CONGRESO IBEROAMERICANO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA, INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN
BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO
BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVEMBRO 2014

Un modelo pedagógico de enseñanza de la geometría euclidiana

QUINTERO, O.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

Un modelo pedagógico de enseñanza de la geometría euclidiana

Olga Lucía Quintero Fonseca Ed.D.
Departamento de Matemáticas, Universidad del Turabo
Puerto Rico
oquintero@suagm.edu

Resumen

Desde una postura constructivista, y bajo el paradigma de investigación cualitativa, la autora comparte el proceso de una investigación acción en torno al problema de enseñanza aprendizaje del proceso de demostrar en geometría euclidiana.

Esta investigación se propuso inquirir, observar, analizar y enriquecer las prácticas pedagógicas de una clase de geometría euclidiana dirigida estudiantes universitarios futuros maestros de matemáticas de nivel secundario en Puerto Rico.

La propuesta metodológica utilizada, que implementa el proceso de reflexión permanente como estrategia de aproximación al desarrollo de la destreza de demostrar en geometría, contribuyó a: (1) desarrollar una actitud más asertiva por parte de los estudiantes frente a la tarea de demostrar en geometría; (2) generar una mayor conciencia del nivel de apropiación y profundidad de algunos conceptos de geometría euclidiana por parte de los estudiantes; y (3) el reconocimiento del gran aporte del trabajo colaborativo en la adquisición de la destreza para desarrollar, probar y proveer justificaciones basadas en el método deductivo.

Se concluye en el estudio que el proceso reflexivo permanente apoya y estimula en los participantes (1) el descubrimiento consciente de su propio estilo de aprendizaje respecto al desarrollo de la destreza de demostrar en geometría; (2) la construcción de una comunidad de indagación reflexiva creativa. Y como contribución creativa se presenta una propuesta metodológica para la enseñanza de conceptos geométricos y de la destreza de demostrar.

Palabras clave: cualitativa, investigación acción, geometría, demostración, didáctica, formación de maestros.

Introducción

Uno de los mayores retos a los que se enfrentan los maestros de matemáticas de nivel intermedio en Puerto Rico es el de enseñar a demostrar en geometría.

La demostración se constituye en un proceso de validación de conocimiento matemático. Como afirma Hanna “La demostración formal nace como una respuesta a la demanda continua de justificación, una demanda que se remonta a Aristóteles y

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

Euclides" (Hanna, 1996, p.30) Son los griegos quienes ponen la matemática en un nivel de abstracción que se separa de lo tangible,y lo ubica en un espacio axiomático en el que se hace posible el crecimiento del conocimiento bajo un contexto teórico.

Los escenarios en los que cobra importancia la demostración son descritos por Godino. Batanero y Recio en cuatro grupos: (1) en los espacios de construcción de conocimiento matemático, desarrollado por los matemáticos puros para los que la demostración formal responde a la preocupación de justificar una afirmación. (2) El segundo escenario es el constituido por las comunidades de científicas que hacen uso de conocimiento matemático, los expertos en ciencias experimentales; (3) en la vida cotidiana en el cual las personas usan argumentos informales; y (4) en el salón de clase, donde los maestros son los protagonistas (Godino y Batanero, 1994; Godino y Recio, 2001).

Este último escenario, el salón de clases, es un espacio en el cual las interacciones están mediadas por normas establecidas por los organismos que les establecen sus directrices. En el caso de Puerto Rico, las acciones que se llevan a cabo en el salón de clase, particularmente de matemáticas enmarcadas en las directrices trazadas por el Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR) que a su vez tiene una referencia que guía sus determinaciones que es el Concilio Nacional de Maestros de Matemáticas (NCTM por sus siglas en inglés).

El DEPR establece que el maestro es un facilitador de las oportunidades de aprendizaje y un diseñador de currículo instruccional que atiende a las necesidades de los estudiantes (DEPR, 2003b). Las exigencias profesionales al maestro de matemáticas de nivel intermedio en Puerto Rico, incluyen el desarrollo de diversas áreas de Competencia Matemática como señala Kilpatrick, Swafford, y Findell (2001), capacidad de razonamiento lógico y de reflexionar, explicar y justificar (DEPR, 2010f, 14). Particularmente, el bosquejo de contenido del curso: Matemática 8 (DEPR,2010g), en el estándar de geometría señala para el contenido de geometría, el objetivo que el estudiante adquiera la destreza para desarrollar, probar y proveer justificaciones basadas en el método inductivo y deductivo.

El maestro de matemáticas de nivel intermedio en su quehacer pedagógico debe proveer al estudiante de situaciones de aprendizaje en las cuales el estudiante comprenda la naturaleza de los sistemas axiomáticos; y, desarrolle, pruebe y provea justificaciones basadas en el método inductivo y deductivo para establecer conjeturas que involucran líneas, ángulos y figuras (DEPR,2010a).

Estas experiencias de aprendizaje solo pueden ser promovidas por los maestros si es que ellos las poseen, y son capaces de crearlas y/o recrearlas para sus estudiantes, si ellos mismos hacen uso de razonamientos matemáticos en la solución de problemas y son capaces de asociarlas a situaciones cotidianas y a conocimientos previamente adquiridos, y más aún si ellos mismos han sido expuestos a procesos de análisis de los tipos de demostración y a la experiencia de realizar de demostraciones.

