CONGRESO IBEROAMERICANO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA, INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN

CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVEMBRO 2014

Cenários para o Ensino e para a Aprendizagem das Geometrias Não Euclidianas

ABAR, C.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

Cenários para o Ensino e para a Aprendizagem das Geometrias Não Euclidianas

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática

abarcaap@pucsp.br, abarcaap@gmail.com

RESUMO

Este artigo apresenta a primeira etapa de um projeto de pesquisa, direcionado para professores de Matemática, sobre Geometrias Não Euclidianas – GNE, com o uso de cenários de aprendizagem disponíveis na Internet e construídos com o GeoGebra. Foram desenvolvidos dois cenários para o ensino e para a aprendizagem das Geometrias Não Euclidianas, em especial a Geometria Elíptica e a Hiperbólica para oferecer uma alternativa de formação continuada a professores de Matemática. Ao abordar este tema, alguns questionamentos emergem, como: o que são estas Geometrias, desde quando se passou a pensar em seu ensino; por que ainda não são de fato ensinadas? Para auxiliar no delineamento dessa proposta foi realizado um estudo experimental com quatro professores, que teve como intuito investigar as possíveis relações que esses professores estabelecem quando solicitados a resolver situações envolvendo noções de Geometria Não Euclidianas, com o auxílio dos cenários construídos com o *software* GeoGebra. A abordagem dessa investigação é qualitativa. O referencial teórico subjacente é a Abordagem Instrumental de Pierre Rabardel (1995), com foco na Gênese Instrumental, que estuda a transformação de um artefato em instrumento. A metodologia utilizada é o *Design Experiments,* que permite a realização de uma avaliação formativa para executar e refinar projetos educacionais. Os resultados desse estudo permitiram a reconsideração de algumas escolhas e a reelaboração das atividades da proposta inicial, em particular no que se refere à constituição e utilização das ferramentas disponibilizadas no cenário digital. A análise dos resultados obtidos aponta uma mudança de atitudes e valores nos professores, que enfatizam a importância da metodologia adotada e evidenciam que alguns aspectos da Geometria foram aprendidos e se tornaram saberes institucionalizados.

Palavras-chave: Geometrias não Euclidianas, Educação Matemática, GeoGebra, Tecnologias digitais, Formação Continuada de Professores

ABSTRACT

This article presents the first stage of a research project directed to teachers of mathematics on non-Euclidean geometry-NEG, with the use of learning scenarios available on the Internet and built with GeoGebra. Two scenarios were developed for the teaching and learning of non-Euclidean geometry, in particular the Elliptical and Hyperbolic Geometry, to offer an alternative of continuing training for Mathematics teachers. When addressing this subject, some questions emerge, such as: what are these geometries, since when their teaching has been considered and why aren't they actually taught? In order to assist in the

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

design of this proposal, an experimental study was conducted with four teachers, which had as its aim the investigation of possible relationships that these teachers establish when asked to resolve situations involving concepts of non-Euclidean geometry, with the aid of the scenarios built with the software GeoGebra. The approach of this research is qualitative. The underlying theoretical framework chosen is the Instrumental Approach of Pierre Rabardel (1995), focused on Instrumental Genesis, which studies the transformation of an artefact into an instrument. The methodology used is the Design Experiments that allows a formative evaluation to execute and refine educational projects. The results of this study will allow the reconsideration of some choices and the reworking of the original proposed activities, in particular those related to the establishment and use of the tools available on the digital landscape. The analysis of the obtained results points a change of attitudes and values in teachers, which reveals the importance of the adopted methodology and shows how some aspects of geometry were learned and became institutionalized knowledge.

Keywords: non-Euclidean geometry, mathematics education, GeoGebra, digital technologies, continuing education of Teachers

INTRODUÇÃO

Este artigo apresenta a primeira etapa de um projeto de pesquisa direcionado para o estudo das Geometrias Não Euclidianas – GNE em cenários[1] de aprendizagem disponíveis na Internet e construídos com o GeoGebra para oferecer uma alternativa de formação continuada a professores de Matemática.

MAIOLI (2002), em um estudo que visou contribuir para a formação de professores, tanto na aquisição de conteúdos, quanto no aprimoramento de conhecimentos que os auxiliassem na elaboração de estratégias adequadas para seu trabalho com Geometria em sala de aula, observou que o trabalho possibilitou aos professores vivenciar a posição do aluno e refletir sobre pesquisas realizadas. Chamou atenção para a necessidade de aprimorar alguns conceitos. Mostrou que é possível contemplar em um projeto de formação, tanto os aspectos conceituais quanto os didáticos da Geometria.

