CONGRESO IBEROAMERICANO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA, INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO

BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVEMBRO 2014

O Cálculo Diferencial e Integral e suas dificuldades: uma abordagem interdisciplinar para estudantes de Engenharia

CARIUS, A.C.; FERREIRA, G.P.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

O Cálculo Diferencial e Integral e suas dificuldades: uma abordagem interdisciplinar para estudantes de Engenharia

Ana Carolina Carius, Gessé Pereira Ferreira, Instituto Federal do Rio de Janeiro/Universidade Veiga de Almeida IFRJ/UVA, Instituto Federal Fluminense IFF, ana.carius@ifrj.edu.br, gessepferreira@gmail.com

Resumo

Classificado entre as dez maiores economias do mundo, o Brasil vivencia um momento crucial em termos de desenvolvimento econômico. A demanda por engenheiros no mercado interno cresceu nos últimos anos colocando em evidência a baixa qualidade da formação e a escassez em competências específicas. A procura dos jovens por cursos de engenharia nas universidades brasileiras também cresceu. Entretanto, a alta taxa de evasão dos graduandos durante os cursos impede a entrada efetiva desses jovens no mercado de trabalho. Um dos problemas apontados como causador da desistência dos estudantes, ainda no primeiro ano de graduação, é a desarticulação entre a teoria e a prática. Para a grande maioria dos pesquisadores, a matemática é indispensável para a comunidade da engenharia e o grande desafio é adequá-la às necessidades de uma linguagem que seja ferramenta para descrever as leis que regem as Ciências da Natureza, sem com isso distanciar das aplicações empíricas. A partir dessa problemática, o presente trabalho visa articular o ensino acadêmico da matemática contextualizando-o com aplicações práticas. Assim, acredita-se que a modelagem matemática pode ser utilizada com o objetivo de estruturar o processo de aprendizagem, com a introdução de novos conceitos matemáticos e métodos, incluindo suas ilustrações. Desta forma, o problema de transferência de calor entre corpos, modelado através da Lei do Resfriamento de Newton, foi escolhido como problema motivador. A partir dele, trabalharam-se os conceitos de diferenciação e integração. Discute-se também um método numérico capaz de aproximar a solução analítica do problema, incluindo a análise de erro do método proposto.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Modelagem Matemática. Engenharia.

Abstract

Rated among the ten largest economies in the world, Brazil experiences a pivotal moment in terms of economic development. The demand for engineers in the domestic market has grown in recent years highlighting the poor quality of training and shortages in specific skills. The demand of young people for engineering courses in brazilian universities also grew. However, the high dropout rate of the students during the courses prevents effectively entry of these young people into the labor market. One of the problems cited as the cause of students' dropout at the first year of graduation, is the gap between theory and practice. For the vast majority of researchers, mathematics is indispensable to the engineering community and the challenge is to adapt it to the needs of a language that is tool to describe the laws governing the natural sciences, without thereby distancing of empirical applications. From this issue, this paper aims to articulate the academic teaching of mathematics contextualizing it with practical

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

applications. Thus, it is believed that mathematical modeling can be used in order to structure the learning process, with the introduction of new mathematical concepts and methods, including its illustrations. Thus, the problem of heat transfer between bodies modeled by Newton's Law of Cooling was chosen as the motivating problem. From it worked the concepts of differentiation and integration. Also discuss a numerical method capable of approximate analytical solution of the problem, including error analysis of the proposed method.

Keywords: Teaching of Mathematics. Mathematical Modeling. Engineering.

1. INTRODUÇÃO

A procura por cursos de graduação na área das Ciências Exatas e da Terra foi, principalmente durante a década de 1990, negligenciada por estudantes que se candidatavam à escolha de um curso de graduação no Brasil. A baixa procura deveu-se, basicamente, ao mercado de trabalho pouco promissor para os estudantes dos cursos de Engenharia nas décadas de 1980 e 1990 (Salermo et al., 2013). A partir do ano 2000, acelerou-se o processo de crescimento do Brasil. Era necessário formar engenheiros para assumir os postos de trabalho gerados pela expansão econômica e logística do país. Cresce a procura pelos cursos de graduação em Engenharia.

