CONGRESO IBEROAMERICANO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA, INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN
BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO
BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVEMBRO 2014

Análisis de la noción de límite infinito en libros de cálculo de las carreras de ingeniería

LOPEZ, C.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

Análisis de la noción de límite infinito en libros de cálculo de las carreras de ingeniería

Claudia López. Universidad de Buenos Aires

clau_lopez94@yahoo.com.ar

a. Palabras clave

Cálculo- ingeniería- libro de texto- límite infinito

b. Introducción

A pesar de la paulatina introducción de las tecnologías interactivas que permiten experimentar la matemática en laboratorios virtuales digitales, se ha observado que su participación en la enseñanza efectiva es relativamente pequeña respecto a la presencia del material escrito proveniente de los libros de texto. La desproporción, sin embargo, parece invertirse en lo que respecta al volumen de las investigaciones referidas a los libros de texto. Las investigaciones afirman que "seguramente estaremos de acuerdo en que la lectura de textos sigue siendo un modo privilegiado para la adquisición de conocimientos en la universidad" (Mateos 2009, 106), y documentan las dificultades de los estudiantes para apropiarse de los contenidos de los textos. En tal sentido, son conocidos los resultados pertinentes en la línea de investigación denominada *alfabetización académica*: los lectores que no cuentan con un repertorio de decodificadores de un texto técnico al desorientarse se desconectan de su lectura. La distancia entre el texto y el lector-estudiante es hoy incrementada por la escasa familiaridad de la población estudiantil con los modos de buscar y procesar la información en los libros de texto (Carlino, 2009). El problema es, además, registrado en los sucesivos informes PISA (2011, 2012) (Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes).

Por otra parte, la presencia del material escrito en los libros de texto sigue todavía siendo efectiva en la enseñanza de la matemática a nivel universitario porque en la construcción de conocimientos matemáticos (Machado, 2009) el lenguaje asume un papel mediador muy importante, donde su referente es el lenguaje textual, porque es en el texto donde "efectivamente se producen las matemáticas" (Lizcano, 1993, pág. 30), en este marco es que cobra importancia el análisis de los libros de texto de matemáticas. Una de las características propias de los textos de matemática consiste

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

en una suerte de fusión entre los contextos de descubrimiento y de justificación: ambos convergen en el procedimiento deductivo, lo que se refleja en el lenguaje por cadenas expresivas que utilizan términos transformados en tipos sustitutivos de la secuencia deductiva, tales como: entonces, por lo tanto, y así, resulta que, de donde se obtiene, y así se tiene que… Las dificultades propias de los contenidos matemáticos en sí se superponen a la que encuentran los alumnos en distinguir las diferentes funciones que cumplidas por las secciones de los textos, el status de las representaciones gráficas (tablas, figuras, diagramas, sistemas de coordenadas), con sus variantes funcionales o decorativas. En cuanto a la concisión, que deriva del elevado poder de compresión del sistema simbólico, se halla presente en los libros de texto de matemática en mayor o menor grado: cuanto más se eleva menos sencilla resulta la lectura, al disminuir lo que se denomina redundancia.

Por otra parte, el concepto de límite infinito, dentro de la matemática de nivel universitario, ocupa un lugar importante en los textos de cálculo, los que a su vez tienen un rol destacado en el currículum de las carreras de Ingeniería.

En la Figura 1 se presenta un modelo que capta las posibles relaciones potenciales de un texto con los actores esenciales: modelo de Rezat. Este modelo se representa con un tetraedro en cuyos vértices se ubican: el libro de texto, el estudiante, el profesor y el conocimiento matemático.

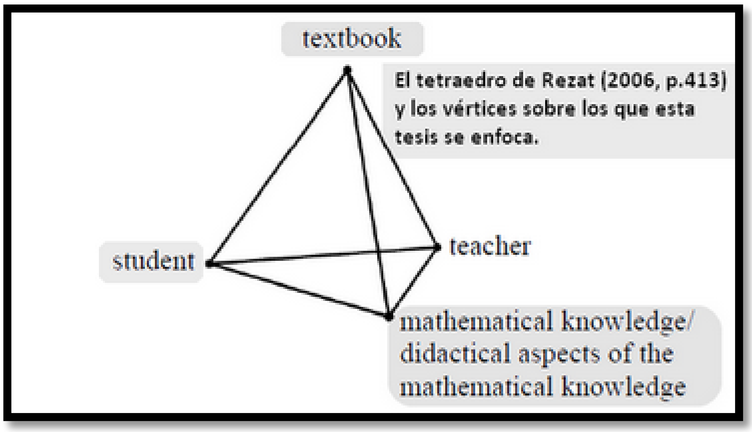


Figura 1: Un modelo de uso de los libros de texto. Fuente: (Rezat, A Model of Textbook Use 2006, 413)

De acuerdo con este modelo este trabajo se apoya sobre las relaciones establecidas entre el par: (libro de texto, límite infinito).

