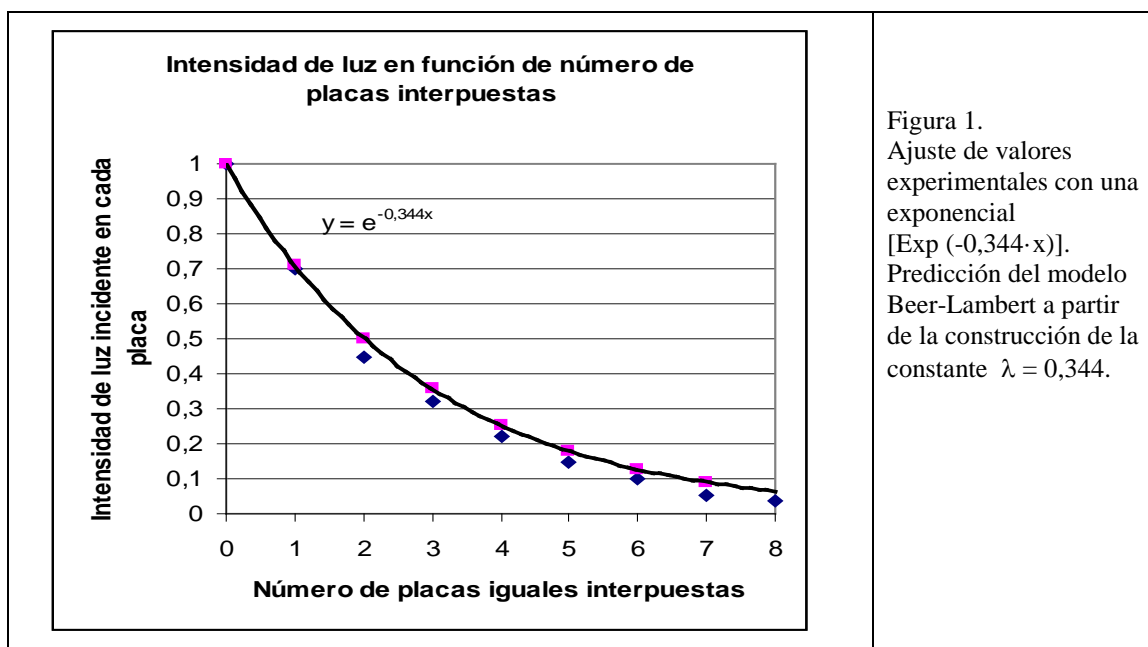


Figura 1. Ajuste de valores experimentales con una exponencial [Exp (-0,344· x)]. Predicción del modelo Beer-Lambert a partir de la construcción de la constante $\lambda = 0,344$.

Conclusiones

Es importante destacar la estructura del algoritmo (2) y la interpretación física de la constante λ . Expresa que la intensidad del haz de luz, al pasar del espesor x al

espesor $x + dx$ pierde una cantidad $- dl$, tal que el cociente $-\frac{dI(x)}{I(x)}$ es constante para

cualquier espesor x , supuesto espesores de placas dx constantes.

Esta propiedad es común a muchos fenómenos físicos, químicos y biológicos, como la desintegración radioactiva. La pérdida de actividad de un nucleído radioactivo en un intervalo de tiempo $t, t + dt$ respecto de la actividad al tiempo t es constante y define la constante λ de desintegración de dicho nucleído, que se determina experimentalmente. Lo mismo ocurre con la descarga de un capacitor a través de una resistencia, la constante $\lambda = 1/RC$ se mide experimentalmente. Cuando la función que describe el fenómeno $y(x)$ disminuye al incrementar la variable independiente Δx , su incremento Δy es negativo. En este caso, la función $y(x)$ es una función exponencial decreciente. Si por el contrario, como ocurre en el crecimiento de bacterias en función del tiempo, la función $y(x)$ aumenta al incrementar Δx , su incremento Δy es positivo. La función $y(x)$ es una función exponencial creciente. La constante λ siempre es positiva, pues es un valor experimental.

Modelo de desintegración radioactiva

Se presenta el caso de la desintegración de un nucleído radioactivo al transcurrir el tiempo.

Dada una masa de un nucleído radioactivo al tiempo t , se supone que esa masa está compuesta por $N(t)$ átomos y su actividad, que es la magnitud medible experimentalmente, es $A(t)$. La desintegración sucesiva de átomos no ocurre en intervalos de tiempo iguales. La desintegración de átomos obedece a la distribución estadística de intervalos de tiempo.