De esto se sigue la trascendencia que tiene las creencias, conocimiento y prácticas metodológicas, tanto de los profesores que forman maestros de matemáticas como de los maestros en formación que se enfrentarán a los retos y requerimientos que establecen las políticas institucionales del DEPR.

En nuestra experiencia, como profesores de matemáticas, y más aún de futuros maestros de matemáticas de nivel intermedia, nos enfrentamos al problema

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

que representa para los estudiantes futuros maestros de matemáticas el desarrollar la destreza de demostrar, y particularmente de hacer demostraciones geométricas que es un requisito para su desempeño profesional.

Se hace evidente la necesidad de entender la complejidad de problemática de desarrollar la destreza de realizar demostraciones geométricas por parte de los futuros maestros de matemáticas. Es necesario reconocer las estrategias que contribuyen a desarrollar un mejor aprendizaje del mismo.

Particularmente, en los cursos de geometría que impartimos a futuros maestros de matemáticas, nos sentimos comprometidos a reflexionar sobre el propio quehacer pedagógico, y propiciar el entorno pedagógico apropiado para enriquecer el proceso de enseñanza aprendizaje de las demostraciones geométricas.

Objetivo de la investigación

Este estudio se propuso observar, analizar y reflexionar sobre las prácticas pedagógicas de una clase de geometría euclidiana con el fin de enriquecer, de una manera reflexiva y crítica, la apropiación de algunos conceptos de geometría euclidiana y sus propiedades, y mejorar el desarrollo de la destreza de demostrar en geometría en los futuros maestros de matemáticas.

Reconociendo esta dificultad de desarrollar la destreza de demostrar en geometría como un problema vigente en la comunidad de educación matemática y nuestra responsabilidad como profesores, nos propusimos analizar esta problemática en el salón de clase con los protagonistas de este problema, los estudiantes y el profesor de la clase.

Este informe de investigación da cuenta de un proceso de sistematización de experiencias de enseñanza aprendizaje obtenidas en un curso de geometría euclidiana ofrecida a estudiantes de un programa de bachillerato en educación matemática nivel secundario de una universidad privada de Puerto Rico, que responde a los siguientes interrogantes:

1. ¿Qué estrategias contribuyen a la adquisición de la destreza de desarrollar demostraciones geométricas, probar y proveer justificaciones?
2. ¿Qué conocimientos, destrezas y/o habilidades son necesarias para realizar una demostración geométrica?
3. ¿cómo incide el uso de las demostraciones geométricas en la apropiación de conceptos geométricos?
4. ¿Cómo incide el trabajo colaborativo en el desarrollo de destrezas de verificación y demostración geométrica?
5. ¿Cómo inciden los procesos de autoevaluación y coevaluación en el proceso de enseñanza aprendizaje?

Marco Teórico

Nuestro estudio se ubica en el paradigma constructivista, reconociendo el principio que el sujeto construye de manera activa su conocimiento, y construye los conceptos por interacción con los objetos y con otros sujetos.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

En nuestro estudio se utilizaron como referente teórico el constructivismo y la base sicológica que sostiene este propuesta es la teoría de Vygostky. Se considera el proceso educativo como uno eminentemente social, centrado en el estudiante. Este modelo también toma algunas de las ideas de la teoría de Categorización de Bruner (1988), reconociendo el papel de la actividad como componente esencial en el proceso de aprendizaje, en lo que coincide con Vygostky, (1979). Además este modelo reconoce que el estudiante necesita la experiencia de descubrimiento del conocimiento, para aprender un concepto significativamente.

El enfoque de la enseñanza de la geometría en muchos casos la presenta como un producto final obtenido de la creación matemática, lo cual ha sido persistentemente criticado. En efecto, De Villiers (1996b), cita a Hans Freudenthal (1973:417-418) y a Benchara Blandford (1908) (citado en Griffiths & Howson, 1974: 216-217) para señalar que ellos fueron críticos de enseñar la geometría como una serie de productos ya acabados, quizás olvidando que efectivamente la geometría plana se constituye en una herramienta muy poderosa para el desarrollo del razonamiento tanto inductivo como deductivo.

En Puerto Rico, el modelo sugerido por el DEPR (2003b) para el desarrollo del pensamiento geométrico, menciona el modelo de desarrollo del pensamiento geométrico propuesto en 1959, por Pierre van Hiele y Dina van Hiele –Geldof.

Burger, W.F.; Shaughnessy J.M. (1986) en *Characterizing the Van Hiele levels of development in geomertry* confirman que, el modelo de Van Hiele de desarrollo en geometría puede servir como base para realizar experimentos de enseñanza constructivista en geometría. Usiskin (1982, citado por De Villiers, 1996a), señala cuatro características importantes a tener en cuenta en el modelo Van Hiele son: (*i*) cada nivel tiene un lenguaje específico, el simbolismo y los procesos de inferencia son progresivamente mejorados en cada nivel; (*ii*) los estímulos cognitivos adecuados propician el avance al próximo nivel; (*iii*) cambiar de nivel significa estar en capacidad de aplicar determinadas operaciones a nuevos objetos, usando un nuevo orden de pensamiento; (*iv*) los niveles y su adquisición están asociados al lenguaje utilizado y al significado de los contenidos.