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

Figura 2: Un modelo de uso de los libros de texto.

c. Objetivo del trabajo

La importancia del lenguaje en los libros de texto de matemática ha sido reconocida por las investigaciones, un relevamiento bastante completo se halla en el segundo capítulo del texto de Morgan (2002, 8-21): en ocasiones la importancia es tal, que se hace coincidir la totalidad de la matemática con un lenguaje, como recoge el aforismo "la matemática es un lenguaje". El lenguaje en que los libros de texto de matemática se hallan escritos tiene peculiaridades que atañen tanto a la forma de referirse a sus objetos y las relaciones que guardan entre ellos como a la naturaleza sintáctica que rige la composición de su sistema simbólico.

En este trabajo se analiza la noción de límite infinito en libros de texto de cálculo diferencial que se utilizan en las distintas carreras de ingeniería de la Argentina. El alcance del término análisis está alineado con la metodología del análisis de contenido, que considera el contenido no como un dato que se extrae del texto, sino como una construcción del analista que interpreta la evidencia empírica de esos textos.

El objetivo es analizar la profundidad en la presentación del concepto de límite infinito en los libros de texto y su relación con la ejercitación propuesta por los mismos. Es decir, hasta qué punto se desarrolla en forma compleja la teoría de límite infinito independientemente del cálculo y si se hace una utilización instrumental en el cálculo de límites.

d. Materiales y métodos

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

La fuente de información utilizada consistió en las Universidades de la Argentina que ofrecen alguna carrera de ingeniería en cualquiera de sus especialidades y que además exhibían en su página web la bibliografía de alguna asignatura cuyos temas son propios del cálculo diferencial. De las 29 universidades relevadas se registró la bibliografía correspondiente y se consignó un total de 56 libros.

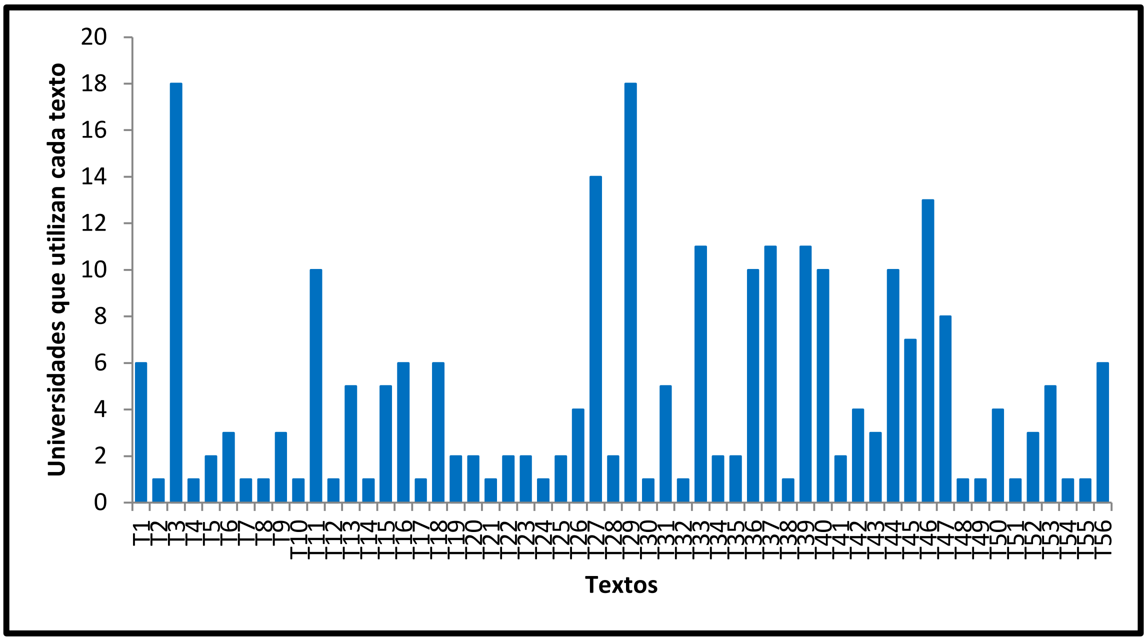


Figura 3: Número de referencias que recibe cada texto. El texto T3 es citado por 18 universidades

Del total de libros de texto se seleccionaron los 6 que eran más recomendados por las instituciones: Apostol, Tom. Calculus Tomo I (T3); Leithold, Louis. El Cálculo (T29); Larson, Ron; Hostetler Robert; Edwards Bruce. Cálculo I (T27); Stewart, James. Cálculo (T46); Rey Pastor, Julio; Pi Calleja, Pedro; Trejo, César. Análisis Matemático Vol. I (T39) y Rabuffetti, Hebe. Introducción al Análisis Matemático (T37).