A Confederação Nacional da Indústria (CNI) estimou, em 2011, que até 2014 o Brasil demandaria 90 mil novos engenheiros no mercado de trabalho, somados aos 854 mil inscritos na ocasião no Conselho Federal de Engenharia e Agronomia (Confea). Diante da situação, a quantidade de engenheiros estimada pela CNI como satisfatória era inalcançável. As principais consequências da ausência de profissionais habilitados no mercado são: a importação de mão-de-obra especializada e a valorização dos salários dos profissionais que já estão no mercado. Segundo o site de empregos Catho, de 2011 até os dias atuais, 6 dos 20 cargos que mais tiveram valorização salarial estão ligados a engenharia. O salário médio para um profissional na área de petróleo e gás (o site não especifica o nível de conhecimento) passou de 5,6 mil reais para 8,8 mil reais entre um ano e outro, com uma valorização de 55% (Prates, 2012).

Ainda segundo Prates (2012),

> Não se pode dizer que o Brasil não reagiu à demanda nos últimos anos. Entre 2001 e 2010, o número de formandos em Engenharia mais do que duplicou, saindo de 18 mil para mais de 41 mil. Os números de cursos e vagas cresceram de maneira exponencialmente maior que o PIB. (p. 1)

Neste mesmo artigo, o pesquisador aponta três desafios enfrentados pelo Brasil com o objetivo de formar a quantidade de engenheiros necessários à promoção do desenvolvimento do país: educação na base, combate à evasão dos estudantes ao longo do curso e a expectativa, do próprio estudante, de entrar no mercado de trabalho como engenheiro ao final da graduação.

Segundo a Associação Brasileira de Educação em Engenharia (Abenge), do total de alunos que começa algum curso de engenharia, 43 % dos estudantes não o terminam. A desistência maior se dá no primeiro ano do curso, ou seja, nos dois primeiros semestres. Vanderli de Oliveira, professor Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF) e diretor da Abenge, afirma: “O sujeito não vem bem preparado, não

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

acompanha e abandona. Ele prefere outros cursos onde teoricamente é mais fácil progredir" (Prates, 2012). O especialista Cláudio de Moura Castro ressalta que as universidades que oferecem cursos de engenharia tem que repensar os próprios currículos, pois ensinam muito mais do que o aluno precisa e não se adaptam a ele. "Você tem que ajustar a dificuldade do curso ao aluno", afirma (Prates, 2012).

Um dos maiores fatores apontados, do ponto de vista informal pelos estudantes, como desmotivador ao seu prosseguimento nos cursos de engenharia, de forma geral, é a grande dificuldade nas disciplinas que envolvem matemática e a sua desconexão com as atividades práticas de sua carreira. A grande dificuldade com conteúdos matemáticos - indispensáveis para a comunidade da engenharia (Sazhin, 1998) - estudados de forma insatisfatória na Educação Básica aliada à falta de aplicação dos conteúdos vistos em sala de aula logo nos primeiros períodos da graduação são fatores que contribuem, de forma significativa, para a evasão dos alunos.

Considerando a problemática apresentada anteriormente, este trabalho objetivou a contextualização do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de engenharia, visando um melhor aproveitamento do conteúdo por parte dos discentes participantes do projeto, atuando principalmente no combate à evasão incentivando os estudantes a permanecerem na carreira ao final do curso de graduação.

O projeto foi aplicado em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral, pertencente ao considerado ciclo básico das engenharias em uma universidade do estado do Rio de Janeiro. Uma vez que os conteúdos principais desta disciplina são derivação e integração de funções reais de uma variável, a maioria dos professores opta por oferecer um curso que seja sistematizado em técnicas de derivação e integração, com o objetivo de "treinar" o estudante para as disciplinas específicas da sua carreira que virão posteriormente na grade curricular.

De forma alguma se considera que a metodologia descrita anteriormente seja inadequada para um estudante que ingressa na graduação em engenharia. Entretanto, é necessário destacar que, além da discussão destas técnicas, é preciso oferecer problemas práticos que aparecerão rotineiramente na vida profissional do engenheiro, os quais deverão ser resolvidos utilizando-se conceitos de derivação e integração de funções reais de uma variável. De acordo com a proposta apresentada neste trabalho, o ideal é um equilíbrio entre técnicas e aplicações no estudo de derivadas e integrais de funções de uma variável real.

Desta forma, a primeira etapa do projeto foi composta pela escolha de um problema que se adequasse à carreira que o estudante escolheu. Por se tratar de uma turma de Engenharia Mecânica, o problema escolhido envolve a transferência de calor entre os corpos.