El modelo de Van Hiele, establece que el aprendizaje de la geometría se logra superando cinco niveles a saber (De Villiers, 1996a; Battista, 2007; DEPR, 2000): (0) visualización: reconocimiento de formas comunes, (1) análisis: conceptualizar y especificar formas y sus elementos y características, (2) abstracción, (3) deducción formal: razonamiento inferencial, establecimiento de propiedades de las formas, construcción de definiciones jerárquicas y (4) rigor matemático: es en este último en el cual el estudiante alcanza la comprensión del papel de los axiomas, definiciones y demostraciones, produce conjeturas y las verifica deductivamente (De Villiers, 1996a; Battista, 2007).

En el modelo de Van Hiele se asumen las siguientes premisas: el aprendizaje de la geometría se hace superando los niveles de pensamiento descritos; los niveles no van asociados a la edad, de hecho, una misma persona puede estar en diferentes niveles, esto dependiendo del concepto al cual se refiera; cada nivel tiene un lenguaje específico; el simbolismo y los procesos de inferencia son progresivamente mejorados

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

en cada nivel; los estímulos cognitivos adecuados propician el avance al próximo nivel; cambiar de nivel significa estar en capacidad de aplicar determinadas operaciones a nuevos objetos, usando un nuevo orden de pensamiento; los niveles y su adquisición están asociados al lenguaje utilizado y al significado de los contenidos (solo se asimila lo que es posible según el nivel de razonamiento del individuo).

La Figura 1 esquematiza los niveles de este modelo modificadas por Hoffer (1981)

Figura 1 Modelo modificado de los Niveles de Van Hiele, por Hoffer (1981)

Los elementos de este modelo tienen características generales comunes, a saber:

- ✓ Cada nivel tiene un lenguaje específico, el simbolismo y los procesos de inferencia son progresivamente mejorados en cada nivel.
- ✓ Los estímulos cognitivos adecuados propician el avance al próximo nivel
- ✓ Cambiar de nivel significa estar en capacidad de aplicar determinadas operaciones a nuevos objetos, usando un nuevo orden de pensamiento
- ✓ Los niveles y su adquisición están asociados al lenguaje utilizado y al significado de los contenidos (solo se asimila lo que es posible según el nivel de razonamiento del individuo)

Kilpatrick, Gomez y Rico, (1995) dan características de esta postura epistemológica para la educación matemática. Una de ellas es que las estructuras cognitivas se encuentran en continuo desarrollo, se transforman por la interacción del sujeto con el objeto de aprendizaje, y con otros sujetos cognoscentes o expertos. Segundo, la construcción de conocimientos matemáticos requiere un proceso de abstracción reflexiva.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

La abstracción es un proceso en el cual los objetos son conocidos por sus propiedades invariantes (Vergnaud, 1987). La abstracción implica el uso de un mismo esquema mental para situaciones semejantes, asi como el establecimiento de una forma de relación dialéctica entre el objeto y sus formas de representación. También en la abstracción los símbolos simplifican y crean vínculos que contextualizan los objetos al obtener sus invariantes.

La geometría plana se constituye en una herramienta muy poderosa para el desarrollo del pensamiento deductivo, el cual implícitamente considera el desarrollo de la capacidad de abstracción. Además es un espacio intelectual en el cual es factible dar paso a ejercicios de matematización como reconocimiento de patrones, generalizaciones, elaboración de conjeturas y demostraciones, etcétera; elementos que contribuirían eficientemente en procesos de enseñanza aprendizaje constructivista. De Velliers (1996b) cita:

> "... la mayoría de las definiciones no han sido el comienzo sino el toque final de la actividad organizativa. No debería privarse a los niños de este privilegio... Una buena enseñanza de la geometría puede significar más aprender a conceptualizar y aprender qué es conceptualizar; aprender a definir y aprender qué es una definición. Significa conducir a los alumnos a comprender por qué una cierta organización, un cierto concepto, una cierta definición es mejor que otra "(Hans Freudenthal,1973)

En este estudio se consideraron las siguientes afirmaciones como orientadoras de la práctica docente:

- ⇨ El conocimiento previo del estudiante acerca del concepto que estudia, y la calidad de las experiencias o actividades de aprendizaje que haya realizado, si ellas realmente fueron educativas o no (Bruner, 1961, 1963; Vygostky, 1979).
- ⇨ Los estudiantes lograrán alcanzar los próximos niveles de desarrollo cognoscitivo, mediante la interacción con sus pares y con el profesor, lo cual se fundamenta en la teoría de Vigostky acerca de la zona de desarrollo próximo.
- ⇨ "El progreso de un nivel al otro es más dependiente de la instrucción que de la edad o la maduración biológica, y que los tipos de experiencias instruccionales por las que pasa el individuo puede afectar el progreso" (Van Hiele, según cita Denis (1996, p. 33).
- ⇨ Aprender a conceptualizar y aprender qué es conceptualizar; aprender a definir y aprender qué es una definición; construir demostraciones de una manera lógica y concatenada, son objetivos fundamentales en la formación de un futuro maestro de matemáticas de nivel intermedio.