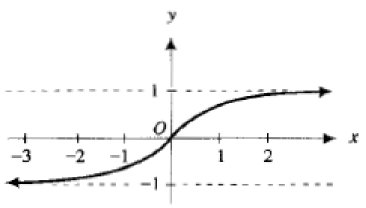
Para poder captar qué aspectos cubre la definición de límite infinito se observó en los textos si la definición abarcaba toda la variedad definitoria de límites con infinito y sus registros visuales. Es decir, si en el texto se incluyen los casos en que el argumento tiende a infinito como aquellos en que la función tiende a infinito y sus combinaciones. La definición debe estar dada en el lenguaje $\varepsilon - n_0$ y las tres definiciones son: para variable finita con límite infinito ($\lim_{x \to a} f(x) = \infty$), para variable infinita con límite finito ($\lim_{x \to \infty} f(x) = L$) y para variable infinita con límite infinito ($\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$). Otro de

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

los indicadores que se tuvo en cuenta es la cantidad de ejemplos en donde aparece la definición de límite infinito y las actividades de los libros de texto.

Sfard realiza un análisis de las relaciones entre los símbolos y los objetos matemáticos que se puede considerar necesario para progresar hacia un enfoque unificado de la cognición matemática. Sfard no acuerda con la concepción de que los signos y los significados son entidades independientes (Godino, 2003, págs. 15,16). Según Sfard (1991) la ambigüedad del simbolismo al representar un proceso y objeto al mismo tiempo puede resultar compleja. Gray & Tall (1991) citan un ejemplo de Sfard (1989) que muestra que el moderno método de concebir una función como el encapsulamiento de un objeto puede causar grandes dificultades. El símbolo f(x) representa tradicionalmente el proceso de calcular el valor de la función para un valor específico de la variable independiente x, y además el concepto de función en general. En este caso el alumno deberá pasar de centrar su atención a la asignación de valores a poder considerar la función como un objeto matemático.

El siguiente ejemplo en torno al límite infinito seleccionado de uno de los libros de texto analizados muestra el uso de la misma notación para representar tanto al proceso como al resultado de ese proceso. El concepto de tender a un límite y el concepto del valor del límite ambos son representados con la misma notación tal como $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.



$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

FIGURA 13

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2}}}{\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x}{|x|}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

Puesto que $x \to +\infty$, $x > 0$; por tanto, $|x| = x$. Así,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{x}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to+\infty} 1}{\sqrt{\lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+0}}$$

$$= 1$$

Figura4: Un segmento de un libro de la muestra (Leithold, El Cálculo, p: 256)

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

A medida que avanza el pensamiento matemático de un sujeto los objetos mentales se construyen de varias formas diferentes y cada una de ellas tiene un estatus diferente. Primeramente los objetos que se observan son percepciones directas del mundo exterior y luego se añaden construcciones personales que están vinculadas con el pensamiento del individuo acerca del mundo externo. En matemática avanzada se usa el símbolo para conectar de manera conveniente los procesos y sus relaciones en la estructura cognitiva. Y aunque en la mente de un individuo no puede haber un objeto físico se tienen los símbolos para manipular sus representaciones como si fueran objetos mentales.

Hay un conjunto de símbolos comunes en matemáticas que introducen la compresión de una forma más sutil que en el lenguaje ordinario. El método de compresión, que los matemáticos usan intuitivamente pero que no expresan en sentido formal es de vital importancia en el desarrollo cognitivo. Sin embargo, la sistematización de un concepto que de algún modo puede resultar natural para un matemático puede no serlo tanto en aquellos individuos que se encuentran en el comienzo del desarrollo cognitivo.

El símbolo $\lim_{x\to\infty} f(x)$ se lee «límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia ∞», o «cuando x se hace infinito», y un límite de la forma $\lim_{x\to\infty} f(x)$ suele llamarse límite en el infinito. La figura 18 ilustra una situación general donde es $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$. Formalmente, $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un número N tan grande, que, para todo x,

$$\text{si } x > N, \text{ entonces } |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Debe quedar clara la analogía con la definición de límites ordinarios: mientras la condición «$0 < |x - a| < \delta$» expresa el hecho de que x está cerca de a, la condición «$x > N$» expresa el hecho de que x es grande.