Actividad 1

Examine la siguiente situación:

Se parte de un tiempo $t = 0$, siendo N_0 el número de átomos de la muestra. Transcurrido un tiempo t_i , el número de átomos de la muestra es $N(t_i)$. En el intervalo $t_i, t_i + dt$ se desintegra (pierde la muestra) un número de átomos $-dN(t_i)$,

Para otro tiempo t_j se vuelve a hacer las mismas determinaciones. Se establece una relación similar a la del cuadro de la atenuación del haz de luz para cada tiempo t_i e intervalo $t_i, t_i + dt$

Para el tiempo t_i e intervalo $t_i, t_i + dt$: $-dN_i/N(t_i) \cdot dt$

Para el tiempo t_j e intervalo $t_j, t_j + dt$: $-dN_j/N(t_j) \cdot dt$

Y así sucesivamente.

Resulta que todos los cocientes son iguales dentro de los errores experimentales, o sea, genéricamente

$$-dN/N(t) \cdot dt = \lambda, \quad (1)$$

llamada constante de desintegración radioactiva, característica de cada nucleído, siendo su dimensión 1/s.

Actividad 2

Formulación del modelo de desintegración de una muestra radioactiva en función del tiempo

La integración de esta ecuación diferencial con la condición inicial para $t = 0$ es N_0 , para el intervalo de tiempo $0 - t$, conduce a la función

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} . \quad (2)$$

En realidad no se puede medir el número de átomos presentes de la muestra a un determinado tiempo, sí puede medirse la actividad, definida por

$$A(t) = \lambda \cdot N(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} . \quad (3)$$

La medición de actividad implica la medición de un número de átomos desintegrados por segundo. Si por cada átomo desintegrado se emite un electrón, por ejemplo, de acuerdo con una determinada geometría, es posible detectar un número de electrones en unidad de tiempo (equivalente al número de átomos desintegrados en unidad de tiempo multiplicados por el ángulo sólido que conforma el detector con la fuente radioactiva).

Actividad 3

Definición de período de un nucleído radioactivo

Se define como período T de desintegración de una muestra de un determinado nucleído radioactivo al tiempo que debe transcurrir, a partir de un tiempo arbitrario t , para que el número de átomos se reduzca a la mitad. En consecuencia, debe cumplirse

$$N(t + T) = \frac{1}{2} \cdot N(t) . \quad (4)$$

$$N(t + T) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot (t + T)} = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} \cdot e^{-\lambda \cdot T} = \frac{1}{2} \cdot N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

donde $e^{-\lambda \cdot T} = \frac{1}{2}$ equivalente a $\ln 2 = \lambda \cdot T$

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = 0,693/\lambda . \quad (5)$$

Actividad 4

Descripción de un estudio particular de desintegración radioactiva

Se describe el caso particular de la desintegración del Iodo 131. Este nucleído se utiliza para el tratamiento de tiroides, pues en esta glándula se concentra un alto porcentaje de la dosis inyectada.

Cada átomo de I- 131 se desintegra emitiendo un electrón transformándose en Xe-131 excitado. Al pasar a su estado estable, el Xe-131 emite una radiación gamma de 364 keV de energía.

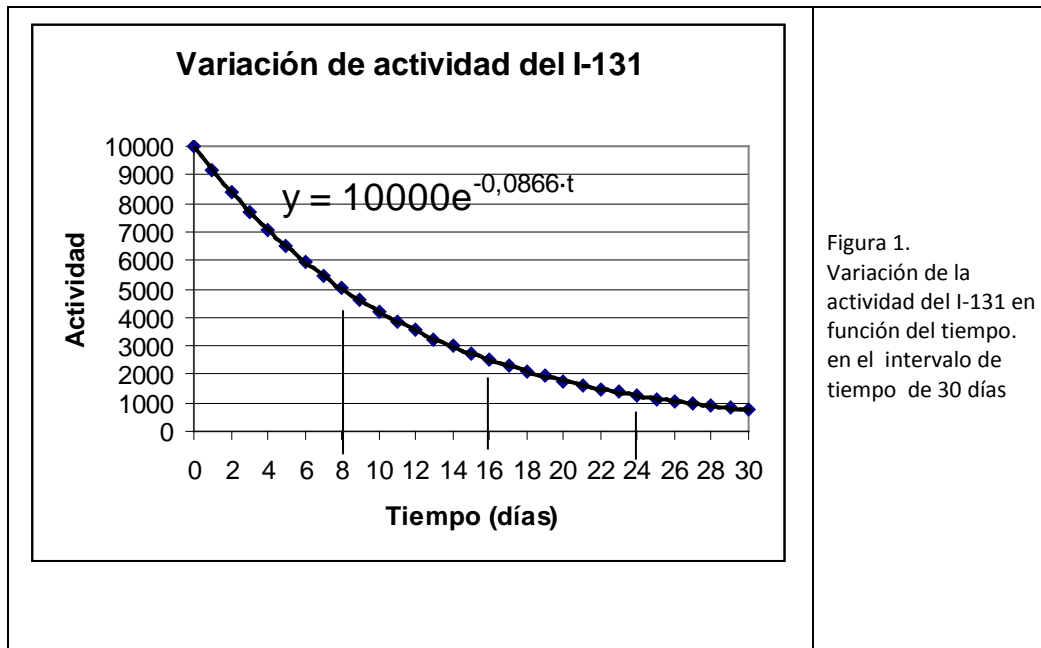
El período de desintegración del I-131 es de 8 días. Por lo tanto