Demostrar

Los procesos demostrativos son instrumentos que aportan a las personas, moldean una forma de pensar y por ende de actuar, en esos términos la demostración

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

en sí misma es una parte integrante de cualquier currículo educativo y particularmente de matemáticas.

La adquisición de la capacidad de razonamiento formal y el aprendizaje de los métodos de demostración formal en matemáticas es un tema que en las últimas cuatro décadas ha tenido especial dedicación por parte los investigadores en didáctica de las matemáticas. A continuación se mencionarán algunas de los trabajos más relevantes que se han realizado en torno la problemática de identificar las funciones que cumplen las demostraciones.

Bell (1976) plantea que la demostración puede tener diversos objetivos a saber: verificar, iluminar, sistematizar. Verificar para asegurar la veracidad de una afirmación, iluminar cuando además de verificar permite entender por qué la afirmación es cierta, sistematizar cuando permite organizar el enunciado en el contexto de un sistema axiomático, unas definiciones y otros teoremas.

De Villiers (1993) aumenta esta lista de objetivos para la realización de una demostración, incluye descubrir y comunicar, descubrir cuando la demostración implica descubrimiento de nuevos resultados, y comunicar cuando la demostración trasmite conocimientos matemáticos a otras personas. Ibañes (2001b) profundizando en el modelo de De Villiers, habla de la verificación con una doble función comprobar y convencer.

Por su parte Hanna (2000), siguiendo a Bell y De Villiers agrega como una de las funciones de las demostraciones la de *construcción* de una teoría empírica:

- ✓ *Exploración* del significado de una definición o exploración de la consecuencia de una afirmación.
- ✓ *Incorporación* de un nuevo conocimiento.

Otra función de la demostración es la de convencer, afirma Hersh (citado por Ibañes, 2001a) y que diferencia entre *convencer* a expertos y convencer a aprendices. Van Asch (citado por Ibañes, 2001a) señala como funciones de la enseñanza de la demostración con respecto a los estudiantes las siguientes: *aprender, entender, comprender, desarrollar habilidades comunicativas, obtener los conceptos de generalización, particularización* y *analogía.*

Recio (2001) destaca una cita de De Villiers donde menciona que para que los profesores de matemáticas incluyan la demostración como una actividad significativa éstos deberían haberse formado en situaciones similares durante su propio proceso de formación profesional docente.

En este contexto, Recio (2001) se plantea diferenciar entre el papel de la:

- ✓ Demostración en la enseñanza (lo que ocurre con la demostración en el quehacer docente).
- ✓ Enseñanza de la demostración (lo que habría que hacer para enseñar a demostrar).

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

El autor también hace distinción adicional las funciones de la demostración en la enseñanza universitaria:

1) Como parte esencial del contrato didáctico en matemáticas: por una parte el profesor se vea obligado a demostrar en clases.
2) El estudiante alerta a descubrir cualquier error en la demostración.

Acerca de lo que el proceso demostrativo aporta al estudiante, Balacheff (1999) afirma que la responsabilidad frente a las actividades matemáticas que realiza, y al maestro la posibilidad de acompañar al estudiante en su disfrute de la apropiación del conocimiento no sólo de manera intuitiva sino formal, lo cual también incide en una forma de interacción social diferente a la tradicional en donde la prueba no es la constante.

Enseñanza y aprendizaje de la demostración

La adquisición de la capacidad de razonamiento formal y el aprendizaje de los métodos de demostración formal en matemáticas es un tema que en las últimas cuatro décadas ha tenido especial dedicación por parte los investigadores en didáctica de las matemáticas. Harel & Sowder (2007) cita a (Ball & Bass, 2003; Haimo, 1995; Schoenfeld, 1994) afirmando que "nadie cuestiona sobre la importancia de probar en matemáticas y en la matemática escolar". A Ballacheff se le reconoce como el pionero en el área de enseñanza y aprendizaje de la demostración (Harel & Sowder, 2007, p.807) Acerca de lo que el proceso demostrativo aporta al estudiante, Balacheff (1999) afirma que el estudiante se beneficia de adquirir la responsabilidad frente a las actividades matemáticas que realiza, y al maestro lo enriquece la posibilidad de acompañar al estudiante en su disfrute de la apropiación del conocimiento no sólo de manera intuitiva sino formal, lo cual también incide en una forma de interacción social diferente a la tradicional en donde la prueba no es la constante.

En un esfuerzo por comprender integralmente el problema de la enseñanza y el aprendizaje de la prueba (Harel & Sowder, 2007) realizan un abordaje holístico del mismo, desde los factores (1)histórico-epistemológicos: las concepciones respecto a las pruebas; (2) socio-culturales: identidicar el tipo de intervenciones instruccionales; (3) cognitivos: identificando las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de este proceso de probar, y sus causas, las actitudes hacia probar; y (4) matemáticos; lo que es probar desde la perspectiva de la matemática contemporánea. Es de anotar que el término prueba en este estudio de Harel & Sowder tiene una interpretación subjetiva, la prueba es algo que establece una verdad para un individuo o una comunidad (Harel & Sowder, 2007, p.806), con base en esta definición, los autores se dan a la tarea de analizar el constructo que ellos llaman esquema de prueba.

