CONGRESO IBEROAMERICANO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA, INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVEMBRO 2014

Una propuesta para la enseñanza de la geometría: de la exploración a la demostración con recursos tecnológicos.

DIDONÉ, A.; MIOTTI, A.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

Una propuesta para la enseñanza de la geometría: de la exploración a la demostración con recursos tecnológicos.

Autores:
Andrea Cecilia Didoné, María Alejandra Miotti.

En este trabajo presentamos una secuencia de actividades en las que se propone el uso de GeoGebra como un recurso muy potente para construir figuras, explorar relaciones e identificar las condiciones necesarias para que un cuadrilátero sea inscriptible.

andrea.didone@yahoo.com.ar
miottia@yahoo.com.ar

A MODO DE PRESENTACIÓN

Esta propuesta se elaboró con la intención, de brindar un recurso más, que colabore con la enseñanza de la geometría. Está compuesto por un conjunto de actividades que pueden ser resueltas, en su mayoría, por medio de recursos tecnológicos para la exploración y formulación de conjeturas, considerando los alcances y límites de dichos recursos para validar los procedimientos utilizados y los resultados obtenidos.
En el apartado donde se presenta el enunciado de cada una de las actividades se incluyen notas y comentarios, en las que se ofrece un análisis didáctico describiendo particularidades de cada una, algunas respuestas posibles de los alumnos, dificultades, alternativas de intervención docente y de gestión de la clase.
Se espera que esta propuesta sea un insumo más para el trabajo en el aula de los docentes que asuman el desafío de enseñar geometría con recursos tecnológicos.

REFLEXIONES SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA

Consideramos a la matemática como una construcción social, colectiva y a los resultados de la comunidad de matemáticos de una época, "sus productos", como productos culturales condicionados por las concepciones de la sociedad en la que emergen. Pensar la actividad matemática de este modo y como una actividad de modelización nos permite integrar distintas facetas del trabajo matemático: la resolución de problemas, las técnicas, las representaciones, las demostraciones.

Esta propuesta ofrece un conjunto de actividades que pretende involucrar a los alumnos en el desafío de resolver problemas que les permitan ser un medio para movilizar "viejos" conocimientos y que en los intentos por buscar la solución puedan construir una respuesta, estableciendo relaciones nuevas. Al respecto Brousseau (1986) afirma "El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje."

A pesar de que en los últimos años ha habido intentos por recuperar un espacio para la enseñanza de la geometría, aún sigue ausente en muchas aulas de nuestras escuelas secundarias. En nuestro país, algunos especialistas como Ana Bressan, Graciela Chemello, Gema Fioriti, Horacio Itzcovich, Carmen Sessa, entre otros, han

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

profundizado en su estudio didáctico facilitándonos genuinos fundamentos para incluirla, como así también renovados modos de pensar su enseñanza.

El estudio de las propiedades de las figuras y los cuerpos geométricos entraña mucho más que reconocerlas perceptivamente y saber sus nombres. Implica conocer, cada vez con mayor profundidad sus propiedades y poder tenerlas disponibles para resolver diversos tipos de problemas. El "modo de pensar geométrico" supone poder apoyarse en estas propiedades para poder anticipar otras no conocidas y saber que dicho resultado es el correcto porque las propiedades puestas en juego lo garantizan.

Si bien en los primeros años de la escolaridad, lo perceptivo y la experiencia cobran un lugar preponderante para poder analizar figuras y enunciar propiedades, es de esperar que en la escuela secundaria el modo de demostrar la validez de una afirmación no sea empírico, por ejemplo midiendo o dibujando, sino que se base en razonamientos deductivos. Estamos pensando que, la experiencia geométrica de los alumnos a lo largo de la escolaridad, pueda recorrer un camino que comience con un tipo de trabajo geométrico empírico, intuitivo y de la observación para avanzar hacia un trabajo de tipo argumentativo, donde los cuerpos y las figuras no pertenecen ya a un espacio físico sino a un espacio matematizado. En este espacio las validaciones no podrán ser constatadas "observando" o "midiendo", sino apoyándose en las propiedades conocidas de esos objetos geométricos.

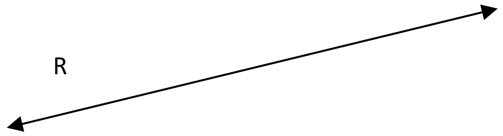
Ahora bien, ¿qué situaciones proponer a los alumnos para que sean un "factor de desequilibrios" y movilicen los conocimientos disponibles para producir otros nuevos? Carmen Sessa describe algunas características que debiera reunir una situación para considerarse un problema. En "Acerca de la enseñanza de la geometría" afirma que para que una situación sea un problema geométrico para los alumnos, es necesario que:
• "Implique un cierto nivel de dificultad, presente un desafío, tenga algo de "novedad" para los alumnos.
• Exija usar los conocimientos previos, pero que estos no sean totalmente suficientes.
• Para resolverlos, se deban poner en juego las propiedades de los objetos geométricos.
• El problema ponga en interacción al alumno con objetos que ya no pertenecen al espacio físico, sino a un espacio conceptualizado representado por las figuras y los cuerpos.
• En la resolución de problemas, los dibujos no permitan arribar a la respuesta por simple constatación sensorial.
• La validación de la respuesta dada al problema –es decir, la decisión del alumno acerca de la verdad o falsedad de la respuesta– no se establezca empíricamente, sino que se apoye en las propiedades de los objetos geométricos; aunque en algunas instancias exploratorias, se puedan aceptar otros modos de corroborar.
• Las argumentaciones a partir de las propiedades conocidas de los cuerpos y figuras produzcan un nuevo conocimiento acerca de estos últimos." (Sessa, C., 1998)

Por ejemplo, las construcciones son fuente de interesantes problemas geométricos, ya que son actividades en las que es posible que las propiedades conocidas y la exploración de otras, surjan como respuesta al problema. En ellas es necesario considerar que la utilización de algunos instrumentos favorece o moviliza el uso de algunas propiedades más que otras y que esto puede ser una decisión del docente según sus intenciones de enseñanza.