Nesta primeira etapa de estudo experimental participaram quatro professores de Matemática da escola básica. Essa etapa teve como intuito principal investigar as possíveis relações que esses professores estabelecem quando solicitados a resolver situações envolvendo noções de Geometria Não Euclidianas, com o auxílio de cenários dinâmicos construídos no GeoGebra e disponíveis na Internet.

Com os resultados obtidos neste momento inicial, uma proposta aprimorada será desenvolvida e pesquisada com um número maior de professores para contribuir com a formação continuada dos mesmos com relação ao estudo das GNE.

Reconhecendo a importância e a necessidade da formação continuada de professores, com o acesso à informação cada vez mais rápido e não mais restrito à esfera de poucos, torna-se necessário o desenvolvimento de competências que permitam, ao maior número de pessoas, acessar informações na Internet, tornando-as significativas.

[1] Disponíveis em http://www.pucsp.br/tecmem/OAs.htm

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

Nesse contexto há uma questão, de maior abrangência, que merece ser objeto de reflexão: em que medida a utilização das tecnologias da informação e comunicação pode auxiliar na produção do conhecimento matemático?

Outra questão diz respeito, especificamente, à utilização da Geometria Dinâmica. Será que ela pode favorecer a criação de um ambiente de aprendizagem reflexiva?

Ao abordar o tema das GNE, outros questionamentos são levantados, por exemplo: o que são estas Geometrias, desde quando se passou a pensar em seu ensino? Por que ainda não são de fato ensinadas? Que conceitos da Geometria Euclidiana precisam ser resgatados?

GRAVINA (1996) salienta que, em uma nova forma de ensinar e aprender Geometria, a partir de uma exploração experimental viável somente em ambientes informatizados, os alunos fazem conjecturas com o constante retorno oferecido pela máquina, assim, eles aprimoram ou corrigem suas conjecturas, chegando a resultados que resistem ao “desenho em movimento” (p. 2).

ABRANTES (1999), em um projeto que realizou investigações matemáticas na sala de aula pelo Departamento de Educação da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, considera que a Geometria parece ser, dentro da Matemática escolar, uma área particularmente propícia à realização de atividades de natureza exploratória e investigativa. Porém, alguns pressupostos implícitos sobre o que é a Geometria e qual é o seu papel na aprendizagem da Matemática precisam ser trazidos para o primeiro plano.

ABRANTES (1999) diz ainda que a importância da geometria não é independente desses pressupostos.

> A partir de uma análise da história recente do ensino da Matemática em Portugal, Eduardo Veloso (1998) mostra como, nos anos 70 e 80, a generalização da chamada Matemática Moderna relegou a Geometria para um lugar muito secundário. Numa abordagem formal da Matemática, a Geometria tornou-se um “parente pobre” da Álgebra Linear, as atividades envolvendo construções geométricas foram consideradas matéria de outras disciplinas, como a Educação Visual, a “importância prática” da Geometria reduzia-se ao Teorema de Pitágoras e a umas quantas fórmulas para o cálculo de áreas e volumes. Nesta abordagem, a intuição e a visualização desempenham um papel menor no processo de ensino e aprendizagem da Matemática. (p. 3).

Deste modo, a proposta do trabalho em questão consiste em identificar fatores que possam dificultar o conhecimento e a compreensão das GNE, em particular a Geometria Elíptica, por parte de professores de Matemática. E em que medida a Geometria Dinâmica, por meio de cenários para a aprendizagem das GNE, pode favorecer a superação dessas dificuldades.

APORTES TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

A abordagem desta investigação é qualitativa. O referencial teórico subjacente é a Abordagem Instrumental de Pierre Rabardel (1995), com foco na Gênese Instrumental, que estuda a transformação de um artefato em instrumento e é uma importante orientação para atender aos objetivos da pesquisa.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

Segundo essa teoria, não é necessária apenas a inclusão de usuários em atividades que utilizam a tecnologia, caracterizada por Rabardel (2003) como um artefato que pode ser transformado em um instrumento. Também, devem-se considerar os processos pelos quais os usuários transformam o artefato em instrumento, denominada por Rabardel de Gênese Instrumental.

Laborde e Sträßer (2010), nas considerações finais do artigo, afirmam que:

> Parece óbvio que uma mera análise dos artefatos (computadores, software, tecnologia de comunicação) não é suficiente para permitir que essa tecnologia seja usada no ensino e no aprendizado da matemática. Os "estudos de usuários" (muitas vezes mencionados em informática) são um pré-requisito inevitável para a implementação de novas tecnologias na aula de matemática. Para fazer essa afirmação com a terminologia de um dos referenciais teóricos amplamente utilizados na didática da matemática (ver Rabardel 1995): a análise do artefato é um pressuposto insuficiente para introduzir e compreender o seu uso. Só uma análise do instrumento, ou seja, da interação do artefato e dos métodos de utilização de seus usuários (professores e alunos), e da análise da sua "gênese instrumental" irá ajudar na implementação de computadores, software e tecnologia de comunicação na aula de matemática (tradução própria) (p.12).