O estudo de equações Diferenciais Ordinárias, no contexto do Cálculo Diferencial e Integral, está ligado, sobretudo, às aplicações diretas de derivadas e integrais a problemas de natureza física, química ou biológica. Este estudo começa no século XVII com os mesmos personagens responsáveis pela criação do Cálculo: Newton e Leibniz, motivados, em princípio, por problemas envolvendo a física. "A preocupação dominante desde aquela época até meados do século XIX era a obtenção de soluções das equações em forma explicita" (Figueiredo, 2008, p. 5). Com o tempo, percebeu-se que muitas das equações diferenciais obtidas a partir da

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

modelagem matemática de fenômenos naturais não tinham solução explícita ou analítica. Era, pois, necessário à criação de métodos capazes de resolver as equações obtidas sem os recursos tradicionais do cálculo diferencial. A partir desta constatação, entram em cena os chamados "métodos numéricos". Esses métodos têm por objetivo encontrar uma aproximação da solução exata, que não é obtida explicitamente, considerando uma tolerância para a aproximação calculada em relação à solução exata.

Ao propor o problema de resfriamento de um corpo como objeto de estudo deste projeto, pretende-se considerar um modelo simplificado para o fenômeno de temperatura num corpo por perda de calor para o meio ambiente, fazendo as seguintes hipóteses:

1. A temperatura *T* é a mesma em todo o corpo e depende do tempo t;

2. A temperatura T_a do meio ambiente é constante com o tempo e é a mesma em todo meio ambiente;

3. O fluxo de calor através das paredes do corpo – que é uma taxa de variação e, portanto, pode ser representado pela derivada $\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dt}}$, ou seja, é a variação da temperatura do corpo em relação ao tempo -, é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a)$$

Onde *K* é uma constante positiva que depende de propriedades físicas do corpo.

É importante ressaltar que "este modelo foi considerado por Newton, estudando o caso de uma bola de metal aquecida, e é por isso que a hipótese 3 acima é chamada de lei do resfriamento de Newton" (Figueiredo, 2008, p.5).

Neste modelo, a temperatura depende, exclusivamente, da variação do tempo. Existe um modelo mais completo que considera a temperatura variando de acordo com a posição avaliada no material. Por exemplo, ao analisar a transferência de calor por condução em uma barra de metal, a temperatura dessa barra pode ser diferente dependendo do ponto que onde a aferição esta sendo feita. Dessa forma, a temperatura varia em função da posição e do tempo, T(x, t). A equação obtida para este modelo é:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Esta sentença é conhecida como Equação do Calor. Após os trabalhos de Fourier, em 1810, a equação recebeu tratamento extensivo. Para o resfriamento de um corpo, a equação dada por Newton aparece como uma condição de fronteira no livro "Conduction of Heat in Solids" de Carslaw e Jaeger (1959).

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

Percebe-se que a equação gerada através da lei de resfriamento de um corpo por Isaac Newton é uma Equação Diferencial Ordinária. O coeficiente *k* é um dado referente ao calor específico do material ao qual se esta analisando o comportamento, no que diz respeito à transferência de calor para o ambiente. Além disso, depende da superfície exposta e também de características específicas do meio ambiente.

Por envolver diversos fatores que, em princípio, deveriam ser expressos através de um número, o coeficiente *k* recebe destaque sob o ponto de vista científico quando nos referimos ao estudo de resfriamento de corpos.

Além de hipóteses que podemos agregar ao coeficiente *k*, Boyce e Diprima (2010) propõem hipóteses também para a temperatura do meio ambiente. Podemos considerar que a temperatura do meio ambiente, ao invés de ser constante e dada por um valor T_a, seja representada por uma função que varie como uma senóide, por exemplo.

Baseados em todas estas suposições, pretende-se, a partir das possibilidades de pesquisa descrita por autores que já estudaram a equação diferencial para o resfriamento de um corpo, dar continuidade às investigações iniciadas e evidenciar a importância de ferramentas matemáticas na obtenção de resultados que nos permitam interpretar melhor as propriedades dos materiais e a sua adequação às situações para as quais são utilizadas.

Como faremos suposições para a equação diferencial para o resfriamento de um corpo, é natural que as equações diferenciais obtidas a partir das hipóteses não possuam soluções explícitas ou analíticas e que, por esse motivo, seja necessária a utilização de um método numérico que aproxime a solução do problema gerado. O método mais simples que é utilizado para a resolução numérica de Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem é o método de Euler, que recebe esse nome por ter sido criado por Leonhard Euler (1707-1783) em torno de 1768 (Boyer, 1996). Este método se baseia na "união de segmentos de retas tangentes de modo sistemático e direto." (Boyce & Diprima, 2010, p. 78). Através destes segmentos de retas tangentes, foi criada uma função linear por partes que oferece uma aproximação para a solução da equação diferencial.

Desta forma, pretende-se aplicar o método de Euler às equações diferenciais ordinárias geradas sem solução explícita, ou analítica, e obter aproximações para as soluções das mesmas.