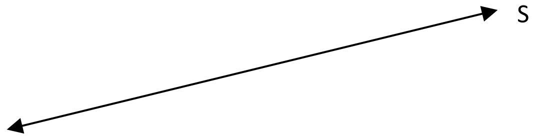
Veamos, en el siguiente ejemplo, cómo la restricción de los instrumentos geométricos a emplear pone en juego propiedades diferentes de las rectas paralelas:

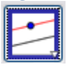
a) Con **regla y escuadra** traza una recta paralela a la recta dada:

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254



b) Con **compás y regla no graduada** traza una recta paralela a la siguiente:



c) Con Geogebra[1] dibuja dos rectas paralelas, sin usar la herramienta **Rectas Paralelas**  , de manera que al mover[2] una de ellas, se mueva la otra y sigan siendo paralelas.

En cada uno de estos ítems, la construcción solicitada es la misma: "trazar rectas paralelas", pero los conocimientos que se movilizan para lograr este objetivo, con la restricción del recurso solicitado, podrían ser diferentes. El instrumento geométrico empleado (regla, compás, escuadra) sería, en este caso, una variable didáctica[3] posible de administrar por el docente en función de los conocimientos que desea que los alumnos pongan en juego en cada caso.

En el caso a) al utilizar regla y escuadra para trazar rectas paralelas, la propiedad puesta en juego es: *Si dos rectas son perpendiculares a una tercera, son paralelas entre sí*. Tal vez el alumno no sepa cómo expresar esta propiedad, sino que su conocimiento se basa en la experiencia de colocar la regla y la escuadra en determinada posición para poder trazar rectas paralelas. Es fundamental que estas ideas se hagan explícitas, será parte del trabajo del docente gestionar un espacio de la clase que favorezca la reflexión para que este conocimiento pueda ser enunciado.

En el caso b) los conocimientos que se movilizan son otros. Aquí para trazar una recta paralela, es necesario apelar, aunque sea intuitivamente, a la noción de distancia y pensar que: *Una recta paralela a una dada es el lugar geométrico de todos los puntos que están a igual distancia de esta última*. De esta manera es posible con el compás encontrar al menos dos puntos que estén a igual distancia de algún punto de la recta para trazar la recta que pasa por ellos y que resultará paralela a la dada.

El uso de la tecnología, en particular en este caso el uso de Geogebra, genera en muchos alumnos un interés particular, que los lleva a investigar cómo funciona, cuáles son las posibilidades que brinda esa herramienta y de qué manera facilita la tarea solicitada.

Una cuestión interesante a tener en cuenta es que este software permite que el docente pueda restringir el uso de determinadas herramientas de Geogebra. Si quisiéramos que los alumnos las exploren, podríamos dejar disponible el ícono

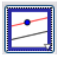
---

[1] Geogebra es un software libre de geometría dinámica, basado en una filosofía altruista: los programas se elaboran para compartirlos. http://www.geogebra.org/cms/es/

[2] Si bien entendemos que para que una construcción con Geogebra sea tal, requiere que al "mover" alguno de los objetos libres, no se pierdan las características de las figuras en juego, es decir en este caso que las rectas sigan siendo paralelas, consideramos necesario aclararlo para los estudiantes que por primera vez utilicen este software.

[3] Ciertas características de una situación de enseñanza pueden ser modificadas por el docente a fin de cambiar las estrategias de resolución que pueden utilizar los alumnos. De este modo, también cambian los conocimientos que se ponen en juego. Estas características variables se denominan <u>variables didácticas</u>.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

Rectas Paralelas  en este caso basta con que el estudiante encuentre la herramienta y explore el modo de usarla. Los posibles pasos podrían ser: en primer lugar trazar una recta, determinar un punto exterior a la misma y seleccionar la herramienta Rectas paralelas “tocando” la recta y el punto creado. En cambio si nos interesara movilizar otros conocimientos, como la noción de equidistancia o propiedades de rectas perpendiculares y paralelas, sería necesario restringir el uso de esta herramienta, cuestión que Geogebra permite realizar con facilidad ocultándola provisoriamente.

UNA PROPUESTA PARA ABORDAR LOS CUADRILÁTEROS INSCRIPTOS EN EL AULA

A continuación presentamos una secuencia de actividades en la que se propone el uso de Geogebra como una forma de entrar en el tipo de trabajo geométrico descripto. Se apunta a la exploración y la formulación de conjeturas acerca de figuras inscriptas, en particular de cuadriláteros, en una circunferencia.

Las actividades que se proponen están pensadas de manera que los alumnos puedan recuperar propiedades de los triángulos: de sus ángulos interiores, de sus lados y las relaciones entre sus lados y ángulos (por ejemplo: *A lados iguales se oponen ángulos iguales*) y algunas nociones de semejanza, para utilizarlas en la resolución de diversos problemas que permitan establecer nuevas relaciones y propiedades de los cuadriláteros.

En algunas de ellas, es posible realizar construcciones para explorar, estudiar figuras y tomar algunas decisiones en función de resolver la situación dada. El uso de Geogebra agiliza estas construcciones y permite analizar una variedad de casos con tan solo mover alguno de los elementos libres.

Sin embargo, cabe aclarar que *dibujar* y *construir* no es lo mismo. Con Geogebra *construir* implica que al reproducir una figura y aplicar el test de arrastre sobre alguno de sus elementos libres, la figura no pierde sus propiedades; es decir si construimos un paralelogramo y elegimos mover a uno de sus vértices, se modificarán seguramente la medida de sus lados, pero no la condición de paralelismo de los mismos. Es frecuente que las primeras construcciones con Geogebra que realicen los alumnos sean *dibujos* y no *construcciones* dado que en general comienzan reproduciendo figuras sin tener en cuenta las propiedades que las definen.

La organización de la clase y el modo en que los alumnos resuelvan las actividades es de esperar que apunte a crear las condiciones más favorables para que sea posible la producción y el intercambio de ideas.

Las actividades de la secuencia

Esta secuencia puede comenzar con la Actividad 0, una situación de exploración entre ángulos que comparten un mismo arco de circunferencia. Es una actividad netamente empírica cuya finalidad es la de familiarizar al estudiante con el uso del programa Geogebra y recuperar algunas relaciones entre ángulos que ya fueron estudiadas. En ella se propone el uso de Geogebra para facilitar dicha exploración. La intención es que al aplicar el test de arrastre y mover los puntos puedan enunciar algunas conclusiones sobre los ángulos trazados en la circunferencia. En caso de que los alumnos no hayan trabajado con Geogebra aún, podría ser la oportunidad para presentarlo y explorar sus herramientas básicas.