$$\lambda = 0,693/8 \text{ (1/día)} = 0,0866 \text{ (1/día)} .$$

El modelo de desintegración radioactiva aplicado a este caso de período de 8 días está representado por la función actividad

$$A(t) = A_0 \cdot e^{-0.0866 \cdot t} \quad (6)$$

Se supone que la actividad A_0 medida cuando se inicia la experiencia es 10000 rayos gamma detectados por minuto. La Fig. 1 ilustra la variación de actividad del I-131 a partir de una actividad de 10000 rayos gamma detectados por minuto, durante 30 días.



Obsérvese

que cada 8 días la actividad decrece a la mitad: a los 8 días la actividad es de 5000 rayos gamma por minuto; a los 16 días es de 2500 rayos gamma por minuto y a los 24 días es de 1250 rayos gamma por minuto.

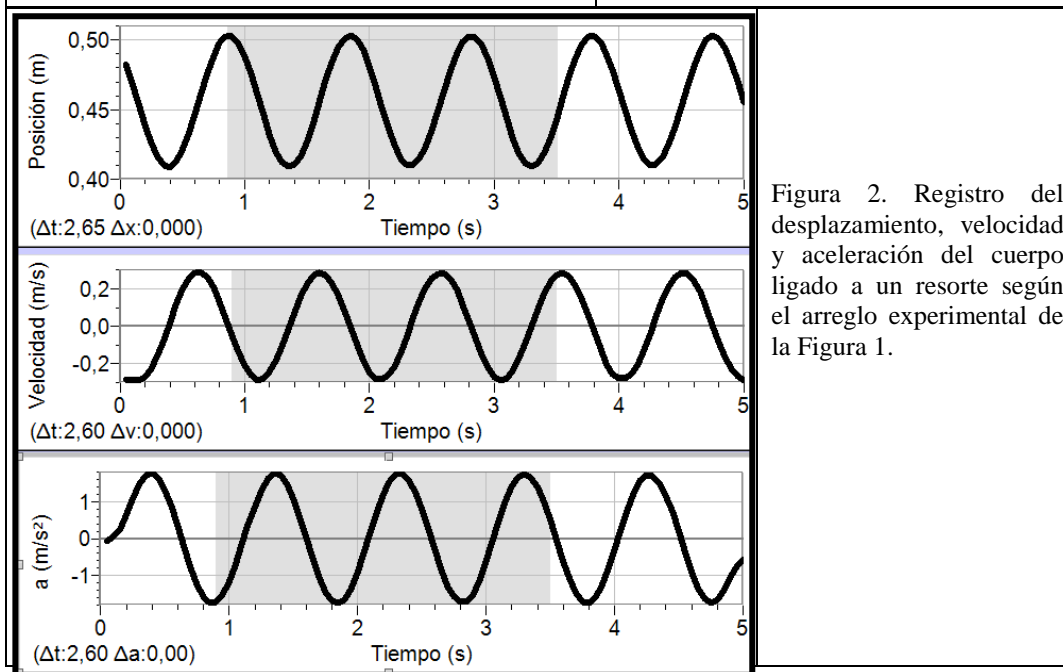
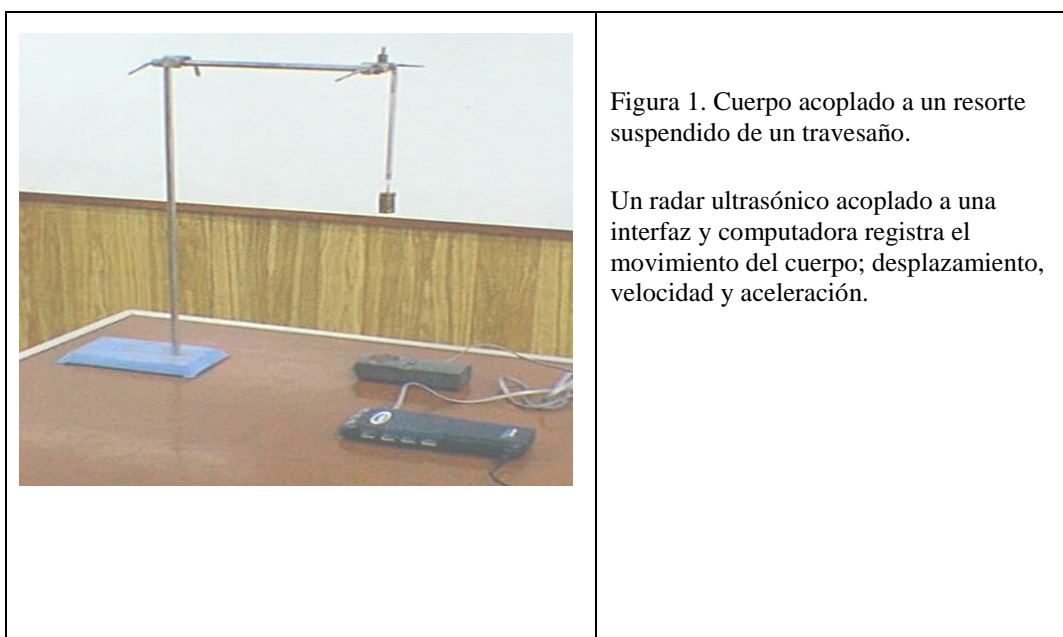
Modelo de movimiento armónico simple de un cuerpo