Este trabalho foi dividido da seguinte forma: na seção 2 é apresentado um estudo analítico das equações diferenciais de primeira ordem que regem a Lei do Resfriamento de Newton; a seção 3 descreve o método de Euler para resolução de Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem, juntamente com a análise de erro do método proposto; na seção 4, é mostrado os resultados obtidos utilizando a Lei de Resfriamento de Newton, dados experimentais e o método de Euler; a seção 5, apresenta considerações sobre a metodologia proposta e, finalmente, a seção 6, são feitas considerações finais e propostas para futuros trabalhos.

2. A LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON: UM ESTUDO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

O estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, ou simplesmente EDO's, aparece como uma das principais aplicações do estudo de derivas e integrais para funções de uma variável. São inúmeras as aplicações de Equações Diferenciais, em diversas áreas, como: Física, Química, Biologia, Economia, Administração, entre outras. Uma vez que o objeto do projeto foi o de integrar diversas áreas de conhecimento em um mesmo trabalho, visando um melhor aproveitamento por parte dos estudantes das disciplinas de matemática em seu curso de graduação, através do conhecimento de um problema do cotidiano utilizando os conhecimentos que estava estudando ainda no primeiro ano do curso de engenharia, o estudo restringiu-se ao fenômeno de condução de calor entre dois corpos. Um dos modelos simplificados para a variação de temperatura num corpo por perda de calor para o meio ambiente foi concebido por Isaac Newton. De acordo com Figueira e Neves (2008), Newton considerou este modelo estudando o caso de uma bola de metal aquecida, como dito anteriormente. As seguintes hipóteses foram consideradas:

1. A temperatura T é a mesma em todo o corpo e depende apenas do tempo t;
2. A temperatura T_a do meio ambiente é constante com o tempo e é a mesma em todo o meio ambiente;
3. O fluxo do calor através das paredes do corpo, que será denotado por dT é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e do meio ambiente.

Feitas essas hipóteses, podemos enunciar a seguinte Equação Diferencial Ordinária para descrever o fenômeno:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \qquad (1)$$

Onde: k é uma constante positiva que depende de propriedades físicas do corpo.

Pode se observar que, a partir da modelagem matemática do problema proposto, foi possível apresentar aos estudantes de Cálculo Diferencial e Integral uma equação que relacione a taxa de variação da temperatura em relação ao tempo e a função que define a temperatura, dependente do tempo.

A seguir apresentaremos uma possível resolução para a Equação Diferencial (1) através do chamado Método dos Fatores Integrantes.

2.1 - Resolução analítica para a Lei do resfriamento de Newton

O método que é apresentado a seguir se aplica a Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem como a equação que rege a Lei do Resfriamento de

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

Newton. Para maiores detalhes sobre o método empregado, sugerimos consultar Boyce e Diprima (2010).

Observemos que a equação (1) pode ser reescrita como

$$\frac{dT}{dt} + kT = kT_a \qquad (2)$$

Definimos o fator integrante μ da seguinte forma

$$\mu(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}.$$

Multiplicando a equação (2) pelo fator integrante, temos:

$$\frac{dT}{dt} \cdot e^{kt} + ke^{kt}T = k \cdot e^{kt}T_a.$$

Observemos que podemos reescrever a relação anterior como

$$(e^{kt} \cdot T)' = T_a ke^{kt}.$$

Integrando ambos os lados em relação a t, temos:

$$e^{kt} \cdot T = T_a e^{kt} + C,$$

Portanto, obtemos a seguinte solução para a equação (1), proveniente da Lei do Resfriamento de Newton:

$$T(t) = T_a + Ce^{-kt}. \qquad (3)$$

Ao considerar que a temperatura do corpo no instante inicial t = 0 seja $T(0) = T_0$ e, substituindo esta condição na solução (3), conclui-se que a constante C é dada por

$$C = T_0 - T_a$$

Desta forma a solução analítica para a Lei do Resfriamento de Newton é dada por:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}. \qquad (4)$$

Observa-se que a solução analítica para a equação diferencial (1) depende da temperatura inicial do corpo T_0, da temperatura do meio ambiente T_a e da constante k. Desta forma, a primeira etapa do projeto estava concluída: com um ferramental matemático simples, obtido ainda no primeiro ano de um curso de engenharia na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, mostra-se para o estudante que é possível modelar um problema cotidiano, que é a condução do calor. A partir desta

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

constatação, a próxima etapa do projeto prevê o estudo do valor adequado da constante k, do ponto de vista experimental, a fim de que o discente possa verificar que, de fato, a lei do resfriamento de Newton modela problemas cotidianos.