Si el docente considera que no es necesaria esta actividad exploratoria ya sea para familiarizarse con Geogebra o para recuperar las relaciones entre ángulos centrales y

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

ángulos inscriptos en una circunferencia porque sus alumnos las recuerdan, podría comenzar la secuencia directamente con la Actividad 1.

En la Actividad 1 se propone la exploración de figuras y se avanza en un trabajo del tipo argumentativo que requiere el procedimiento de encadenar relaciones ya conocidas para deducir otras propiedades y relaciones. Esta situación se enmarca en la necesidad de introducirse en un pensar geométrico que privilegie la elaboración de conjeturas buscando abrir un camino hacia una validación mediante “pruebas intelectuales” (Balacheff, 1987), es decir, poniendo en juego propiedades de los objetos geométricos.

En las Actividades 2 y 3 los alumnos deberán realizar construcciones interpretando las indicaciones dadas en cada caso. Después de una etapa exploratoria con Geogebra, que implica mover los puntos libres de la circunferencia para obtener una variedad de casos para estudiar, se pasará a la búsqueda de razones por las cuales es posible afirmar que el cuadrilátero obtenido es un rectángulo. Si bien desde lo perceptivo es posible visualizar que, si la construcción está bien realizada, la forma del cuadrilátero no varía al mover los objetos libres, lo que el software no dice es por qué siempre que se mueven estos objetos la figura obtenida sigue siendo un rectángulo. Esta búsqueda de razones será parte del trabajo argumentativo requerido. Es necesario generar en las clases las condiciones para que el discurso forme parte de una variable a considerar, de manera que el estudiante asuma la responsabilidad de aprender dando razones válidas sobre las afirmaciones que enuncia.

La Actividad 4 invita a explorar libremente distintas ubicaciones para los puntos A, B y C, puntos de la circunferencia y en estos intentos encontrar las condiciones para que P determine algunos cuadriláteros particulares. Posiblemente, en estos ensayos los alumnos encuentren que los puntos A, B y C no pueden ser cualquiera y que también existen determinadas condiciones para que sea posible encontrar el cuarto vértice de manera que el cuadrilátero sea rectángulo, trapecio o rombo.

La Actividad 5 propone analizar el razonamiento empleado por otro estudiante al intentar demostrar una propiedad de los cuadriláteros inscriptibles. Esta actividad requiere un esfuerzo particular de análisis al tener que decidir sobre la consistencia de los razonamientos expuestos.

La Actividad 6 retoma lo trabajado en las actividades anteriores y permite resignificar las propiedades de los ángulos inscriptos en una circunferencia, las congruencias de ángulos que abarcan el mismo arco, y la condición que requiere un cuadrilátero para ser inscripto.

Las Actividades 7 y 8 apuntan a que los alumnos elaboren pruebas intelectuales, es decir que puedan justificar la verdad de la afirmación tomando distancia de la acción. La demostración de la semejanza de los triángulos requerirá de estas pruebas intelectuales.

La Actividad 9 pretende hacer una mirada para recapitular lo aprendido hasta el momento de manera que pueda ser reutilizado. La tarea de argumentar sobre la verdad o falsedad de las afirmaciones invita a los alumnos a volver sobre las actividades realizadas favoreciendo el reconocimiento de las propiedades involucradas, es decir, promueve un trabajo sobre los objetos geométricos que se ponen en juego.

En este recorrido de actividades se adoptó la decisión de partir de una fase exploratoria con la posibilidad de utilizar recursos tecnológicos, aunque no exclusivamente, para reconocer propiedades de las figuras y validarlas mediante pruebas intelectuales. Recordemos que para que los estudiantes avancen hacia la elaboración de este tipo de pruebas es necesario que el docente acompañe

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

generando condiciones desafiantes que avancen en la necesidad de usar las propiedades para justificar.

Presentación de las actividades y comentarios

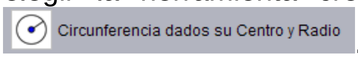
Actividad 0: Explorar e identificar relaciones

En una circunferencia, de radio igual a 4 cm y centro O, marquen un punto P. Dibujen un ángulo con vértice en P, de manera que uno de los lados del ángulo corte a la circunferencia en un punto A y el otro en un punto B. Ahora construye un ángulo cuyo vértice sea O y sus lados pasen por los puntos A y B.

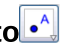
a) Existe una la relación entre la amplitud del ángulo APB, al que llamaremos inscripto y el AOB, al que llamaremos central, que no contiene a P. Encuentren y enuncien esta relación.

b) La relación enunciada en el ítem a) ¿Se mantiene si cambia el valor del radio de la circunferencia? ¿Cómo pueden explicarlo?

c) ¿Seguirá siendo válida la relación enunciada en el ítem a) si el punto P no pertenece a la circunferencia?

En la Actividad 0 los alumnos deberán realizar una construcción siguiendo indicaciones dadas para poder establecer la relación entre el ángulo inscripto y central. Realizar esta actividad con Geogebra facilita la etapa exploratoria, en la que se podrá elegir la herramienta crear una **circunferencia dados su centro y su radio** 

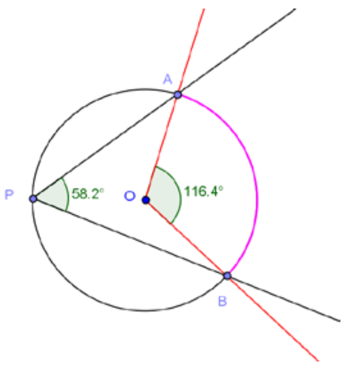
.Esta herramienta permite indicar un punto que será el centro y determinar la medida del radio. Una vez creada la circunferencia se puede utilizar la herramienta **renombrar** para llamar O al centro de la circunferencia; por defecto el programa coloca el nombre “A”.

Luego será necesario elegir la herramienta **Nuevo Punto**  para crear un punto sobre la circunferencia, **renombrarlo** como “P” y crear los puntos A y B de la misma manera.

Se sugiere en este momento analizar con los alumnos la herramienta más conveniente para construir los lados del ángulo APB; si es la de crear un segmento o una semirrecta. Si se elige crear **semirrecta**  para hacer los lados del ángulo APB y el AOB podría cambiarse el color de los mismos para mayor impacto visual.