Ahora bien, sobre cómo se aborda esta problemática Recio (2001) destaca una cita de De Villiers donde menciona que para que los profesores de matemáticas incluyan la demostración como una actividad significativa éstos deberían haberse formado en situaciones similares durante su propio proceso de formación profesional docente. En este contexto, Recio (2001) se plantea diferenciar entre el papel de (1) la demostración en la enseñanza (lo que ocurre con la demostración en el quehacer

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

docente), (2) enseñanza de la demostración (lo que habría que hacer para enseñar a demostrar). Recio también hace distinción adicional a las funciones de la demostración en la enseñanza universitaria, por una parte el profesor se vea obligado a demostrar en clases y por otra el estudiante tiene el compromiso de estar alerta a descubrir cualquier error en la demostración.

Geometría y Constructivismo

Ausubel (1991) sobre el aprendizaje significativo afirma: los nuevos conocimientos se incorporan en la estructura cognitiva del estudiante, que desde los primeros cursos se va construyendo especialmente por representaciones concretas que en el caso de la matemática son apoyadas por el uso de figuras geométricas. Para que la incorporación de los nuevos conocimientos con sus conocimientos previos se requiere de esfuerzos deliberados del estudiante.

Todo lo anterior es producto de una implicación afectiva del alumno, es decir, el alumno *quiere* aprender aquello que se le presenta porque lo considera valioso.

Entonces, algunos aspectos a tener en cuenta en el aprendizaje significativo son:

a) Conocimiento previo del tópico o concepto
b) La actividad con objetos o software que permitan la experimentación constante
c) Efecto de los elementos didácticos utilizados
d) Actividades libres para que el estudiante construya sus propios significados
e) La construcción de conocimientos se logra a través de un proceso de aproximaciones sucesivas (construcción de significados, de representaciones mentales, de representaciones escritas propias y convencionales)
f) Constantemente se renuevan las nociones construidas
g) La actividad mental sobre la información que proporciona el conocimiento físico suministra los elementos para construir el pensamiento matemático
h) La reflexión, la abstracción y la coordinación de experiencias y acciones con los objetos

Múltiples representaciones

Hitt Espinosa (1997), afirma "…La manipulación, por parte del estudiante, de representaciones matemáticas les proporciona los medios para construir imágenes mentales de un objeto o concepto matemático, y la riqueza de la imagen conceptual construida dependerá de las representaciones que el estudiante haya utilizado"

La verbalización como una de las formas de representación, y ésta, según Laborde (1998) "es necesaria una representación discursiva que caracterice al objeto geométrico para eliminar las ambigüedades inherentes al dibujo".

Metodología

Este estudio se inscribe en el paradigma constructivista, se implementó una metodología de diseño cualitativo: investigación-acción. En el proceso de una docencia exploratoria, nos propusimos analizar y enriquecer las prácticas pedagógicas

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

que se llevan a cabo en una clase de geometría euclidiana que hacen estudiantes de un programa de bachillerato en educación con concentración en matemáticas en Puerto Rico.

La investigación-acción surge para promover la autoreflexión y autoevaluación de los desempeños profesionales. Esta estrategia brinda el espacio para que los educadores reflexionemos durante la ejecución de las acciones y nos demos permiso de modificar y transformar aquellas experiencias en unas más eficaces.

A nuestra investigación subyace el hecho de considerar la docencia como un proceso continuo de búsqueda de mejoramiento de la práctica profesional. El espacio de desempeño profesional como uno para integrar el trabajo intelectual y la reflexión sobre las experiencias que se realizan.

Así la investigación-acción, se constituye en una orientadora de la acción educativa fruto de la exploración reflexiva que el profesional hace de su quehacer docente para que progresivamente sea capaz de mejorar su desempeño.

En esta investigación es de interés identificar aquellas prácticas pedagógicas que contribuyan a que los estudiantes alcancen: (1) una actitud más asertiva frente a la tarea de demostrar en geometría; (2) una mayor apropiación y profundidad de algunos conceptos de geometría euclidiana y sus propiedades; y (3) adquisición de la destreza para desarrollar, probar y proveer justificaciones basadas en el método deductivo.

Este proceso de identificación de prácticas educativas eficaces es uno participativo, en el cual todos los integrantes del grupo propenden por el mejoramiento individual y colectivo. Además se enriquecen en la vivencia de una experiencia de investigación que induce a un proceso sistemático de aprendizaje y autocrítica orientado a la práctica profesional.

Participantes

Los participantes en esta investigación fueron seis integrantes de un curso de geometría euclidiana II (estudiantes que participaron eran de bachillerato en educación con concentración en matemáticas de una universidad privada de Puerto Rico) y la profesora-investigadora.

Los participantes, tres mujeres y tres varones, ya habían cursado las asignaturas de precálculo I-II, cálculo I-II y álgebra lineal. Cinco de los participantes habían tomado la primera parte del curso de geometría euclidiana.

Instrumentos de recopilación de información

Las estrategias de recopilación de información que se implementaron fueron:

Sistematización de experiencias: se utilizaron los diarios reflexivos, los portafolios y los exámenes realizados en la clase. Se incluyó el diario reflexivo del profesor investigador.