El modelo del oscilador armónico es reconocido como una importante herramienta matemática, presente en todo libro de matemática y física.

Actividad 1

Desarrollo de una experiencia para verificar el movimiento de un cuerpo acoplado a un resorte en uno de sus extremos, cuando el otro extremo está fijo.

Se toma un cuerpo de masa m conectado a un travesaño por medio de un resorte de constante k . Ver Fig. 1. Se estira el cuerpo hacia abajo y se lo suelta. El cuerpo adquiere un movimiento oscilatorio generado por la fuerza de restauración del resorte. La Fig. 2 muestra los registros de desplazamiento, velocidad y aceleración del cuerpo.



--	--

Actividad 2

Formulación del modelo sobre movimiento del cuerpo ligado a una resorte

Se supone que la fuerza de restauración del resorte es proporcional a la elongación y se opone al sentido del movimiento y que el rozamiento con el aire es despreciable

$$F = m \cdot a = - k \cdot x$$

Esta hipótesis se expresa matemáticamente por medio de la ecuación

$$m \cdot \frac{d^2x}{dx^2} + k \cdot x = 0 . \quad (1)$$

Se define como pulsación del movimiento a la relación entre las dos constantes que especifican el movimiento: la masa del cuerpo m y la constante de restauración del resorte k

$$\text{Pulsación } \omega = \sqrt{k/m}. \quad (2)$$

Resulta la ecuación diferencial correspondiente a un cuerpo que oscila

$$\frac{d^2x}{dx^2} + \omega^2 \cdot x = 0, \quad (3)$$

con las condiciones iniciales para $t = 0$ es $x = x_m$; $v(0) = v_0$.

La solución resulta una función armónica

$$x = x_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi), \quad (4)$$

donde x_m es la amplitud de la oscilación y φ la fase inicial constante. Ambas constantes están determinadas por las condiciones iniciales.

La constante T , denominada período del movimiento, se define como el tiempo que tarda el cuerpo en completar una oscilación. Esta constante está relacionada con la pulsación

$$\omega_0 = 2 \cdot \pi / T, \quad (5.a)$$

Se define la frecuencia del movimiento como recíproca del período

$$v = 1/T. \quad (5.b)$$

Del gráfico del movimiento se obtiene el valor experimental del período y de la amplitud máxima

$$x_m = 0,051 ; \omega_0 = 6,4 (1/s); \varphi = 0,8. \quad (6)$$

El valor de la constante $k = 10 \text{ N/m}$ y la masa del cuerpo más la del resorte es $m = 0,248 \text{ kg}$. Estos valores indican un valor para la constante $\omega_0 = 6.35 \text{ 1/s}$, similar al obtenido experimentalmente.