Para poder establecer la relación entre los ángulos que se pide en la parte a), sería necesario explorar el software y encontrar el modo de medir la amplitud de esos ángulos. El programa cuenta con la herramienta **ángulo** , que ofrece esta posibilidad, como se muestra en la siguiente figura:

La intención de proponer la construcción de una circunferencia de radio libre (parte b)

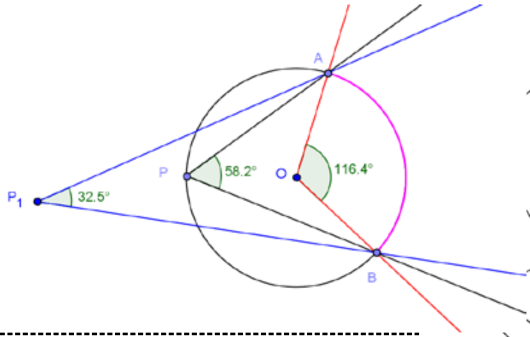


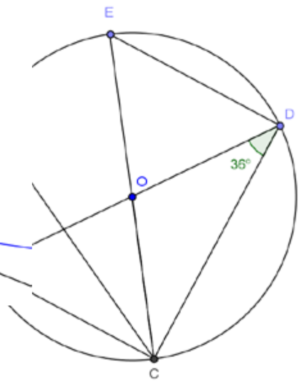
de esta actividad) es la de permitir a los estudiantes analizar que la relación entre en los ángulos inscriptos y centrales que abarcan el mismo arco de circunferencia, es

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

independiente del radio de la misma. Los alumnos podrán visualizar que cambia el tamaño de la circunferencia pero la relación permanece constante.
Es posible resolver esta actividad sin emplear Geogebra y realizar la construcción con lápiz y papel. En este caso el alumno, posiblemente, realizará una construcción diferente cada vez que quiera modificar el radio de la circunferencia y medir cada uno de los ángulos para analizar si la relación se mantiene o se modifica.

Para responder a la parte c) se debe crear otro punto no perteneciente a la circunferencia y determinar los ángulos APB y AOB cuyos los lados abarcan el mismo arco de circunferencia, como se muestra en el siguiente dibujo: Notemos que se consideró un punto P_1 exterior a la circunferencia y que también puede considerarse un punto interior.





Actividad 1: Averiguar medidas sin medir

A, B, C, D, E son puntos de la circunferencia de centro O y los puntos BDC forman un ángulo de 36°. Como muestra la figura.

a) Sin medir, determinen la amplitud de cada uno de los siguientes ángulos COB, DEC, CAB y DCB.

b) Para que exploren con Geogebra: ¿Será cierto que la suma de los ángulos DEC y BDC es siempre un recto? Justifiquen.

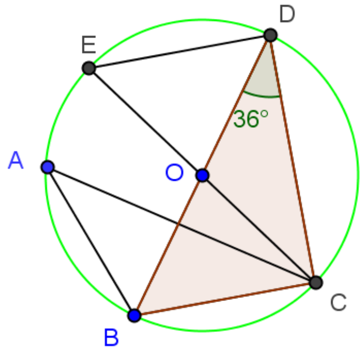
c) Si varía el valor del ángulo BDC, ¿se modifica la amplitud de algún otro ángulo? Justifiquen.

Para resolver la parte a) se espera que los alumnos puedan apoyarse en algunas relaciones y propiedades entre ángulos para averiguar las amplitudes solicitadas, por ejemplo, la referida a la suma de los ángulos interiores de un triángulo, o que identifiquen ángulos adyacentes, o que establezcan relaciones entre ángulos centrales e inscriptos. Es posible que en esta parte de la actividad surjan diferentes formas de averiguar la medida de los ángulos pedidos. Será interesante que se dedique un espacio de la clase a la socialización de estas distintas maneras de resolución, de este intercambio y de las explicitaciones de los procedimientos empleados surgirá la posibilidad de establecer otras relaciones que algunos alumnos tal vez no hubieran advertido en el momento de la resolución individual.

A continuación presentamos algunas explicaciones que podrían ofrecer los estudiantes al resolver la actividad 1. En cada una de ellas los conocimientos puestos en juego son bien diferentes, la elección de uno u otro dependerá de los conocimientos de los que dispongan los alumnos.

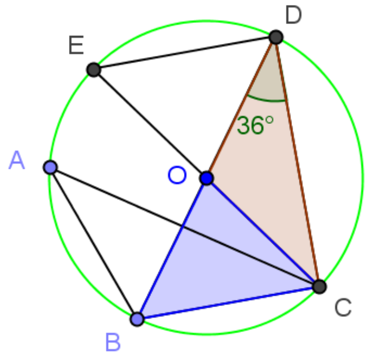
Caso 1: Se apoya en relaciones entre ángulos inscripto y central, ángulos adyacentes y suma de ángulos interiores de un triángulo.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254



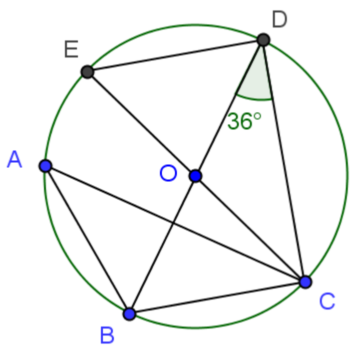
1º - Averigüé COB por ser ángulo central
del ángulo inscripto BDC.
2º - Averigüé DOC por ser ángulo adyacente al COB
3º - Averigüé DBC por ser ángulo inscripto
del ángulo central DOC
4º - Averiguo DCB por ser ángulo interior del triángulo DCB

Caso 2: Utiliza propiedades de los ángulos interiores y exteriores de un triángulo.



1º - Considero el triángulo DOC isósceles CO=OD
2º - Averiguo todos los ángulos del triángulo DOC
3º - Averiguo el ángulo COB por ser ángulo exterior
del triángulo DOC
4º - Averiguo los ángulos del triángulo isósceles COB
5º - Calculo DCB como suma los ángulos DCO y OCB

Caso 3: Considera relaciones entre ángulo inscripto y central.