Hemos dedicado tan poco tiempo a los límites desde arriba y desde abajo, así como a los límites en el infinito, porque la idea general que se oculta tras las definiciones debe quedar clara una vez que se ha comprendido la definición de límites ordinarios (que son, con mucho, los más importantes). Sobre estas definiciones se dan muchos ejercicios en los problemas, los cuales contienen también límites de otros tipos que son útiles en ocasiones.

Figura 5: Un segmento extraído de un libro de la población (Spivak, Cálculo. p: 130, 131)

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

La presentación expuesta en la Figura 5 centrada directamente en la definición le exige al estudiante que interprete las proposiciones que intervienen en la misma vinculándolo con comportamientos matemáticos propios del pensamiento matemático avanzado.

La noción de *procepto* ayuda en el análisis de las dificultades cognitivas relativas al simbolismo y disipa alguna incertidumbre. El nombre de *procepto* tiene incorporado el proceso de encapsulación y posibilita la discusión sobre los distintos tipos de encapsulamiento en diferentes contextos. Los símbolos tales como $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ expresan una relación entre objetos de una forma más compacta que en un lenguaje natural.

Es fundamental hacer una distinción entre la matemática elemental (incluida la geometría) donde los objetos son *descriptos* y la matemática avanzada donde los objetos son *definidos*. En ambos casos el lenguaje se usa para formular las propiedades de los objetos, pero en la matemática elemental la descripción se forma desde la experiencia del objeto y en la matemática avanzada las propiedades de los objetos se construyen a partir de la definición. Vinner (1991) señala que las definiciones dificultan el aprendizaje de la matemática quizás más que cualquier otra cosa, porque evidencia el conflicto entre la estructura de la matemática tal como la conciben los profesionales matemáticos y los procesos cognitivos que intervienen en la adquisición de conceptos. El pasaje de la matemática elemental a la matemática avanzada causa grandes problemas de acomodación cuando se trata de individuos que se inician en el pensamiento matemático avanzado.

A continuación se exhiben párrafos extraídos del texto Análisis matemático de Rey Pastor que muestran algunos resultados. En el texto se presentan dos tipos de definiciones de límite infinito. Las mismas se encuentran en las páginas 381-382. Una de las definiciones se exhibe en la Figura 6.

Diremos entonces, en general, que $\lim f(x) = \infty$ para $x \to a$ cuando para cada número M arbitrariamente grande, exista un número $\delta = \delta(M) > 0$, tal que:

[24-17] $\quad |f(x)| > M \quad$ para $\quad 0 < |x - a| < \delta$.

Figura 6: Definición de límite infinito para variable finita. La misma se extrajo del texto Rey Pastor, Julio; Pi Calleja, Pedro; Trejo, César. Análisis matemático. Edit. Kapelusz, 1969, octava edición, pág. 381

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

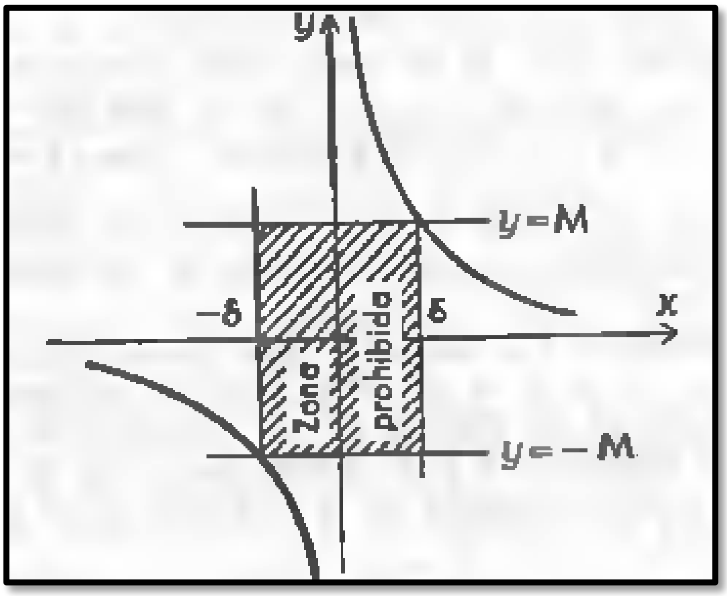


Figura 7: Gráfico extraído del texto Rey Pastor, Julio; Pi Calleja, Pedro; Trejo, César. Análisis matemático. Edit. Kapelusz, 1969, octava edición, pág. 381

También se observó si estaba presente la definición de límite infinito en los ejemplos :

EJEMPLOS: 1. La sucesión

$$\left\{\frac{1}{n}\right\}: \quad 1, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{3}, \ \frac{1}{4}, \ \ldots, \ \frac{1}{n}, \ \ldots,$$

tiene por límite cero, porque la diferencia es $\frac{1}{n} - 0 = \frac{1}{n} < \varepsilon$, tomando $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Por ejemplo, es $\frac{1}{n} < 0.01$ desde el término que ocupa el lugar 101 en adelante.