3. A LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON E O ESTUDO DE DADOS EXPERIMENTAIS

A solução (4) para a equação denominada *Lei do Resfriamento de Newton* descreve a forma como um reservatório finito de calor pode ser resfriado perdendo calor para um reservatório infinito (meio ambiente), ao longo do tempo. Nesta etapa da pesquisa, o trabalho de Silva (Silva et al., 2003) é usado como subsídio para os dados experimentais. Com o objetivo de calcular o calor específico do alumínio de forma experimental, Silva, e os demais pesquisadores, realizaram uma experiência na qual consideraram um recipiente com água e, após um período de tempo, são inseridos 30 lingotes de alumínio e, então são realizadas medidas da temperatura do sistema por um período de tempo.

O objetivo desta etapa do trabalho era, utilizando os resultados obtidos experimentalmente, encontrar:

1.° - o valor da constante k presente na solução (4) da equação da Lei do Resfriamento de Newton, quando o sistema é composto por água e o meio ambiente;

2.° - o valor da constante k presente na solução (4) da equação da Lei do Resfriamento de Newton, quando o sistema é composto por água, alumínio e o meio ambiente

É importante frisar que, na própria construção do modelo intitulado Lei do resfriamento de Newton, a constante k é a contribuição dada pelo tipo de material para o qual se esta avaliando a transferência de calor. Portanto pretende-se, através da realização do experimento, mostrar ao estudante que o modelo matemático pode sim se aproximar ao mundo real.

3.1 - Análise da constante k para o sistema água e meio ambiente

O experimento realizado por Silva (Silva et al., 2003) ocorreu com uma temperatura ambiente de 25^0. Sendo assim, água foi aquecida até a temperatura de 82^0. Considerando esse instante como o instante inicial $t_0 = 0$. O recipiente foi colocado em uma bancada e, a partir de então, foram feitas algumas medições de temperatura do mesmo.

Observa-se que, a partir da solução (4), é possível escrever a constante k da seguinte forma:

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

$$k = -\frac{1}{t}\ln\left[\frac{T(t)-T_a}{T_0 - T_a}\right] \quad , \qquad (5)$$

Onde: T(t) é a medida da temperatura no instante t, T_a é a temperatura ambiente e T_0 é a temperatura no instante inicial $t_0 = 0$. Em geral, existe na literatura o valor de algumas constantes associadas ao fenômeno de transferência de calor entre corpos. Uma delas é a constante que designa o calor específico de um corpo. De acordo com Silva, "o calor específico é a quantidade de calor que deve ser transferido a 1 g de uma substância para que a sua temperatura seja elevada em 1^0C" (SILVA et al., 2003, p. 392). Essa quantidade de calor varia de substância para substância. Assim, o calor específico é um parâmetro que caracteriza uma dada substância. Porém, a constante k que aparece na solução para a equação da Lei de Resfriamento de Newton não representa o calor específico de um corpo - embora exerça um papel análogo, pois também é um parâmetro associado a uma dada substância específica -.

A partir da relação (5), foi feito os cálculos com o auxílio de uma planilha de excel, com o objetivo de se determinar um valor experimental para o sistema água e meio ambiente, para a constante *k*. Os valores encontrados para a constante *k* são apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Valores para a constante k a partir do experimento de transferência de calor entre a água e o meio ambiente.

Instante de tempo (em minutos)	**Temperatura (^0C)**	**Constante k**
1,5	79,5	0,029900377
3,0	77	0,030602516
4,5	74,5	0,0313508
6,0	72	0,032150611
7,5	70	0,031518504
9,0	68	0,031316795

Observa-se que o valor da constante k pode ser considerado, aproximadamente, como k= 0,031316795 quando consideramos o sistema água e meio ambiente.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

3.2 - Análise da constante k para o sistema água - alumínio - meio ambiente

Após o experimento envolvendo apenas água e o meio ambiente, foram introduzidos 30 lingotes de alumínio de seção reta de aproximadamente 0,7 cm x 0,7 cm, com comprimento aproximado de 9 cm. Foram, então feitas algumas medições.

Novamente usando a relação (5) para a constante k, obtemos os seguintes valores:

Tabela 1: Valores para a constante k a partir do experimento de transferência de calor entre a água, alumínio e o meio ambiente.