1º - COB = 2 . CDB, porque COB es ángulo central del
ángulo inscripto CDB.
2º - DOE = COB por opuestos por el vértice
3º - DOC = (360º - 2. COB) : 2
4º - DCE = EOD : 2 por la relación de ángulo inscripto
y central que abarcan el mismo arco de circunferencia.
5º - EOB = DOC por opuestos por el vértice
6º - ECB = EOB : 2 por la relación de ángulos inscripto y central
7º - DCB = DCE + ECB

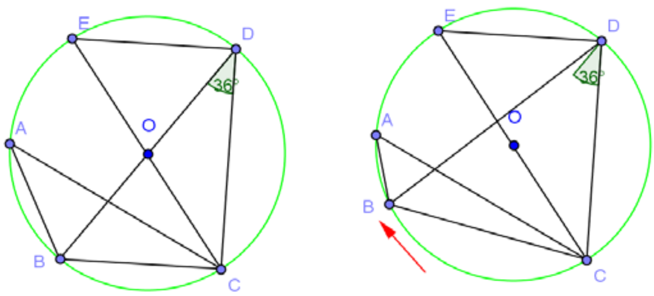
Si fuera de interés del docente hacer evidente algunas propiedades no utilizadas por los alumnos, como por ejemplo las relaciones entre ángulos centrales e inscriptos, y no hubieran surgido, podría proponerse a toda la clase analizar estas explicaciones dadas por otros estudiantes. En este caso el tipo de tarea cambia, ya que la parte a) de esta actividad solamente requiere averiguar la medida de determinados ángulos y analizar procedimientos de otros exige un nivel de razonamiento más complejo.

La parte b) requiere del copiado de la figura con modelo presente, cada alumno deberá tenerla visible, podrá ser entregada en una fotocopia o ser expuesta con un

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

proyector de imágenes o en el pizarrón, otra opción podría ser pegar la imagen en la vista gráfica del Geogebra.

Con Geogebra debe cuidarse la diferencia entre *dibujar* y *construir, como se mencionó anteriormente*. Para poder advertir esta diferencia el docente podrá proponer a sus alumnos usar la herramienta **elige y mueve**  un punto, por ejemplo el B, y las condiciones iniciales no deberían cambiar, como se muestra más abajo donde al mover B el segmento BD deja de ser diámetro. Esta es una condición inicial que no debería modificarse al elegir un punto y moverlo.



La pregunta que se plantea en b) invita a explorar las relaciones entre dos ángulos, en particular el DEC y BDC. Podría ser que en principio los alumnos tomen a esta relación como un caso particular y dependiente del valor del ángulo dado, es decir que el valor de la suma dependa de la medida dada del ángulo BDC. Al haber realizado la construcción con Geogebra es posible rápidamente ver que esta relación no depende de la medida del ángulo dado. Ahora bien, la cuestión consiste en encontrar razones por las cuáles esta suma permanece invariante al cambiar la medida del ángulo BDC. Esta cuestión es la que se plantea en la parte c) en el que se invita a explorar qué ángulos son los que se modifican al variar la amplitud de BDC. Para averiguar esto será necesario considerar otros elementos de la figura construida, como son los arcos que abarcan estos ángulos DEC y BDC. Al advertir que entre estos dos ángulos se abarca un semicírculo, es posible relacionar este arco con el ángulo central que abarca el mismo arco, el BOD, ángulo llano. Conociendo la relación entre ángulo central y ángulo inscripto se puede concluir que: siempre que entre los dos ángulos dados se abarque una semicircunferencia entonces la suma de ambos será de 90^0 por corresponderse a un central de 180^0.

Actividad 2: Explorar para encontrar explicaciones

Utilizando Geogebra tracen un segmento AC. Marquen su punto medio O y tracen la circunferencia de centro O que pase por A. Marquen un punto B en la circunferencia y tracen la recta BO, luego marquen el punto D en la intersección entre la recta y la circunferencia. Construyan el cuadrilátero ABCD. ¿Es cierto que **siempre** el cuadrilátero obtenido es un rectángulo? Justifiquen su respuesta.

Esta actividad requiere, en principio, de la interpretación de un instructivo para lograr la construcción que permitirá explorar las figuras que cumplen con las condiciones enunciadas. Al aplicar el test de arrastre sobre los vértices libres de este cuadrilátero se podrá advertir que en todos los casos se trata de rectángulos. El problema consiste ahora en encontrar razones para esto. Los alumnos necesitarán apoyarse en el conocimiento que tengan sobre las propiedades del rectángulo.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

Podrían, por ejemplo, darse cuenta que los segmentos AC y BD son congruentes por ser diámetros de la circunferencia con centro en O y a la vez son diagonales del rectángulo. Por lo tanto: Si un cuadrilátero tiene diagonales congruentes que se cortan en su punto medio, se puede afirmar que es un rectángulo.

En otro caso, podría ser que los alumnos identifiquen ángulos inscriptos y centrales, observando que, por ejemplo, el ángulo inscripto ABC abarca una cuerda correspondiente al diámetro AC, por lo tanto, al corresponderse a un central llano, es recto. De este modo se retoman cuestiones que seguramente surgieron al resolver la actividad anterior.

Actividad 3: Construir y establecer relaciones

a) Construyan un triángulo APB donde el ángulo APB sea recto.

b) Tracen la mediana PO del triángulo

c) ¿Qué relación existe entre los ángulos OAP y OPA? ¿Y entre OPB y OBP?

d) Marquen el punto C tal que APBC sea un rectángulo. Justifiquen

e) ¿Es cierto que los vértices del rectángulo APBC pertenecen a una misma circunferencia? Justifiquen.

Para explicar por qué los vértices del rectángulo APBC pertenecen a una misma circunferencia, será necesario haber explicitado antes las razones por la cuáles los ángulos OAP y OPA, OPB y OBP son congruentes.

Podría ser que los alumnos hubieran notado esta igualdad entre los ángulos al haber realizado mediciones con Geogebra. Es necesario discutir con ellos que esta relación de igualdad se obtuvo por propiedades de los triángulos isósceles que quedan determinados, cuestión necesaria para poder afirmar que todos esos segmentos son radios de la circunferencia de centro O.

También se puede verificar que los vértices del rectángulo pertenecen a una misma circunferencia teniendo en cuenta las propiedades de las diagonales del rectángulo. Al ser iguales los segmentos AO, PO, OC y OB, podemos pensar en ellos como radios de la circunferencia de centro O. Es decir los puntos A, B, C y P equidistan del centro O.

Actividad 4: Producir construcciones para encontrar condiciones.

Dados 3 puntos A, B y C de una circunferencia, ¿es posible encontrar siempre un punto P de manera que…

a) … ABCP sea rectángulo?

b) … ABCP sea trapecio?

c) … ABCP sea rombo?

d) Enuncien las condiciones que debe cumplir P en cada caso.