Desse modo, transformar o software GeoGebra em um instrumento é importante, pois, nessa evolução, ocorrem a reorganização e a modificação dos esquemas de utilização, fatores que permitem a estruturação da ação do professor, colaborando para sua formação e aprimoramento de conceitos matemáticos.

Conforme Rabardel (1995), a Gênese Instrumental tem duas dimensões:

- A *instrumentação* (orientada para o sujeito) e tem relação com o surgimento e evolução de esquemas de utilização e da ação instrumental. Zuchi (2008) caracteriza a instrumentação como um processo pelo qual as especificidades e as potencialidades de um artefato vão condicionar as ações de um sujeito para resolver um dado problema.
- A *instrumentalização* (orientada para o artefato) e tem relação com o enriquecimento das propriedades do artefato. Zuchi (2008) caracteriza a instrumentalização como um processo pelo qual o sujeito modifica, adapta ou produz novas propriedades, personalizando o artefato de acordo com suas demandas. Por exemplo, quando o indivíduo personaliza o computador de acordo com suas necessidades: acessibilidade dos programas, barra de ferramentas, formato de telas, dentre outras.

É importante observar que as duas dimensões do processo de Gênese Instrumental referem-se ao sujeito e ao objeto, mas com orientações diferentes. Assim, ambas contribuem para a evolução do instrumento, para a reorganização e modificação dos esquemas de utilização do sujeito, permitindo a estruturação de sua ação e a participação da formação dos conceitos matemáticos.

A proposta é que o professor utilize os cenários de aprendizagem, inicialmente, no aspecto da instrumentação nos quais a manipulação do *software* GeoGebra é necessária não apenas como mais um recurso tecnológico, mas como um recurso que colabore no desenvolvimento de conceitos das GNE, uma vez que, por si só, o software não faz Matemática.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

Dessa forma, esta pesquisa poderá colaborar para a inserção da tecnologia na prática docente, aprimorando os estudos e as análises no que diz respeito à tecnologia no contexto da educação matemática.

Para se chegar ao produto final com propostas de atividades com o uso do GeoGebra foi realizado um estudo experimental com quatro professores de Matemática, com suporte na metodologia de pesquisa *Design Experiments* que, de acordo com Doerr e Wood (2006), permite a realização de uma avaliação formativa para testar e aperfeiçoar modelos educacionais baseados em princípios derivados de investigação prévia.

A metodologia *Design Experiments*, de acordo com Collins et al. (2004), foi introduzida em 1992 e permite a realização de uma avaliação formativa para executar e refinar projetos educacionais.

O estudo preliminar por meio de uma oficina foi elaborado de acordo com essa metodologia, e uma característica essencial das atividades é que foi possível observar como os professores se comportaram diante das atividades propostas para que suas estratégias fossem observadas e analisadas.

Com apoio dessa metodologia, a oficina experimental desenvolvida com quatro professores em um laboratório com acesso à Internet, serviu como fonte de observação para a análise de cada atividade. Após fazer considerações e possíveis aprimoramentos, é pretensão desenvolver uma versão mais próxima do desejável a fim de que ela possa ser aplicada para um número maior de professores.

Assim, a proposta da pesquisa está direcionada à formação continuada de professores de Matemática para proporcionar reflexões e questionamentos sobre alguns aspectos do ensino das Geometrias Não Euclidianas.

O desenvolvimento tecnológico propicia alternativas para a educação, agregando aos recursos tradicionais as ferramentas das tecnologias digitais da informação e da comunicação, contribuindo para a produção do conhecimento matemático.

Segundo Abar (2011), na era digital os recursos tecnológicos que se apresentam para dar suporte à educação e, em especial, à Educação Matemática são inumeráveis, privilegiam a ação, a reflexão e a interação, e estão disponíveis ao alcance de todos.

Atendendo a esses pressupostos, os cenários desenvolvidos para o ensino e para a aprendizagem das Geometrias Não Euclidianas, em especial a Geometria Elíptica e a Hiperbólica, ofereceram uma alternativa de formação continuada a professores de Matemática.

Por meio das interações dos professores nas situações propostas, verificamos a importância dos cenários disponibilizados, pois foi fundamental para o acesso às representações de objetos não euclidianos, em particular os objetos elípticos, favorecendo a compreensão de conceitos, propriedades e relações envolvidos nesse domínio.

Os resultados desse estudo permitiram-nos reconsiderar algumas escolhas, levando-nos à reelaboração das atividades de nossa proposta inicial, em particular no que se refere à constituição e utilização das ferramentas disponibilizadas no GeoGebra. Consolidamos assim, uma nova proposta com os mesmos objetivos iniciais.