Instante de tempo (em minutos)	Temperatura (^{0}C)	Constante k
3	57,5	0,015040145
6	56,5	0,01272883
9	55,5	0,012070427
12	54,5	0,011830855
15	53	0,012943734
18	52	0,01280687
21	51	0,012774476
24	50,2	0,012479855
27	49,5	0,012136571
30	48,5	0,012312003
33	47,5	0,012510461
36	46,8	0,012345849
39	46	0,012354823
42	45,2	0,012397093
45	44,5	0,012354357
48	43,6	0,012566645

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

A partir dos dados obtidos experimentalmente, podemos concluir que o valor da constante k pode ser aproximado por k = 0, 012566645. Portanto, a introdução dos 30 lingotes de alumínio no sistema influenciou no valor da constante k obtida.

4. APROXIMAÇÕES NUMÉRICAS PARA A LEI DO RESFRIAMENTO DE NEWTON

Objetivando a integração entre teoria e prática, discutiu-se na Seção 3 o cálculo do valor da constante k que aparece na solução analítica para a EDO, proveniente da Lei do Resfriamento de Newton para o sistema água e meio ambiente e para o sistema água, alumínio e meio ambiente. Considerando-se as aproximações geradas para a constante k nos dois casos, propõe-se uma comparação para os valores da temperatura em cada instante de tempo de três formas distintas: através da solução analítica (4), pelo método de Euler para soluções numéricas para a Lei do Resfriamento de Newton e, por fim, comparando os resultados obtidos com os valores experimentais obtidos no trabalho de Silva (Silva et al., 2003).

Muitas equações diferenciais ordinárias não possuem solução analítica como a equação da Lei do Resfriamento de Newton, conforme descrição feita na Seção 2. Baseados nessa constatação discute-se um método numérico capaz de resolver equações diferenciais comparando, primeiramente, os resultados obtidos com a solução analítica, além de avaliar a eficiência do método. É feito, ainda, a análise de erro do método numérico e alguns testes realizados nesse contexto.

4.1 - O Método de Euler

A descrição a seguir segue Ruggiero e Lopes (Ruggiero & Lopes, 2002).

Consideremos o problema descrito pela Lei do Resfriamento de Newton (1). Então:

$$T' = -k(T - T_a),$$

(utilizando a condição inicial $T(t_0) = T_0$).

A exemplo da descrição feita por Ruggiero e Lopes (Ruggiero & Lopes, 2002), definimos $f(t,T) = -k(T - T_a)$. Então:

$$\begin{cases} T' = f(t,T) \\ T(t_0) = T_0 \end{cases}.$$

Através do método de Euler, a solução aproximada no instante n+1 é dada por

$$T_{n+1} = T_n + hf(t_n, T_n),$$

Onde: $f(t_n, T_n) = -k(T_n - T_a)$.

Logo,

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

$$T_{n+1} = T_n - hk(T_n - T_a).$$

É bom lembrar que como o método de Euler é um método de série de Taylor de ordem 1, então o erro de truncamento local do método é da ordem de O (h^2), conforme descrito em Ruggiero e Lopes (Ruggiero & Lopes, 2002).

4.2 - Teste Numérico

A fim de ilustrar as comparações entre os três tipos de solução que podem ser dadas para a Lei do Resfriamento de Newton, propõe a representação gráfica das três soluções em um único gráfico. É utilizado, com este objetivo, o experimento envolvendo o cálculo da temperatura para o sistema água, alumínio e meio ambiente e o valor de k = 0, 012566645, conforme descrito na Seção 3. Considerando $T_0 = 59^0 C$ e $T_a = 25^0 C$. A solução analítica é dada por (4) e a solução numérica foi calculada pelo método de Euler para $h = 3$.