Escribiremos, pues: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Figura 8: Ejemplo extraído de la sección de límite infinito del texto Rey Pastor, Julio; Pi Calleja, Pedro; Trejo, César. Análisis matemático. Edit. Kapelusz, 1969, octava edición, pág. 273

Siguiendo con el análisis de los libros de texto de la muestra se pretende caracterizar también cuál es el tratamiento que se hace en la ejercitación propuesta por los libros de textos del concepto de límite infinito.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

A continuación se transcriben tres ejercicios de libros de texto de la muestra analizados.

En los Ejercicios 1-4, averiguar si $f(x)$ tiende a ∞ o a $-\infty$ cuando x tiende a -2 por la izquierda o por la derecha.

4. $f(x) = \sec \dfrac{\pi x}{4}$

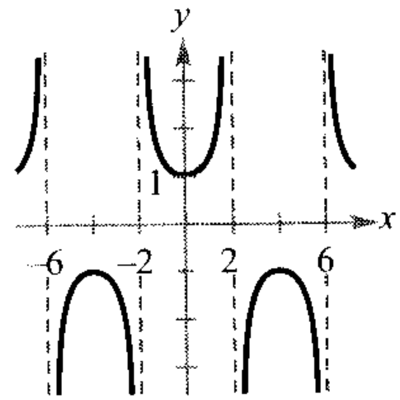


Figura 9: Ejercicio transcripto del texto Larson, Hostetler, Edwards; Cálculo I, pág. 85.

Para resolver este ejercicio no se precisa ningún cálculo y además en el contexto resulta muy sencillo. Sólo requiere conocer el concepto de límite infinito para variable finita y para responder lo que pide el enunciado se debe apelar a una interpretación gráfica.

26. Hallar c de modo que

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x + c}{x - c} \right)^x = 4.$$

Figura 9: Ejercicio transcripto del texto Apostol, Tom; Calculus Tomo I, pág. 371.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

En este ejercicio como el valor del límite ya se conoce, lo que se pretende es que use ese resultado para determinar el valor del parámetro c. Es un problema no rutinario porque la incógnita no es el resultado sino un parámetro, una suerte de problema inverso. El alumno debe analizar el problema y cambiar el foco de la atención de la variable habitual (x) a una constante (c), que debe considerar fija pero cualquiera. Esto obliga al alumno a salir del cálculo rutinario. Una posible resolución de un alumno sería la siguiente:

Dado que el enunciado del ejercicio lo remite a una indeterminación conocida donde interviene el infinito, 1^{∞}, el alumno deberá cuadrar la información que tiene de este tipo de indeterminación ($\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$) con el formato del ejercicio. Como la expresión $\frac{x+c}{x-c}$ es equivalente a $1+\frac{x+c}{x-c}-1$, resulta $\frac{x+c}{x-c}=1+\frac{2c}{x-c}$, a partir de aquí considerando propiedades de la potenciación resulta $\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}=\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-c}{2c}}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}$, luego calcular el límite $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^{x}$ equivale a calcular $\lim_{x\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x-c}{2c}}\right)^{\frac{x-c}{2c}}\right]^{\frac{2cx}{x-c}}$, de donde se obtiene que $e^{2c}=4$ y de allí el valor de $c=ln2$. En este procedimiento el alumno debe analizar la situación y justificar cada uno de los pasos de la resolución para resolver este problema no rutinario.

60. Demuestre que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+3}{2x-1}=4$$

aplicando la definición 3.7.2; esto es, para cualquier $\epsilon>0$ existe un número $N<0$ tal que si $x<N$, entonces

$$\left|\frac{8x+3}{2x-1}-4\right|<\epsilon$$

Figura 10: Ejercicio transcripto del texto Leithold, Louis; El Cálculo, pág, 260.