SOBRE AS GEOMETRIAS NÃO EUCLIDIANAS

O primeiro sistema axiomático-dedutivo conhecido é o livro de Geometria chamado *Elementos*, escrito por Euclides, que procurou organizar o trabalho de matemáticos que lhe

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

haviam precedido em uma unidade bem estruturada e que, por mais de dois mil anos, se acreditou perfeita e influenciou o ensino da matemática.

O que mais preocupou os matemáticos depois de Euclides foi o axioma das paralelas que pode ser enunciado como: por um ponto exterior a uma reta pode-se traçar uma única reta paralela à mesma.

Muitos matemáticos tentaram demonstrar esse axioma a partir dos outros axiomas de Euclides e fazer dele um teorema.

Historicamente sabe-se que as tentativas infrutíferas da demonstração do Postulado das Paralelas de Euclides levaram à conclusão da independência desse axioma. O trabalho de Gerolamo Saccheri (1677-1733), nesse sentido, partindo da demonstração por absurdo da famosa proposição, resultou no aparecimento dos primeiros teoremas básicos da Geometria Não Euclidiana. Compreendendo que as conclusões de Saccheri não eram contraditórias, alguns matemáticos seguiram tentando na demonstração do axioma das paralelas.

Uma das formas de negar o Postulado das Paralelas da Geometria Euclidiana é dizer que por um ponto exterior a uma reta não existe paralela alguma dando origem, por exemplo, às Geometrias Esférica e Elíptica; a outra consiste em dizer que por um ponto exterior a uma reta há mais de uma paralela, o que fundamenta a Geometria Hiperbólica.

Após a construção da Geometria Hiperbólica, desenvolvida principalmente por Nicolai Iavnovitch Lobachevski (1793-1856) e Janos Bolyai (1802-1860), Bernard Riemann (1826-1866), com a finalidade de obter habilitação para ser professor na Universidade de Göttingen, desenvolveu a Geometria Esférica. Depois, Felix Klein (1849-1925) construiu o que denominamos de Geometria Elíptica e também um modelo plano para tal geometria.

No universo da Geometria Hiperbólica encontram-se quatro modelos para representar o plano hiperbólico:

1. Um modelo tridimensional que é a pseudoesfera, obtida pela rotação de uma curva tractrix como apresentado na figura a seguir.

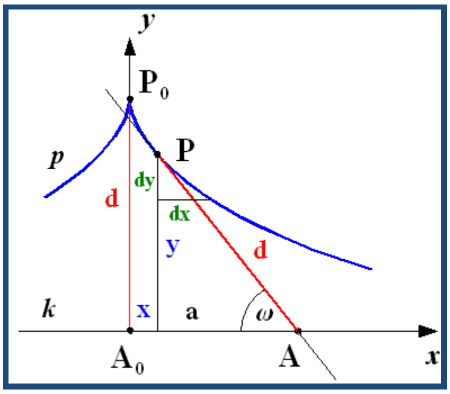

Figura 1: Curva tractrix.

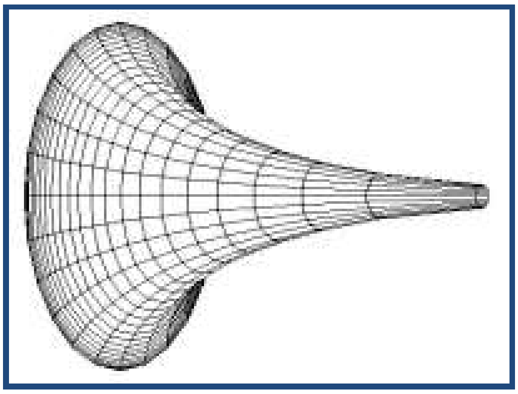
Figura 2: Pseudoesfera.

2. Três modelos bidimensionais:

i. Modelo de Felix Klein: um plano hiperbólico composto por um círculo limitado do plano euclidiano, região interna do círculo excluindo a fronteira. As retas são cordas do círculo. Felix Klein propôs um modelo em que o plano euclidiano é convertido num disco, tendo no círculo que o contorna os pontos que representam o infinito no plano original.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

Assim, as retas são as cordas do disco, excluindo suas extremidades. Na figura abaixo as retas DA e CB são paralelas à reta AB.

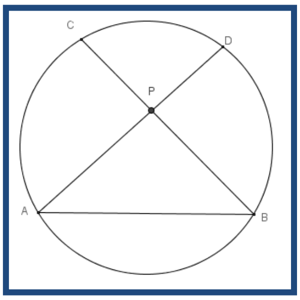

Figura 3: Modelo Hiperbólico de Felix Klein.

ii. Modelo de Henri Poincaré (1854-1912) ou semiplano de Poincaré: modelo composto por pontos de ordenada positiva de um plano cartesiano no qual o eixo x é a fronteira do plano e as retas são semicírculos com centro no eixo x. Na figura abaixo as retas são paralelas.