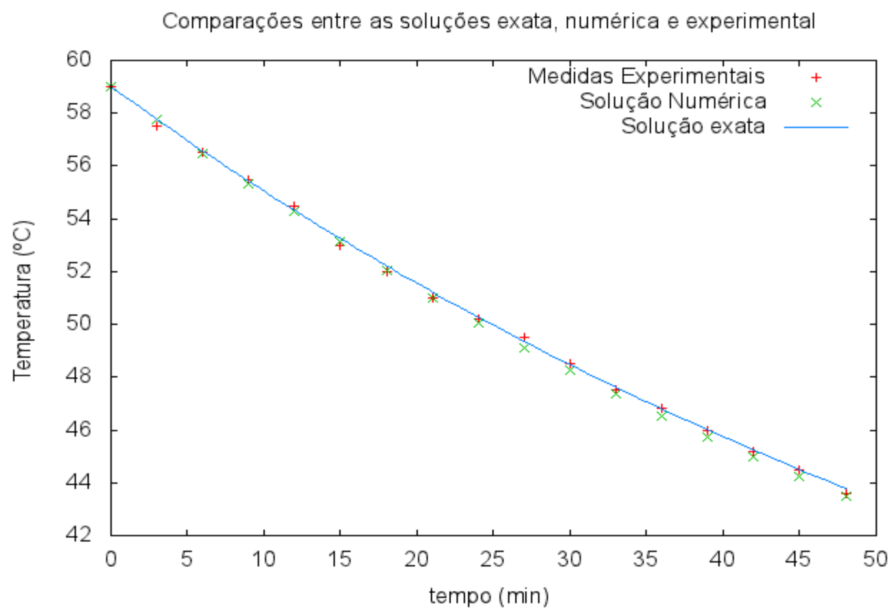

Figura 1: Gráfico comparativo entre solução analítica (exata), solução numérica (método de Euler para h=3) e as medidas experimentais.

5. CONSIDERAÇÕES SOBRE A METODOLOGIA PROPOSTA

As seções 3 e 4 descreveram, do ponto de vista multidisciplinar, o trabalho que foi desenvolvido em uma turma de Cálculo Diferencial e Integral. A partir desta proposta, observamos tanto aspectos positivos quanto negativos acerca da metodologia proposta.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

5.1 - Deficiências em matemática como fator de limitação em etapas do processo

Apesar de a proposta ser inovadora pelo fato de, no primeiro ano de curso dos estudantes de engenharia, propiciar uma oportunidade de relacionar os conteúdos que seriam estudados em Física, Cálculo Diferencial e Cálculo Numérico, as deficiências matemática básicas tornaram, por vezes, o trabalho difícil para os estudantes. Para trabalhos futuros, será possível utilizar estratégias a fim de diminuir a defasagem matemática proveniente da Educação Básica, em conjunto com o projeto para o curso de Cálculo Diferencial e Integral.

5.2 - Modelagem matemática aplicada ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral

O emprego da Modelagem Matemática como estratégia facilitadora do processo de ensino aprendizagem nos últimos dez anos tem ganhado destaque nos estudos relacionados à matemática e o ensino. De acordo com Kaiser e Sriraman (Kaiser & Sriraman, 2006), uma das correntes que defende a utilização da Modelagem Matemática no processo de ensino aprendizagem a considera em uma perspectiva integradora, onde a mesma pode servir a propósitos científicos, matemáticos e pragmáticos, porém sob uma ótica harmoniosa entre os mesmos. Nesse sentido, o presente projeto foi ao encontro do proposto acima, ao apresentar um problema físico inicial e, a partir do mesmo, estudá-lo sob o aspecto físico quando feita a dedução da Lei do Resfriamento de Newton, seguindo de um estudo matemático - ao introduzir a solução analítica para a EDO, proveniente da Lei do resfriamento de Newton pelo método dos fatores integrantes -. Por fim, aproveitando a oportunidade, viabilizou-se um estudo experimental, o qual proporcionou o cálculo da constante que aparece na solução da equação da Lei do resfriamento de Newton, além de realizar um estudo de um método numérico que solucionasse uma EDO de primeira ordem (o método de Euler).

Tal concepção de aplicação da Modelagem Matemática não é muito difundida entre as universidades brasileiras que possuem cursos de engenharia. Desta forma, acredita-se que esta abordagem contribui, de forma significativa, na melhoria do ensino de Cálculo Diferencial e Integral para os estudantes de engenharia.

5.3 - Relação entre o ciclo básico e aplicações no primeiro ano do curso de engenharia

De acordo com depoimentos informais por parte dos estudantes que participaram do projeto, aliados a grande evasão no primeiro ano nos cursos de engenharias, pôde-se observar que, de fato, a proposta multidisciplinar desperta maior interesse por parte dos estudantes que ingressam no ensino superior em alguma carreira ligada às engenharias. Sendo assim, a inserção de aplicações diretas de conteúdos previstos na grade curricular destes cursos, ainda no primeiro ano, pode reduzir a evasão e reprovação dos estudantes. No entanto, esta constatação só seria válida caso uma proposta de currículo aplicado fosse implantada e fossem observadas a evasão e reprovação por algum tempo com o objetivo de se verificar a veracidade desta hipótese levantada pelo projeto.