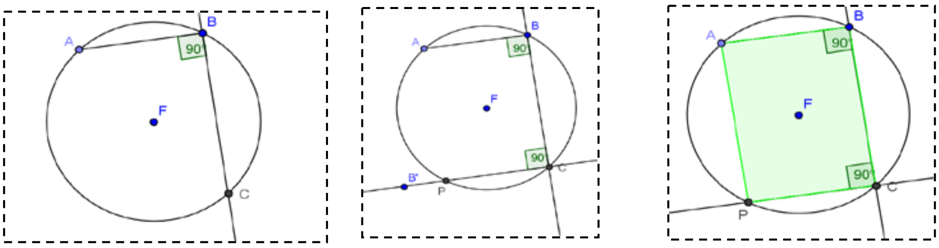
En esta actividad, a diferencia de las anteriores, no se dan las condiciones de construcción del cuadrilátero, sino que el alumno debe pensarlas teniendo en cuenta las propiedades de cada uno de ellos.

En principio es necesario comenzar a estudiar dónde puedan encontrarse esos tres puntos que vienen dados: A, B y C.

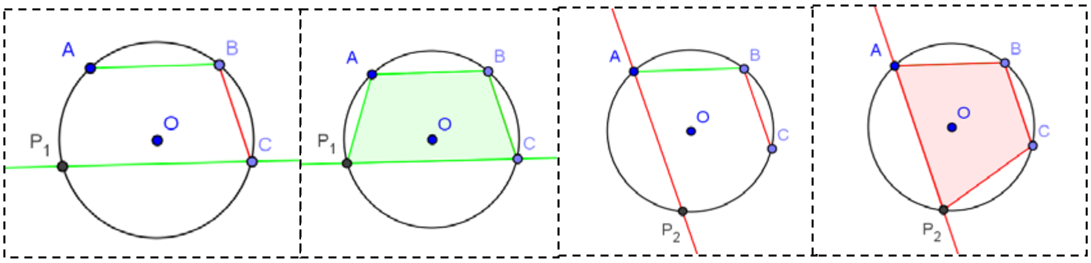
Para el ítem a), los estudiantes podrían pensar que, como el cuadrilátero debe ser un rectángulo, entonces debe tener ángulos rectos en cuyo caso ABC debe ser recto como así también los restantes ángulos. Entonces, ¿cómo ubicar estos tres vértices? Será necesario aquí recuperar la idea de que si el ángulo inscripto es recto, entonces abarca una cuerda correspondiente a un diámetro, luego AC debe ser diámetro. Es

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

posible entonces recuperando esta idea y luego de haber determinado el ángulo recto ABC, encontrar el cuarto vértice buscado para que el ABCP sea rectángulo.



Ahora bien, el ítem b) agrega una variante, ya que A, B y C pueden ser cualquier terna de puntos de la circunferencia, pero para que determinen un trapecio es necesario que tenga al menos un par de lados paralelos. Esta cuestión habilita a encontrar dos posibles puntos P que cumplan con esa condición. Podría ser que AB//CP o que BC//AP, entonces tenemos dos soluciones posibles. También puede suceder que los alumnos solo encontraran una solución y entendieran que el problema queda resuelto encontrando esa única solución. En ese caso, sería necesario un espacio de la clase para compartir los distintos trapecios hallados. Si ningún estudiante hubiera advertido que es posible obtener dos trapecios diferentes según qué lados son los que se eligen como paralelos, sería interesante que el docente instale la pregunta sobre esta cuestión, habilitando el espacio compartido de la clase para seguir estudiando estas figuras y buscando razones para estar seguros de que son solo esas y no existen otras más.



El último ítem de esta actividad instala otra cuestión bien diferente. ¿Cómo encontrar un rombo inscripto en una circunferencia? ¿Es esto posible? Podría ser que los alumnos comiencen por explorar las posibilidades para A, B y C y en los intento por lograr la equidistancia para que determinen lados congruentes, adviertan que AC debe ser diámetro, en cuyo caso, recuperando las ideas anteriores, el ABC debería ser recto. ¿Existen rombos con ángulos rectos? ¿Qué sucede si un rombo tiene un ángulo recto? ¿Cómo resultan los restantes? Todas estas cuestiones, que pueden surgir de los intentos por encontrar un rombo inscripto, son interesantes de analizar con toda la clase. Pensamos que esta situación permite además recuperar la clasificación inclusiva de los cuadriláteros. Un docente advertido de estas cuestiones sabrá retomar las ideas vertidas en el diálogo con los alumnos para que encuentren razones para estar seguros de que el único rombo posible de inscribir en una circunferencia es el cuadrado.

Actividad 5: Interpretar y decidir

Existe una propiedad que dice que: *Un cuadrilátero es inscriptible si la suma de un par de ángulos opuestos es 180°.*

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

Analiza lo que afirmaron dos alumnos al intentar la demostración y decide si estás de acuerdo con alguno de ellos, explica por qué estás de acuerdo o por qué no.

Gonzalo: “Si la suma de un par de ángulos opuestos es 180°, entonces la suma del otro par de ángulos también tiene que ser 180°porque la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°.”

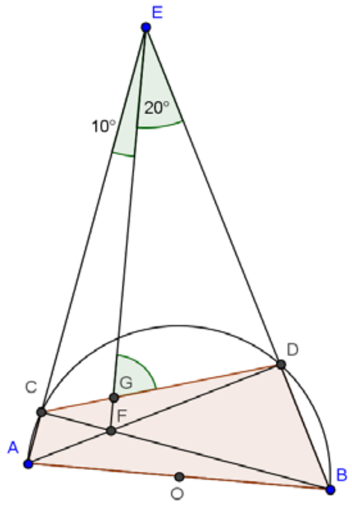
Clara: “Yo consideré, sin medir, que los arcos de los ángulos opuestos de cualquier cuadrilátero inscripto, abarcan toda la circunferencia”.

Interpretar y decidir sobre el razonamiento de otro, requiere como dijimos, de un doble esfuerzo. Por un lado interpretar las razones por las cuáles se afirma lo expuesto, analizando la veracidad de dichas afirmaciones, pero además es necesario estudiar la validez del razonamiento, es decir, ¿son suficientes las razones para justificar la propiedad enunciada?