El cálculo instrumental del $\lim_{x\to-\infty}\frac{8x+3}{2x-1}=4$ no ofrece dificultades para cualquier alumno que conozca las propiedades básicas del álgebra de límites y alguna estrategia de resolución; sin embargo, de acuerdo con la corriente del pensamiento matemático avanzado (AMT) mostrar que existe un $N<0$ y que para los $x<N$ se

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

cumple la definición es una tarea con una exigencia cognitiva superior dado que requiere haber encapsulado previamente el concepto de límite en un objeto, y no como un proceso.

Este ejercicio necesita que el alumno conozca la definición de límite finito para variable infinita donde además la variable tiende a un infinito con signo negativo $-\infty$. Debe además realizar algún tipo de cálculo y usar propiedades para poder hallar el número N. Además, una vez hallado el N debe realizar la secuencia correspondiente para ir de la hipótesis a la tesis. El alumno debe establecer relaciones para poder aplicar sus conocimientos. Conocer la definición significa poder hallar el N como un problema inverso para luego realizar la prueba como problema directo.

Teniendo presente la definición, se quiere determinar un número $N < 0$ tal que para todo $x < N$ resulte $\left|\frac{8x+3}{2x-1} - 4\right| < \varepsilon$. Operando en $\frac{8x+3}{2x-1} - 4$ se tiene $\left|\frac{8x+3}{2x-1} - 4\right| = \frac{7}{|2x-1|}$ y teniendo en cuenta que $x < 0$, aplicando la definición de valor absoluto resulta $\frac{7}{|2x-1|} = \frac{7}{1-2x} < \frac{7}{-2x}$ y como se quiere que sea menor que ε, resulta $x < \frac{-7}{2\varepsilon}$. A partir de aquí se efectúa la demostración yendo de la hipótesis a la tesis. Se debe hacer hincapié que una vez hallado el N hay que hacer la prueba usando las acotaciones realizadas previamente. El proceso mental que consiste en ir de la hipótesis a la tesis se encapsula en un objeto de nivel superior.

e. Resultados

Del análisis de las bibliografías y los textos más utilizados en ingeniería se observa que del límite infinito se hace un procedimiento antes que una noción, y esos procedimientos no necesitan de las precisiones de Cauchy (1789-1857) y Weierstrass (1815-1897), y bien podrían ejecutarse sin utilizar la definición de límite infinito en términos épsilon-delta.

La ejercitación que proponen los libros de texto, en general, apelan más a un uso instrumental del límite infinito que a una aplicación conceptual.

Cornu (1991) en un trabajo denominado *Límites* establece que las dificultades en su enseñanza y aprendizaje residen tanto en la complejidad del concepto como en su alcance y es por eso que los aspectos cognitivos no pueden ser obtenidos desde la definición matemática. Para los alumnos el concepto de límite es un concepto árido, difícil de aprender, y por otra parte difícil de enseñar. Los aspectos cognitivos que están implicados en la definición de límite no pueden generarse únicamente a partir de la definición. De acuerdo a Vinner es muy importante la distinción entre la definición y el concepto mismo, pudiéndose recordar la definición sin haber adquirido los conceptos fundamentales.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

f. Referencias

Apostol, Tom. *Calculus.* Vol. I. II vols. Barcelona: Reverté S. A, 1984.
Azcárate Giménez, Carmen & Camacho Machín, Matías. «Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático.» *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana* X, nº 2 (2003): 135-149.
Azcárate Giménez, Carmen. «Definiciones, demostraciones ¿porqué?, ¿cuándo? y ¿cómo?»1993. http://www.guiasensenanzasmedias.es/verpdf.asp?area=mates&archivo=GR107.pdf (último acceso: 24 de Marzo de 2012).
Bagni, Giorgio T. «Infinito e infintesimo potenziale e attuale: una sfida per la Scuola Secondaria Superiore.» *Bolletino dei Docenti di Matematica* (Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza") II, nº 42 (2001): 9-20.
Capitán, Manuel Hernán. «Historia de las matemáticas: El Infinito.» s.f. http://www.astroseti.org/articulo/3482/ (último acceso: 20 de Enero de 2011).
Carlino, Paula. *Escribir, leer y aprender en la universidad. Una introducción a la alfabetización académica.* Primera edición, cuarta reimpresión. Buenos Aires: Fondo de cultura económica, 2009.
Cornu, B. «Limits.» En *Advanced Mathematical Thinking*, de Tall D, 153-166. Dordrecht: Kluwer Academic Press, 1991.
D'Amore, Bruno, y otros. *El sentido del infinito.* 2006. http://www.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/644%20%20al%20Sentito%20del%20infinito.pdf (último acceso: 1 de marzo de 2010).
David, Tall. «Biological brain, mathematical mind and computational computers. Plenary presentation for ATCM conference, Chang Mai, Thailand, december 2000.» s.f. (último acceso: 23 de abril de 2010).
Díaz García, Lorena, y Miguel Ángel Vilela García. «El infinito matemático.» *Universidad de La Laguna. Canarias.* 20 de Enero de 2005. http://www.miguev.net/blog/wp-content/uploads/2005/01/El_Infinito_Matematico.pdf (último acceso: 15 de julio de 2011).
Dreyfus, Tommy. «Advanced mathematical thinking processes.» *En: Tall, D. (Ed.).Advanced mathematical thinking.* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.), 1991.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