Narrativo: Terminada la experiencia de la clase, al finalizar el semestre, los participantes escribieron un narrativo reflexivo, que incluyó los siguientes aspectos:

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

creencias, aprendizaje de conocimiento geométrico y estrategias de aprendizaje. El protocolo utilizado para el narrativo final puede verse en el apéndice A.

Grupo reflexivo: Reflexión final sobre contenido y proceso de aprendizaje, estrategias de aprendizaje y enseñanza y conocimiento de su propio conocimiento. Luego de obtener el consentimiento de los participantes para hacer uso de la información recopilada en el desarrollo del curso, se convocó a los participantes a la realización del grupo reflexivo sobre contenido y proceso de aprendizaje, estrategias de aprendizaje y enseñanza y conocimiento de su propio conocimiento.

El procedimiento que se implementó fue un conversatorio en torno a las mismas cinco preguntas que se incluyeron en el narrativo reflexivo (ver apéndice A). Este grupo reflexivo se llevó a cabo después de nueve meses de terminado el semestre en el que se dio el curso. Participaron en el grupo reflexivo cinco de los seis estudiantes que hicieron parte de la investigación.

Es relevante señalar que tres de los participantes que asistieron al grupo reflexivo en este momento se encuentran trabajando, desempeñándose como profesores de matemáticas, uno de ellos como “coach” de un profesor de matemáticas de grado octavo.

Procedimiento

En la dinámica normal de clase la profesora-investigadora implementó una rutina que podemos describir de la siguiente forma:

Primera parte:

Los primeros minutos de la clase se dedican a discutir en la pizarra aquellos ejercicios que los estudiantes no hayan podido realizar o tengan la duda de haberlos realizado correctamente. En este punto debe tenerse en cuenta que frecuentemente la asignación de tareas es diferente para cada uno de los estudiantes.

El estudiante que trae la pregunta la presenta al grupo y menciona sus intentos de solución, a veces el mismo estudiante es quien lo trabaja en la pizarra, en otras ocasiones el profesor es quien va escribiendo en la pizarra y organizando la información dada por los estudiantes, cuestionando de forma inductiva para llegar a la solución del problema. Según los obstáculos epistemológicos que se presenten en esta fase, se implementan estrategias como revisión y aclaración de conceptos, desde diferentes formas de representación.

En algunas clases, luego de corregida la asignación, se intercambian los trabajos entre los estudiantes y se evalúan por lo menos dos de los ejercicios. Una condición para esta parte de la ejecución es que el estudiante no puede consultar al autor del trabajo

Segunda parte:

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

Discusión del contenido nuevo que se quiere estudiar en la clase, desde la manipulación concreta (construcciones con regla y compás, uso de software especializado, plegado), hasta la consecución de demostraciones.

Se hace revisión previa de los conceptos requisito para abordar la nueva problemática, y luego se procede a realizar ejercicios prácticos en los que utilice los nuevos conceptos. Por último se incluyen los ejercicios de demostraciones sobre el tema.

La forma de abordar el contenido se ejemplifica con el constructo triángulo. Se construye de manera tangible diversos triángulos, se provee una experiencia concreta sobre el concepto para que sea manipulado por el estudiante. Se identifican elementos y verifican propiedades del triángulo, y se introduce la notación apropiada. También se hacen construcciones de líneas y puntos notables del triángulo. Se procede a establecer relaciones y clasificaciones, teniendo en cuenta los conceptos previos como son ángulos, segmentos, rayos, etc. Se enfatiza en el lenguaje y la notación, y el significado de la misma, por ejemplo el uso de congruencia e igualdad.

Continuando con el tratamiento del constructo triángulo se introducen los axiomas y teoremas asociados, se hacen verificaciones y se hacen prácticas de representación gráfica de enunciados, esta aproximación desde la representación gráfica es especialmente relevante en el proceso de entendimiento profundo. Se tiene cuidado de incluir todas las formas de representación en la realización de ejercicios de aplicación de postulados, definiciones y teoremas. Cerrando el ciclo, y antes de reiniciarlo con otro concepto, se proponen ejercicios de demostración, cuya construcción colectiva es liderada por alguno de los estudiantes.

<u>Tercera parte:</u>

Se realizan los acuerdos sobre la asignación de tareas y/o el tema de la siguiente reunión, con frecuencia las tareas son elegidas por los mismos estudiantes. Un acuerdo de la clase es leer el material nuevo que se discutirá en la próxima reunión.

Análisis de datos

El análisis de la información se llevó a cabo mediante el modelo de Harry F. Wolcott (Lucca & Berríos, 2009). Los tres componentes principales de este modelo son: la descripción, el análisis y la interpretación.

Para lograr la triangulación de la información se integran los siguientes elementos: sistematización de experiencias, narrativo autoreflexivo y el grupo de reflexión. En el desarrollo de la discusión de los resultados se utilizó las preguntas que guiaron el estudio como referentes.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

Conclusiones

Los hallazgos revelados por esta investigación permiten identificar los diferentes niveles de reflexión que emergieron en el desarrollo de la clase.

Reflexión sobre la acción social en el proceso de aprendizaje

En el desarrollo de la destreza de demostrar es altamente recomendado el ejercitar inicialmente la construcción colaborativa de las demostraciones, como un ejercicio interactivo entre profesor y estudiantes.