Por ejemplo, si bien el razonamiento de Gonzalo es correcto, no es suficiente para justificar que, si la suma de los ángulos opuestos es 180°, entonces el cuadrilátero es inscriptible. En cambio Clara aporta alguna idea más referida a los arcos que abarcan estos ángulos opuestos, pero su razonamiento es incompleto, ¿por qué? ¿Cómo trabajar esta cuestión con los alumnos? Resultaría adecuado invitar al análisis con preguntas del tipo: ¿Qué otra cuestión referida a esos ángulos inscriptos podrían resultarnos de interés para afirmar que si esta condición se da entonces podemos asegurar que el cuadrilátero es inscriptible? Como hemos dicho en otras oportunidades, solo un trabajo sostenido del docente que entienda que es necesario este debate con los alumnos y que permita que la palabra de unos y otros vaya hilando los razonamientos de cada uno, podrá reservar este espacio de la clase para ir avanzando en el camino hacia la demostración de manera que todos puedan vivir la experiencia de ir entrando en este modo de argumentación.

Actividad 6: Recuperar relaciones estudiadas

Encuentren la amplitud del ángulo EGD sin medirlo, sabiendo que ABDC es un cuadrilátero inscripto en una semicircunferencia que el ángulo CEG= 10°, y GED=20°.



Esta actividad plantea un desafío diferente a las anteriores al no requerir la construcción en Geogebra. El desafío consiste en “ver” circunferencias aunque estas no se encuentren trazadas, a partir de reconocer las condiciones de un cuadrilátero inscriptible.

Si esto no sucediera podría ser que el docente realice algunas puestas en común parciales para compartir las relaciones establecidas a partir de los datos de la figura.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

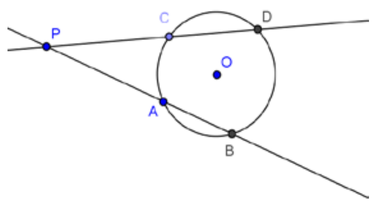
Consideramos necesario estos momentos de la clase para que las ideas de algunos circulen y movilicen las de otros.

Es posible pensar también algunas preguntas que alienten a los estudiantes a encontrar caminos para vincular los datos dados con lo que se quiere averiguar. Por ejemplo: ¿Será posible encontrar ángulos rectos en la figura? ¿Cómo puedo asegurar que los son? ¿Hay ángulos inscriptos que abarquen un mismo arco? ¿Qué cuadriláteros quedan determinados en la figura? ¿Será posible que todos ellos sean inscriptibles? Estas y otras preguntas más podrían sostener el trabajo de los alumnos en la resolución de esta actividad.

Actividad 7: ¿Es verdad?[4]

a) ¿Será cierto que los triángulos APD y PBC que quedan determinados por dos rectas que cortan a una circunferencia en A, B y C, D respectivamente y se intersectan en un punto P, son semejantes?

b) ¿Y qué PA . PB = PC . PD?.



La resolución de esta actividad requiere tener disponibles algunas relaciones sobre semejanza de triángulos, considerando la congruencia de los ángulos. Ahora bien, ¿cuáles serían los conocimientos necesarios para demostrar la congruencia de los mismos y qué relaciones de las trabajadas anteriormente sería necesario que los estudiantes recuperen? Entendemos que es posible que algunos alumnos recuperen, a partir de la resolución de la *Actividad 1: Averiguar medidas sin medir*, la propiedad que dice que si dos ángulos inscriptos abarcan el mismo arco, entonces son congruentes, surgida al tratar de encontrar la medida de los ángulos solicitados. De aquí la importancia de, no solo resolver las actividades, sino de destinar un espacio de la clase para explicar los procedimientos empleados y justificarlos planteando conjeturas y validándolas. Al enunciar las propiedades surgidas durante la resolución, es posible descontextualizarlas de la situación particular que llevó a enunciarlas, para que puedan ser reutilizadas en otra ocasión. En tal sentido, nuevamente estamos diciendo que estas actividades requieren de una planificación de posibles intervenciones docentes para lograr que los alumnos entren en el trabajo geométrico esperado y que inviten a recuperar las propiedades enunciadas y a dar razones fundamentadas.

Actividad 8: ¿Por qué es verdad?

Claudio Ptolomeo nació en Egipto aproximadamente en el año 85 D.C. y murió en Alejandría en el año 165 D.C. Astrónomo y Geógrafo, propuso el sistema geocéntrico

[4] Los títulos “¿Es verdad?” y “¿Porqué es verdad?“, corresponden a la diferenciación realizada por Arsac al exponer su perspectiva acerca de “Demostrar para convencer” y “Demostrar para comprender”. Han sido tomadas del texto, *Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible?* de Chemello y Crippa citado en la bibliografía, en el que las autoras exponen dicha diferenciación. Asumimos el riesgo de colocar estos títulos con la intención de advertir al docente sobre esta cuestión, aunque compartimos la idea de que estos sentidos diferentes de las pruebas dependerán de los conocimientos disponibles de los alumnos.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

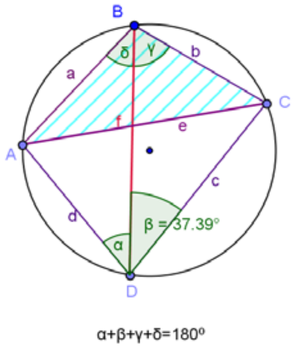
como la base de la mecánica celeste que perduró por más de 1400 años. Su trabajo consistió en estudiar la gran cantidad de datos existentes sobre el movimiento de los planetas con el fin de construir un modelo geométrico que explicase dichas posiciones en el pasado y fuese capaz de predecir sus posiciones futuras.

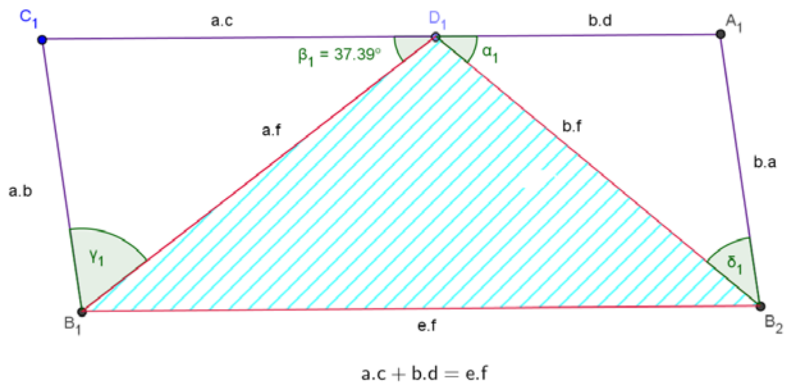
Un aporte interesante que hizo al conocimiento matemático de su época fue el que hoy conocemos como teorema de Ptolomeo, que dice lo siguiente:

En todo cuadrilátero inscripto, la suma de los productos de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales.

a) ¿Qué construcciones podrías realizar con Geogebra que te permitan explorar esta relación enunciada por Ptolomeo?

b) Analiza las siguientes construcciones e intenta averiguar por qué es verdadero lo que afirma Ptlomeo.[5]





Comprender los pasos de esta demostración exigirá posiblemente de variadas intervenciones del docente para mediatizar entre la interpretación de los dibujos expuestos y lo que se quiere demostrar. En principio será necesario recuperar algunas nociones sobre semejanza de triángulos y poder identificar en las construcciones dadas triángulos que cumplan con estas condiciones de semejanza.