Dubinsky, Ed. «Reflective abstraction in advanced mathematical thinking.» *En: Tall, D. (Ed.).Advanced mathematical thinking.* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.), 1991.
Fischbein, Efraim. «Psychology and Mathematics Educations.» *Mathematical Thinking and Learning* 1 (Marzo 1999): 47-58.
Fischbein, Efraim. «Tacit Models and Infinity.» *Educational studies in mathematics* 48, nº 2-3 (Noviembre 2001): 309-329 (21).
Fischbein, Efraim, Dina Tirosh, y P Hess. «The intuition of infinity.» *Educational studies in mathematics* 10, nº 1 (Marzo 1979): 3-40.
Garbin, Sabrina. «Ideas del infinito, percepciones y conexiones en distintos contextos: El caso de estudiantes con conocimientos previos de cálculo.» *Enseñanza de las Ciencias* 25 (1) (2005): 61-80.
Garbin, Sabrina, y Carmen Azcárate. «Infinito actual e inconsistencias: acerca de las incoherencias en los esquemas conceptuales de alumnos de 16-17 años.» *Enseñanza de las Ciencias* 20 (1) (2002): 87-113.
Godino, J. *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición e instrucción matemática. Monografía de investigación para el concurso a cátedra de universidad. Departamento de didáctica de la matemática. Universidad de Granada.* 2003. http://www.ugr.es/local/jgodino (último acceso: 3 de abril de 2011).
Gray, Eddie, y David Tall. «Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathemtical Thinking.» *Mathematics Education Research Centre. University of Warwick.* 1991. http://www.tallfamily.co.uk/eddiegray/91c-procept-pme.pdf (último acceso: 28 de Enero de 2012).
Krippendorff, Klaus. *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica.* Traducido por Leandro Wolfson. Barcelona: Paidós, 1990.
Larson, Ron, Robert Hostetler, y Bruce Edwards. *Cálculo I.* Séptima. Madrid: Pirámide, 2002.
Leithold, Louis. *El Cálculo.* Séptima. México: Harla, 1998.
Lizcano, E. *Imaginario colectivo. La construcción social del número y el infinito.* Paidos, 1993.
López Pellicer, Manuel. «La estructura racional del pensamiento matemático. El infinito matemático.» *Real Academia de Ciencias.* 2005. http://www.rac.es/ficheros/doc/00352.pdf (último acceso: 14 de Julio de 2011).
Machado, Alexander Maz. «Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas.» 2009.
http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIII-AlexanderMaz.pdf (último acceso: 1 de Marzo de 2013).
Mateos, Mar. «Aprender a leer textos académicos: más allá de la lectura reproductiva.» Cap. VI de *Psicología del aprendizaje universitario: La formación en competencias*, de Juan Ignacio Pozo y María Puy Pérez Echeverría, 106-119. Madrid: Morata, 2009.
Moore, A. W. *The infinite.* London and New York: Routledge. Taylor & Francis Group, 1990.
O' Connor, J. J, y E. F Robertson. *Mac Tutor History of Mathematics.* Febrero de 2002. http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Infinity.html (último acceso: 2 de Mayo de 2010).
Ortiz, José Ramón. «El concepto de infinito. Boletín de la Asociación Matemática Venezolana.» I, nº 2 (1994): 59-81.
Pérez, Javier. «Números y límite. El infinito matemático.» *Universidad de Granada.* s.f. http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/fchamizo/asignaturas/calc1inf1011/apjperez/calculo_cap05.pdf (último acceso: 14 de Julio de 2011).
Rabuffetti, Hebe. *Introducción al Análisis Matemático.* Décima. Buenos Aires: El Ateneo, 1986.
Recalde, Luis Cornelio. «La lógica de los números infinitos: un acercamiento histórico.» *Enseñanza Universitaria* XII, nº 1 (junio 2004): 51-72.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