En nuestro estudio, los momentos de construcción colaborativa de demostraciones geométricas, contribuyeron a desarrollar la capacidad de argumentar y justificar desde un marco teórico, en la medida en que cada afirmación dada por el estudiante tiene que ser justificada de manera convincente para la comunidad en que se discute, en este caso la comunidad establecida por los estudiantes del curso.

El clima que genera este primer reto colectivo, contribuye a generar confianza y solidaridad entre los miembros de la comunidad. La identificación de fortalezas y debilidades en el desempeño es enriquecida por la propia mirada autoreflexiva, así como por la mirada de los otros miembros de la comunidad de aprendizaje.

Ese generar confianza y conocimiento a través de enfrentar el reto colectivo de hacer una demostración, da herramientas de autorregulación para cada participante, que va creciendo a su propio ritmo a medida que la comunidad como colectivo crece tanto social como académicamente.

El paso por este proceso de construcción colaborativa de una demostración contribuye a incrementar el nivel de confianza y seguridad de cada uno de los integrantes de la comunidad de aprendizaje. Este hallazgo confirma lo que señala D`Angelo (2002) respecto a los incrementos significativos en autoconfianza, madurez emocional y autocomprensión, que se observan en un miembro de una comunidad de aprendizaje reflexiva-creativa.

En esta comunidad de aprendizaje, esta actividad de experiencia creadora conjunta desarrolla la creatividad y el pensamiento reflexivo, crea un espacio de dialogo que enriquece y potencia el desarrollo de razonamiento.

Este espacio creado para el dialogo argumentado se fundamenta en la honestidad intelectual, reconocimiento de las ideas propias y de los demás, reconocimiento también de las diferentes interpretaciones que producen en el esfuerzo por una construcción conjunta de conocimiento. Las ideas individuales son evaluadas, revaluadas y enriquecidas por el grupo, y viceversa el grupo crece y se fortalece en la interacción de los aportes individuales.

Podemos afirmar, que en nuestro estudio conformamos una comunidad de aprendizaje que satisface las características para denominarla una comunidad de indagación reflexiva y creativa en construcción, a la luz de D`Angelo (2002). A continuación se reportan la principales características de una comunidad de indagación reflexiva y creativa en construcción, según D`Angelo (2002), y en la Tabla

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

1 se identifican los instrumentos de recopilación de información en los que se reportan evidencias sobre el aspecto señalado.

Tabla 1

Instrumentos de recopilación de información que contienen evidencias de cada uno de los aspectos de las dimensiones de la metacognición según Brown

		Diarios Reflexivos	**Narrativo autorreflexivo**	**Grupo reflexivo**
Dimensión del conocimiento de la cognición	Conocimiento			
	Declarativo: conocer nuestro estilo de aprendizaje propio y los factores que influyen en nuestro rendimiento.	✓	✓	✓
	Conocimiento procedural: conocer las estrategias cognitivas para realizar el aprendizaje.	✓	✓	✓
	Conocimiento condicional: saber cuándo o cómo utilizar una estrategia.	✓	✓	✓
Dimensión de la regulación de la cognición	Planificación: selección de estrategias y ubicación de recursos disponibles	✓	✓	✓
	Regulación: supervisar y autoevaluar las habilidades necesarias para controlar el Aprendizaje			✓
	Evaluación: evaluar los productos y los procesos reguladores del propio aprendizaje.			✓

La implementación de estrategias reflexivo-creativas en el proceso de enseñanza aprendizaje de la demostración en geometría propició la formación de un

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

espacio de aprendizajes que son transferidos al quehacer pedagógico de quienes conformaron la comunidad reflexiva creativa.

Reflexión sobre el desarrollo de la destreza de hacer demostraciones geométricas

Sobre este punto podemos afirmar que identificamos en el desarrollo del curso diversos elementos tanto conceptuales, como didácticos y metodológicos que presentamos más adelante con un esquema.

Primero quisiéramos señalar que la implementación de esta propuesta está enmarcada principalmente, pero no de manera exclusiva, en cursos de geometría euclidiana dirigidos a estudiantes de educación matemática nivel secundario. De hecho nos atrevemos a sugerirla para cursos de matemáticas dirigidos a esta población, en consideración de la necesidad prioritaria de estos estudiantes de adquirir conocimiento de contenido y conocimiento pedagógico del contenido.

El diseño curricular de esta experiencia asume el enfoque del cerebro tríadico, se reconocen tres procesos mentales que direccionan, articulan y dinamizan las prácticas pedagógicas. Estos procesos mentales a que nos referimos son el lógico, el creativo y el operativo. En este sentido se identifican como elementos mediadores en una aproximación a los conceptos geométricos las múltiples representaciones que se puede tener del concepto: representación gráfica, numérica, analítica y verbal.