Si bien se ofrece un applet para visulizar la dependencia del segundo dibujo respecto del primero, esta vinculación no resultará evidente para todos los estudiantes. Estamos pensando que, en un espacio compartido de la clase, los alumnos puedan explicar las relaciones que establecen y encontrar entre todos los modos de validarlas.

Actividad 9: Decidir y argumentar

Analiza la veracidad de estas afirmaciones. En caso de falsedad ofrece un contraejemplo y modifica la oración para hacerla verdadera. En caso de ser verdadera justifica.

a) Todos los paralelogramos son inscriptible.

b) Ningún trapecio es posible de inscribir en una circunferencia.

c) Todo romboide es inscriptible, si su diagonal principal es diámetro.

[5] Esta actividad es una adaptación de la demostración visual encontrada en: http://gaussianos.com/una-demostracion-visual-explicada-del-teorema-de-ptolomeo/ (fecha de consulta: agosto de 2014)

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

d) El ángulo que forma una diagonal de un cuadrilátero inscripto con un lado de ese cuadrilátero, es congruente con el que forma la otra diagonal con el lado opuesto al anterior.

e) En todo cuadrilátero inscripto ABCD, se cumple que AO.OC=BO.OD, si O es el punto de intersección de sus diagonales.

La intención de esta actividad es que los alumnos recuperen las relaciones y propiedades surgidas al resolver los problemas anteriores. Por ejemplo, para responder al ítem a) podrán recordar que para que un cuadrilátero sea inscriptible es necesario que sus ángulos opuestos sumen 180°. Entonces, la pregunta posible de instalar será, si los ángulos opuestos de un paralelogramo siempre suman 180°.

El uso de cuantificadores, como TODOS o NINGUNO, en los enunciados favorece el trabajo de retomar clasificaciones de cuadriláteros en clases inclusivas y pensar entonces, por ejemplo para este ítem, al rectángulo como un posible paralelogramo, siendo éste el único paralelogramo que cumpliría con la condición de ser inscriptible.

A MODO DE CIERRE

Esta propuesta, como hemos planteado en la introducción, tiene la intención de contribuir a la enseñanza de la geometría a partir de un conjunto de actividades con la posibilidad de ser resueltas, en su mayoría, por medio de recursos tecnológicos. Entendiendo que éstos pueden ser un recurso válido para la exploración, formulación de conjeturas y para la resolución de problemas, pero que el trabajo geométrico que se propone no se agota en estas etapas. Esperamos que los alumnos tengan a lo largo de la escuela secundaria la oportunidad de involucrarse en el desafío intelectual de encontrar pruebas para argumentar y aproximarse así al modo particular de validar en Matemática.

Los aprendizajes requieren de tiempos prolongados por lo que es necesario pensar que los conocimientos se construyen a largo plazo y requieren de un trabajo colectivo orientado por el docente que asuma este largo plazo.

Por otra parte se espera que los alumnos reconozcan el valor de los recursos tecnológicos como herramientas útiles para analizar los problemas considerando sus alcances y límites al validar los procedimientos utilizados y los resultados obtenidos.

Pensamos que esta es una propuesta más que intenta colaborar con la tarea del docente; sin duda se pueden agregar o intercalar actividades y recursos, teniendo en cuenta los recorridos de enseñanza y aprendizaje de cada grupo particular de alumnos y los propósitos de enseñanza.

BIBLIOGRAFÍA

BONOMO,F, DÁNDREA,C. , LAPLAGNE,S., SZEW,M. (1996). *Explorando la geometría en los Clubes Cabrí*, Ed. Red Olímpica, Colección Pitágoras, Buenos Aires, Argentina.

CHEMELLO, G. Y CRIPPA, A. (2011). “Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible? “En: DIAZ, A *(ed.) Enseñar matemáticas en la escuela media,* Ed Biblios, Buenos Aires, Argentina.

DÍAZ, A. (2011) “Representaciones en geometría”, En: DIAZ, A. *Enseñar matemáticas en la escuela media*, Ed Biblios, Buenos Aires, Argentina.

FERRAGINA, R. (2012). *Geogebra entra al aula de Matemática*, Ed Miño y Dávila, Buenos Aires, Argentina.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254

ITZCOVICH, H*. (2005). Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones.* Ed. Libros del Zorzal, Buenos Aires, Argentina.

SESSA, C. (1988) “Acerca de la Enseñanza de la Geometría” En: *Matemática. Temas de su didáctica*. Cap.II. CONICET. Programa Prociencia, Buenos Aires, Argentina.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN DIRECCIÓN GENERAL DE PLANEAMIENTO DIRECCIÓN DE CURRÍCULA.(2007). *Aportes para la enseñanza Nivel Medio Matemática. Geometría*. G.C.B.A. disponible en http://www.buenosaires.gob.ar/areas/educacion/curricula/media/matematica/geometria_media.pdf .Fecha de consulta: 15/08/14

DIRECCIÓN GENERAL DE CULTURA Y EDUCACIÓN, (2003). *Documento. Nº 3: Orientaciones didácticas para la enseñanza de la geometría en EGB,* Prov. de Bs As, Disponible en: http://servicios2.abc.gov.ar/docentes/capacitaciondocente/plan98/pdf/geometria.pdf Fecha de consulta: 15/08/14

Consejo Federal de Educación. Resolución 180/12, disponible en: http://www.me.gov.ar/consejo/resoluciones/res12/180-12_07.pdf. Fecha de consulta: 15/08/14

Historia de la Astronomía - Claudio Ptolomeo (85 d.C. - 165 d.C.) Escrito por Isaac Lozano Rey. 06 de abril de 2007 disponible en: http://www.latinquasar.org/index.php?option=com_content&task=view&id=140. Fecha de consulta: 15/08/14

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 254