.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho teve por objetivo analisar as dificuldades encontradas pelos estudantes brasileiros ingressantes nos cursos de engenharia ainda no primeiro ano do curso de graduação. Diversas causas são estudadas como determinantes ao processo de evasão e reprovação dos discentes, sobretudo nas disciplinas iniciais de seus cursos de graduação. Pesquisas recentes, formais e informais, apontam na direção de que as dificuldades encontradas pelos estudantes são resultantes da má formação matemática, ainda na Educação Básica. Além dessa justificativa de grande relevância, segue-se o desinteresse em estudar matemática pela matemática, sem relacioná-la com as aplicações que a mesma teria no cotidiano da atividade profissional de um engenheiro. Nesse sentido, o projeto propôs uma metodologia alternativa de revisão de conteúdo relacionando a aplicabilidade e o uso de ferramentas de Cálculo Diferencial e Integral. A proposta se baseou nas reflexões, sobretudo, de pesquisadores pioneiros no uso da modelagem matemática como ferramenta de ensino-aprendizagem no Brasil, como Maria Sallett Biembengut, Nelson Hein (Biembengut & Hein, 2003) e Rodney Carlos Bassanezi (Bassanezi, 2006), que destacam o papel primordial que a modelagem matemática exerce no processo de contextualização e, portanto, facilitadora do ensino-aprendizagem, desde o Ensino Fundamental.

O projeto se constituiu de três etapas que são, a priori, as mesmas para a modelagem matemática de qualquer fenômeno, mesmo que a proposta de modelagem não seja feita exclusivamente para o uso pedagógico. São elas: proposta de um fenômeno, proposta de um modelo que seja consistente com o problema apresentado - que também seja tratável do ponto de vista matemático - e a verificação de soluções para o mesmo, sendo estas analíticas ou numéricas, dependendo da complexidade do modelo proposto. Sob este olhar, foi apresentado o problema de transferência de calor entre corpos, sendo o mesmo modelado através da Lei do Resfriamento de Newton. A análise da solução analítica para o modelo foi à parte crucial do projeto, pois durante esse momento os conteúdos de Cálculo Diferencial e Integral foram abordados e, em seguida, as soluções numéricas foram analisadas no intuito de mostrar aos discentes a dificuldade de trabalhar com problemas reais cujos resultados gerem modelos que sejam tratáveis do ponto de vista analítico, ressaltando a importância de se utilizar métodos numéricos, os quais representam a grande maioria das soluções nos modelos obtidos para o mundo real.

Para trabalhos futuros, propõe-se repensar o currículo do ciclo básico para as engenharias. Em um mundo onde a velocidade com a qual as informações são transmitidas e com as transformações econômicas e sociais cada vez mais rápidas, o estudante que ingressa hoje num curso de engenharia possui expectativas muito diferentes daquelas de 10 anos atrás. Por outro lado, a estrutura curricular para o ciclo básico passou por poucas transformações nesse mesmo intervalo de tempo. O desafio, para nosso grupo de pesquisa, é tentar reorganizar a estrutura curricular de todo o curso de Cálculo Diferencial e Integral, inserindo a modelagem matemática e as aplicações durante todo o curso e não somente em um projeto a ser realizado durante algumas aulas.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bassanezi, R. C. (2006). Ensino-aprendizagem com modelagem matemática. São Paulo. Contexto.

Biembengut, M. S.; e Hein, N. (2003). Modelagem matemática no ensino. 3. ed. São Paulo: Contexto.

Boyce, W. E.; e Diprima, R. C. (2010). *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* 9 ed. Rio de Janeiro: LTC.

Boyer, C. B. (1996). *História da matemática*. 2. ed. Tradução: Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher.

Carslaw, H. S.; e Jaeger, J. C. (1959). Conduction of heat in solids. 2. ed. New York: Oxford University Press.

Figueiredo, D. G.; e Neves, A. F. (2008). *Equações diferenciais aplicadas.* 3 ed. edição. Rio de Janeiro: IMPA.

Kaiser, G.; e Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 38*, pp. 302-310.

Prates, M. (2012). 3 desafios que impedem o Brasil de ser um país de engenheiros. *Exame.com.* São Paulo, 02 ago. 2012. Acedido em 10 de março de 2014 em: http://exame.abril.com.br/brasil/noticias/3-desafios-para-o-brasil-ser-um-pais-de engenheiros?page=1

Ruggiero, M. A. G.; e Lopes, V. L. R. (2002). Cálculo numérico, aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo:Pearson.

Salermo, M. S. et al. (2013). *Uma proposta de sistematização do debate sobre a falta de engenheiros no Brasil*. São Paulo:USP.

Sazhin, S. (1998). Teaching Mathematics to Enginerring Students. *Int. J. Engng, 14*, pp. 145-152.

Silva, W. P.; Precker, J. W.; E Silva, C. M. D. P. S.; E Silva, D. D. P. S.; e E Silva; C. D. P. S. (2003). Medida de calor específico e lei do resfriamento de newton: um refinamento na análise dos dados experimentais. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 25, p. 392–398.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 290