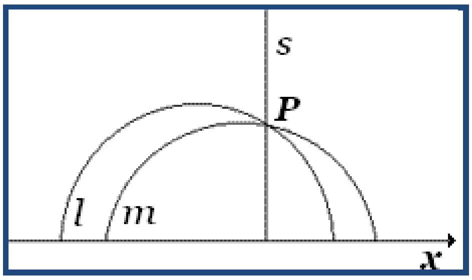

Figura 4: Modelo Hiperbólico de Henri Poincaré.

iii. Disco de Poincaré: similar ao modelo de Klein da Geometria Elíptica, em que as retas são arcos de circunferência e perpendiculares à fronteira como na figura a seguir.

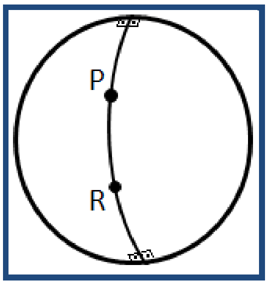

Figura 5: Modelo Hiperbólico Disco de Poincaré.

No universo da Geometria Elíptica fazem parte as geometrias Projetiva, Estereográfica e Hiperesférica ou Superfície Esférica.

Uma vez que na Superfície Esférica cada ponto determina um único ponto antípoda e cada figura é assim duplicada nos antípodas, Felix Klein percebeu que seria possível, abstratamente, a identificação de cada par de pontos antípodas, isto é, construir um modelo com um novo conceito de ponto, de reta e de plano. Dessa forma, Klein construiu o que denominamos de Geometria Elíptica e um modelo plano para tal geometria.

Um modelo em Geometria Plana Elíptica lembra o modelo de Poincaré para Geometria Hiperbólica. Neste modelo o plano é um círculo unitário, incluídos os pontos da circunferência e os "pontos" são os pontos euclidianos dentro do círculo unitário, bem como os pares de pontos antípodas no círculo que são identificados. As "retas" são ou diâmetros do círculo

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

unitário ou arcos das circunferências euclidianas que interceptam a circunferência do círculo unitário nas extremidades de um diâmetro, conforme figura abaixo.

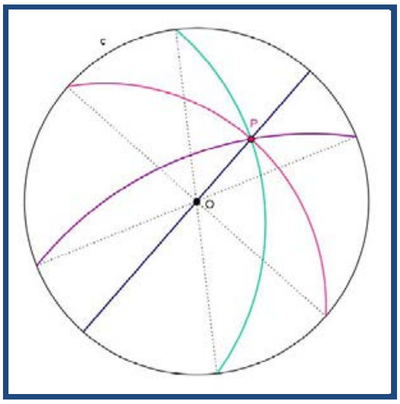

Figura 6: Modelo Elíptico Plano de Felix Klein.

Inspirado na proposta desenvolvida por Franco e Goulart (2012), foi elaborado para esta pesquisa um modelo disponibilizado na Internet da Geometria Plana Elíptica no GeoGebra, com a construção de macroferramentas que possibilitam construir o modelo de Klein e outras macros que permitem explorar vários resultados que são pertinentes à Geometria Elíptica.

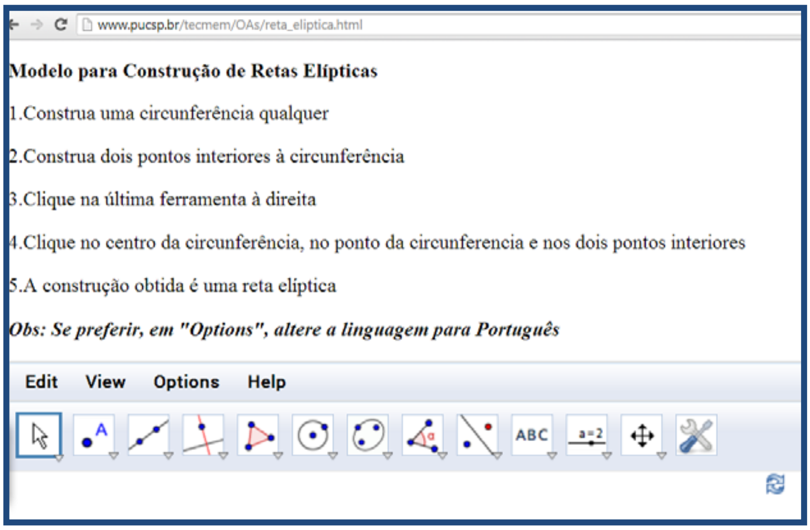

Figura 7: Cenário para a Geometria Elíptica construído pelo Grupo de Pesquisa TecMEM.