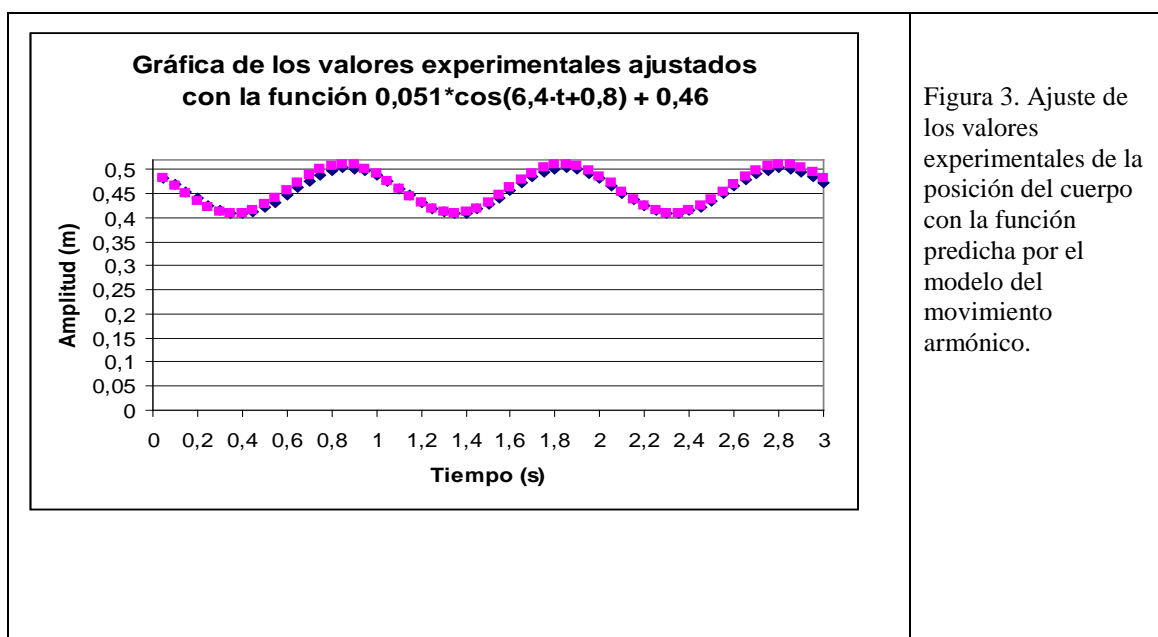
Actividad 3

Predicción del modelo con las condiciones experimentales (6) y validación del modelo con los resultados experimentales

La posición del cuerpo respecto de un origen está dada por la función

$$x = 0,051 \cdot \cos(6,35 \cdot t + 0,8). \quad (7)$$

El gráfico correspondiente se detalla en la Fig. 3 en donde se muestra el ajuste de los valores experimentales con la función (7).



Conclusiones generales

Las ecuaciones diferenciales se han tratado en variados libros de matemática, pero no se ha hecho mención, por lo general, a ningún problema real y a la experiencia.. Los textos indican cómo se integran las ecuaciones, pero no se sabe qué solución es la que resuelve el problema real planteado.

Se ha puesto de manifiesto que el enfoque multidisciplinario entre matemática y otras ciencias experimentales es un camino apropiado para la enseñanza de matemática.

Bibliografía

1] National Science Foundation. www.nsf.org/ITEST (Fecha de consulta: permanente). Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Education Issues and Legislative Options (2006) CRS Report for Congress, Order Code RL33434

[2] Successful STEM Education: A Workshop Summary. www.nap.edu/catalog/id.13230

[3] Workshop on Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) Enterprise: Measures for Innovation & Competiveness (2009), George Washington University, Washington, D.C.

[4] “The Mathematical Sciences in 2025”, Report U. S. National Academies Press, enero 2013.

[5] Remath. London Knowledge Lab. London WC1N 3QS. United Kingdom.

[6] A Framework for K-12 Science Education: Practices, Crosscutting Concepts, and Core Ideas. National Academies Press (2012). ISBN 978-0-309-21742-2.

[7] STEM Integration in K-12 Education: Status, Prospects, and an Agenda for Research (2014). National Research Council. ISBN 978-0-309-29796-7