Rey Pastor, Julio, Pedro Pi Calleja, y César A Trejo. *Análisis matemático.* Vol. I. III vols. Buenos Aires: Kapelusz, 1969.
Rey Pastor, Julio, y José Babini. *Historia de la Matemática. De la Antigüedad a la Baja Edad Media.* Primera edición. Vol. I. II vols. Barcelona: Gedisa, 1984.
Rezat, Sebastian. *A Model of Textbook Use.* Vol. 4, de *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, de Jarmila Novotná,
Sartorio, Ana Carolina. *Conjuntos e Infinitos.* Primera edición. Buenos Aires: Eudeba, 2000.
Schubring, Gert. «On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author.» *For the learning of mathematics* VII, nº 3 (1987): 41-51.
Sfard, Anna. «On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.» *Educational Studies in Mathematics* 22 (1991): 1-36.
Stewart, James. *Cálculo.* Cuarta. México: Thomson Learning, 2002.
Tall, D. «Cognitive growth in elementary and advanced nathematical thinking.» Editado por 1 Actas del PME 19. 1995. 61-75.
Tall, D. O, y R. L. E Schwarzenberg. «Conflicts in the learning of real numbers and limits; Published in Mathematics Teaching, 82,44-49 (1978).» *The University of Warwick. David Tall, Professor in Mathematical Thinking.* 1978. http://www.warwick.ac.wk/staff/David. Tall/themes/limits-infinity.html (último acceso: 23 de abril de 2010).
Tall, David. «A child thinking about infinity.» *The University of Warwick. David Tall, Professor in Mathematical Thinking.* 2001. http://www.warwick.ac.wk/staff/David. Tall/themes/limits-infinity.html (último acceso: 23 de abril de 2010).
Tall, David. «Introducing Three Worlds of Mathematics.» *For the Learning of Mathematics* 29, nº 3 (2004a): 29-33.
Tall, David. «Intuitive infinitesimals in the calculus. Poster presented at the fourth international congress on mathematical education. Berkeley, 1980, with abstract appearing in abstracts of short communications, page c5.» *The University of Warwick. David Tall, Professor in Mathematical Thinking.* 1980a. http://www.warwick.ac.wk/staff/David. Tall/themes/limits-infinity.html (último acceso: 23 de abril de 2010).
Tall, David. «Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. Published in proceedings of the fourth international conference for the psychology of mathematics education. Berkeley, 170-176 (1980).» *The University of Warwick. David Tall, Professor in Mathematical Thinking.* 1980. http://www.warwick.ac.wk/staff/David. Tall/themes/limits-infinity.html (último acceso: 23 de abril de 2010).
Tall, David. «Natural and formal infinities.» *The University of Warwick. David Tall, Professor in Mathematical Thinking.* 2001. http://www.warwick.ac.wk/staff/David. Tall/themes/limits-infinity.html (último acceso: 23 de abril de 2010).
Tall, David. «The notion of infinite measuring number and its relevance in the intuition of infinity. Published in educational studies in mathematics, 11, 271-284, 1980.» *The University of Warwick. David Tall, Professor in Mathematical Thinking.* 1980b. http://www.warwick.ac.wk/staff/David. Tall/themes/limits-infinity.html (último acceso: 23 de abril de 2010).
Tall, David. «The psychology of advanced mathematical thinking.» En *Advanced mathematical thinking*, de David Tall, 3-21. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.
Tall, David. «Understanding the Processes of Advanced Mathematical Thinking.» *Mathematics Education Research Centre. University of Warwick. Coventry, U K.* 1994. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1996i-amt-pub-am.pdf (último acceso: 19 de Abril de 2012).

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495

Tall, David, y Dina Tirosh. «Infinity- The never- ending struggle.» *Educational studies in mathematics* 48, nº 2-3 (noviembre 2001): 129-136(8).
Tirosh, Dina. «The role of student' intuitions of infinity in teaching the cantorian teory.» *En: Tall, D. (Ed.).Advanced mathematical thinking.* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.), 1991.
Vinner, Shlomo. «The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.» *En: Tall, D. (Ed.).Advanced mathematical thinking.* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.), 1991.
Waldegg, Guillermina. «Homenaje a una trayectoria. Compiladora Irma Fuenlabrada.» *Universidad Pedagógica Nacional. México.* 2008. www.upn.mx (último acceso: 15 de Enero de 2013).
Waldegg, Guillermina. «Identificación de obstáculos didácticos en el estudio del infinito actual.» *Revista Mexicana de Investigación Educativa* I, nº 1 (Enero-Junio 1996): 107-122.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 495