Nesse cenário, as ferramentas do GeoGebra ficam disponíveis para possibilitar construções da Geometria Euclidiana que serão necessárias para o desenvolvimento das atividades.

SOBRE AS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS E SEUS PROCEDIMENTOS

Recuperando Rabardel sobre o entendimento da *instrumentação,* orientada para o sujeito, espera-se identificar as potencialidades do cenário disponibilizado e, também, em que medida o mesmo condiciona as ações dos professores no desenvolvimento das atividades para a produção do conhecimento da Geometria Elíptica.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

As atividades nessa primeira etapa e apresentadas neste trabalho tinham como objetivo identificar fatores que pudessem dificultar, por parte dos professores, o conhecimento e a compreensão das GNE, em particular da Geometria Elíptica.

Foram apresentadas seis atividades com alguns itens, mas só foi possível desenvolver apenas as duas primeiras devido às dificuldades apresentadas na utilização do GeoGebra, evidenciando a necessidade de familiarizar os participantes com o uso do *software*, desconhecido por dois dos quatro professores.

Ao final do trabalho, para atender em parte a metodologia adotada, foi solicitado aos participantes que respondessem algumas perguntas sobre o conteúdo trabalhado; sobre as possibilidades de seu ensino e aprendizagem; dificuldades apresentadas e sugestões de aprimoramento.

Seguem as duas primeiras atividades trabalhadas, as questões apresentadas e alguns resultados obtidos com suas respectivas análises.

Atividade I.

1. Construa uma reta segundo as orientações dadas no cenário.
2. Movimente um dos pontos da reta obtida em direção ao centro do plano e descreva o que você observa.
3. Quando a reta é semelhante ao segmento euclidiano?
4. Construa outra reta. Movimente seus pontos e tente fazer com que as duas retas não tenham nenhum ponto de intersecção.

a) É possível que as retas não se interceptem?
b) É sempre possível determinar a intersecção?
c) Quantas retas passam por esse ponto de intersecção?

Com essa atividade, espera-se que haja o entendimento de uma nova ideia de reta e se observe que, assim como na Geometria Euclidiana, por um ponto passam infinitas retas; que diferente da Geometria Euclidiana, duas retas sempre se interceptam e que por dois pontos podem passar infinitas retas. Espera-se, também, que haja a compreensão de que não existem retas paralelas neste modelo como se pode observar na figura a seguir.

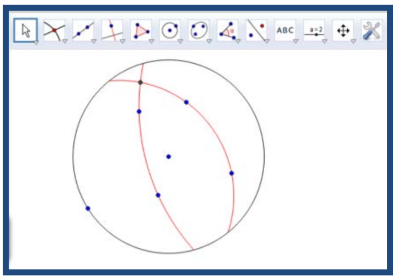

Figura 8: Construção da reta elíptica no cenário.

Seguem as respostas da atividade I e os respectivos itens, apresentadas por um dos participantes e enviadas por email ao término dos trabalhos.

"Ao movimentar um dos pontos da reta observei que a reta continua elíptica."

"A reta elíptica fica semelhante ao segmento euclidiano quando se aproxima do centro da circunferência."

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

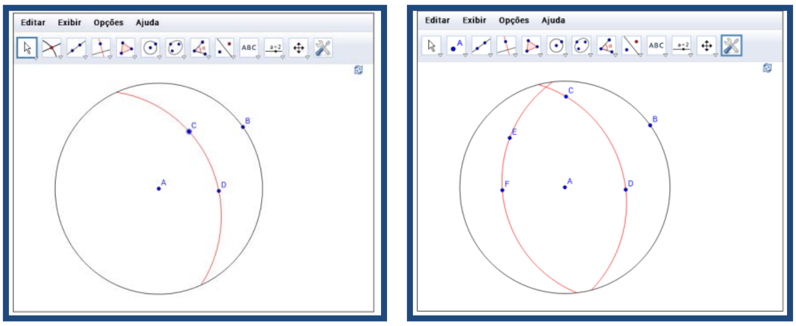

Figura 9: Atividade I

"Quando movimento um dos pontos da primeira ou da segunda reta, elas se interceptam."

"Entre duas retas elípticas sempre é possível determinar as intersecções."

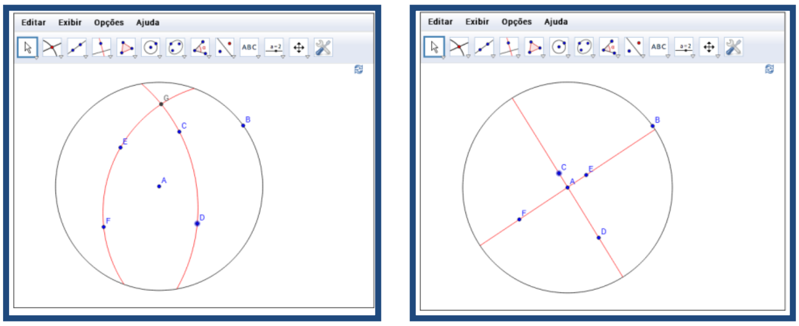

Figura 10: Atividade I

a) Quantas retas passam por um ponto P?

"Infinitas retas podem passar por um ponto P na circunferência."

b) Duas retas no modelo sempre têm um ponto em comum?

"Sim, sempre haverá a intersecção."

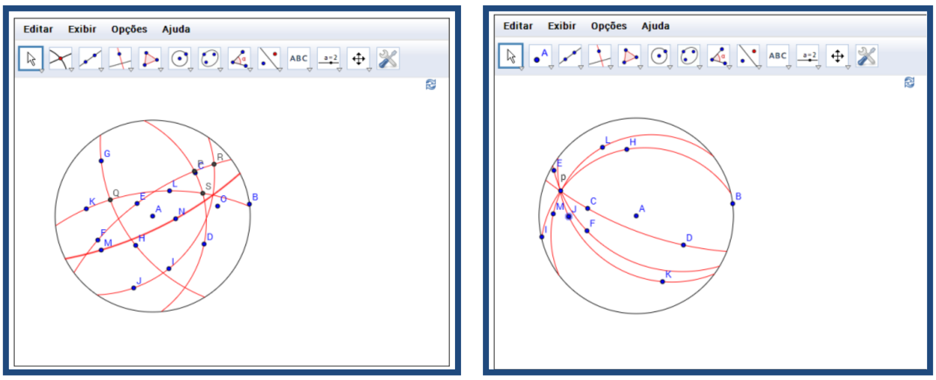

Figura 11: Atividade I

Do ponto de vista do conteúdo trabalhado foi possível verificar que, com as orientações sobre as ferramentas de utilização do software GeoGebra e sobre como salvar a imagem das construções obtidas, houve o entendimento das propriedades da Geometria Elíptica e os objetivos propostos para essa atividade foram alcançados evidenciando o aspecto da instrumentação de Rabardel (1995).

Atividade II.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

Construa um triângulo elíptico no modelo dado.

a) Qual a medida de cada ângulo interno do triângulo?

Orientações:

A medida de um ângulo é dada pela medida em graus, entre 0º e 180º do ângulo formado pelas retas euclidianas que são tangentes às retas elípticas no ponto que é vértice do ângulo. Quando as retas elípticas formam um ângulo de 90º, elas são ditas retas perpendiculares.

b) Qual é a medida da soma desses ângulos?

Com estas atividades espera-se que os participantes comparem as propriedades da Geometria Euclidiana com a GNE e que verifiquem que a medida da soma dos ângulos internos de um triângulo elíptico é sempre maior que 180º.

Seguem as respostas da atividade II e os respectivos itens, apresentadas por um dos participantes e enviadas por email ao término dos trabalhos.

a) Qual a medida de cada ângulo interno do triângulo?

"DCE = 141º; CED = 125º e EDC = 129º."

b) Qual é a medida da soma desses ângulos?

"DCE + CED + EDC = 395º, ou seja, a soma dos ângulos internos é maior que 180º."

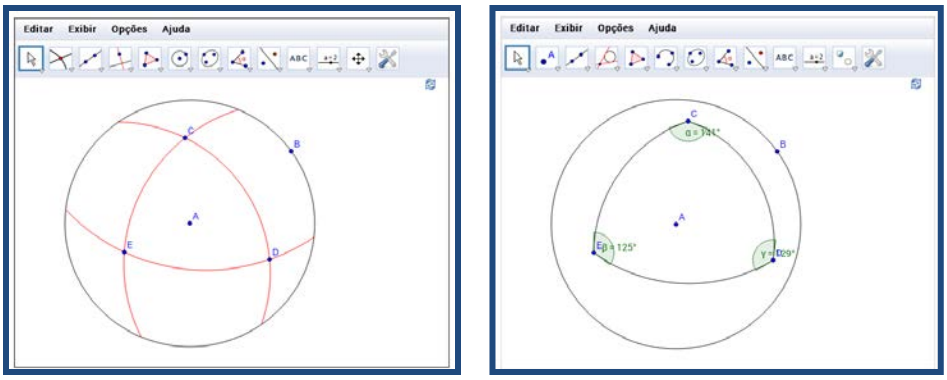

Figura 12: Atividade II

Os resultados obtidos evidenciam que os participantes se apropriaram de algumas propriedades das GNE com a possibilidade do dinamismo do GeoGebra, como mostra um dos depoimentos:

> *"No desenvolvimento das atividades, pude construir e entender a diferença entre a Geometria Euclidiana e a Geometria Não Euclidiana e visualizar as modificações realizadas quando movimentei um dos pontos das figuras que foram construídas. O GeoGebra possibilita a visualização do que pode acontecer na figura geométrica construída quando movimentamos um dos pontos dessa figura."*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os resultados desse estudo permitiram que fossem reconsideradas algumas escolhas e a reelaboração das atividades da proposta inicial, em particular no que se refere à constituição e

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

utilização das ferramentas disponibilizadas no cenário digital, o que atende ao processo de instrumentalização de Rabardel (1995).

A avaliação da proposta foi bem recebida pelos professores, que consideraram o cenário disponível adequado para o entendimento inicial da Geometria Elíptica. Eles observaram que o desconhecimento das possibilidades do GeoGebra e de sua utilização podem interferir no alcance dos objetivos propostos e, também, que é necessário um tempo mais adequado para o desenvolvimento das atividades. No entanto, consideraram a possibilidade do uso futuro do GeoGebra com seus alunos.

Os depoimentos a seguir evidenciam essas observações:

> *“Eu enfrentei muitas dificuldades, primeiro porque não conhecia o GeoGebra [...]”*
>
> *“Minha sugestão é que as atividades sejam todas desenvolvidas na oficina, provavelmente será necessário diminuir o número de itens[...] Em casa, não consegui seguir as orientações e responder as questões que ficaram em aberto.”*
>
> *“Eu primeiro preciso de algumas aulas de como utilizar o GeoGebra, depois poderia utilizá-lo em sala de aula com meus alunos.”*

A análise dos resultados obtidos aponta uma mudança de atitudes e valores nos professores, que enfatizam a importância da metodologia adotada e evidenciam que alguns aspectos da GNE foram aprendidos e se tornaram saberes institucionalizados.

No entanto, para a próxima etapa, novas questões poderão ser incorporadas de modo a tentar aprimorar a produção do conhecimento matemático e a prática docente dos participantes:

- Que dificuldades surgiram ao longo da historia da matemática para o desenvolvimento do conteúdo matemático das GNE?
- Quais abordagens podem ser incorporadas às práticas escolares?
- Que procedimentos podem ser adotados procurando a transformação de um objeto científico em um objeto para o ensino no caso das GNE?

Deste modo, a pesquisa irá agregar as considerações e sugestões dos participantes, as observações da autora sobre o desenvolvimento das atividades e as análises realizadas para um aprimoramento da proposta

REFERÊNCIAS

ABAR, C. A. A. **Educação Matemática na Era Digital.** Unión (San Cristobal de La Laguna), v. 27, p. 14-28, 2011.

ABRANTES, P. **Investigações em Geometria na Sala de Aula**. In: _____ (Org.) *O Ensino da Geometria no Virar do Milênio*. Lisboa: DEFCUL, p. 1-15. 1999.

COLLINS, Allan *et al.* **Design Research: Theoretical and Methodological Issues. Journal Of The Learning Sciences**. Evanston, p. 13-42. 2004.

DOERR, H. M.; WOOD, T. Pesquisa-Projeto (design research): aprendendo a ensinar Matemática. In: BORBA, M. C. (Org.). **Tendências internacionais em formação de professores de matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, p. 113-128. 2006.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275

FRANCO, VALDENI SOLIANI E MENEZES, LUANA PAULA GOULART. **Utilizando o GeoGebra para construção e exploração de um modelo plano para a Geometria Elíptica**. Conferência Latino Americana de GeoGebra, Uruguay, 2012.

GRAVINA, M.A. **Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria**, Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação, p. 1-13. Belo Horizonte, MG. 1999. Disponível em: http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/artigos_index.php Acesso em 27/09/2013.

LABORDE C.; STRÄßER, R. Place and use of new technology in the teaching of mathematics: ICMI activities in the past 25 years. **ZDM Mathematics Education**, Eggenstein-Leopoldshafen, Alemanha, DE, v. 42, n. 1, p. 121-133. 2010.

MAIOLI, M. **Uma Oficina para formação de professores com enfoque em quadriláteros.** 165 f. Dissertação de Mestrado (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. 2002.

RABARDEL, P. **Les hommes et les technologies:** une approche cognitive des instruments contemporains. Paris: Armand Colin, 1995.

RABARDEL, P.; WAERN, Y. **From artefact to instrument. Interacting with Computers**, Linkojing, Suécia, v. 15, n. 5, p. 641-645, 2003.

ZUCHI, I. A integração dos ambientes tecnológicos em sala: novas potencialidades e novas formas de trabalho. In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2, 2008, Recife. **Matemática Formal e Matemática não-Formal 20 anos depois: sala de aula e outros contextos.** Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2008. Disponível em: http://www.ded.ufrpe.br/sistemática/CD-Rom%202%2OSIPEMAT/artigos/CO-167.pdf> Acesso em: 07 mar. 2013.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 275