El esquema presentado en la *Figura 2* sintetiza nuestra propuesta metodológica a nivel de contenido que deriva de este estudio.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

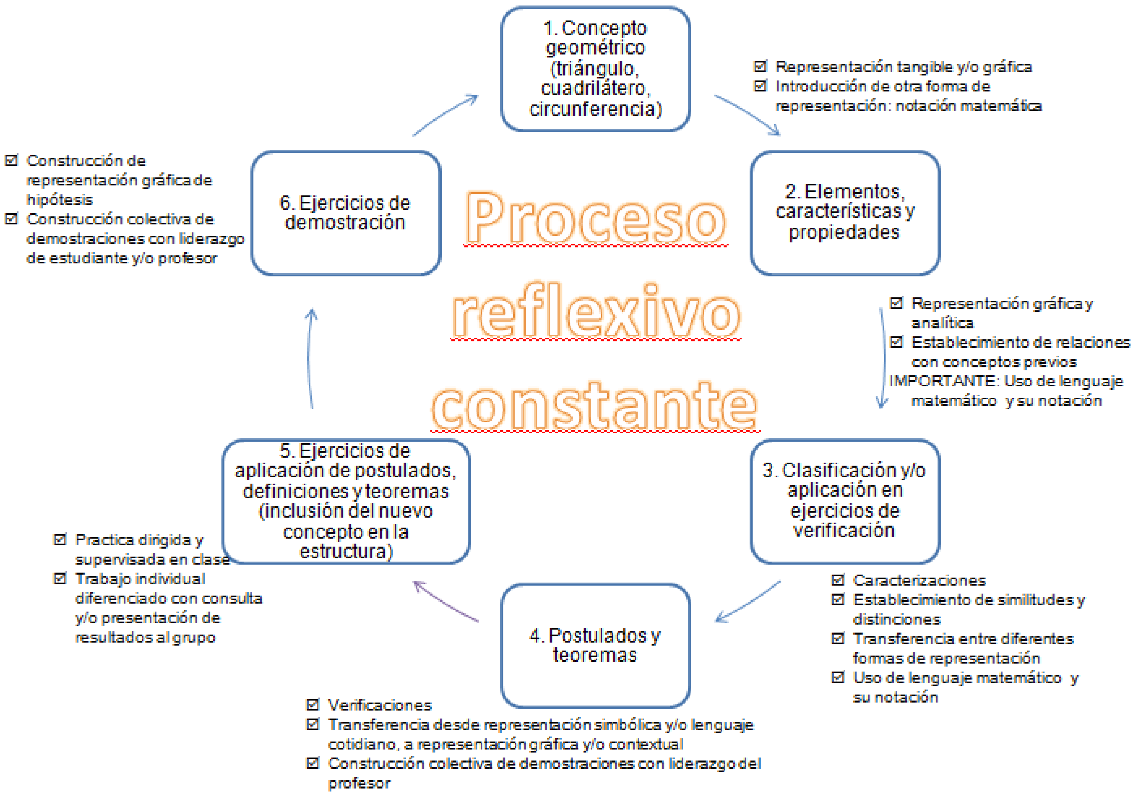

Figura 2. Metodología para la enseñanza de conceptos geométricos para futuros maestros de matemáticas de nivel intermedio.

En esta propuesta consideramos que:

- ✓ En cada concepto geométrico la exploración y conocimiento de todas las formas de representación del concepto son relevantes en la apropiación del mismo
- ✓ El estudio de la matemática implica el aprendizaje de un lenguaje intrínsecamente regulado, y universalmente conocido
- ✓ Los niveles de Van Hiele proporcionan un referente teórico a cualquier práctica de enseñanza de la geometría

En nuestra propuesta metodológica, consideramos especialmente relevante para la formación de los estudiantes de educación, la implementación de estrategias de estímulo permanente de la reflexión sobre el estilo propio de aprendizaje, la observación crítica de las propias acciones, las de los pares y de las características del proceso de enseñanza.

En el desarrollo de la destreza de demostrar, específicamente, queremos señalar que la implementación de la práctica sobre ejercicios de verificación y aplicación de proposiciones condicionales (teoremas y ejercicios de la forma si… entonces…) contribuye a adquirir un nivel más profundo de los conceptos, y estimula el desarrollo de habilidad para transitar entre diferentes formas de representación del concepto. También contribuye a afianzar el conocimiento del lenguaje matemático involucrado.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

Reflexión sobre la reflexión

Para un estudiante de un bachillerato en educación, tener la habilidad y capacidad de reconocer las diversas variables que intervienen en el quehacer pedagógico, el poder evaluarlas y proponer transformaciones, enriquece su desempeño profesional. Desde este punto de vista, la actitud metacognitiva frente a las acciones en el salón de clase potencia la adquisición de esa habilidad y capacidad que mencionamos.

La metacognición hace referencia al conocimiento de los propios procesos cognitivos, de los resultados de esos procesos y de cualquier aspecto que se relacione con ellos. Flavell (1979) afirma que la metacognición se refiere, entre otras cosas, a la continua observación de estos procesos en relación con los objetos cognitivos sobre los que se apoyan, generalmente al servicio de alguna meta concreta u objetivo.

Con esta perspectiva en mente, la actitud que nosotros como educadores deberíamos tener es una actitud reflexiva, autocrítica, autoevaluativa y autorreguladora, antes durante y después de la práctica instruccional. Esto fue lo que implementamos en esta investigación acción.

Recomendaciones

Respecto a investigaciones futuras, una recomendación es la realización de ejercicios de investigación en el aula a nivel secundario, implementando la metodología sugerida en grupos de grado noveno que son los que incluyen en su currículo el desarrollo de la destreza de hacer demostraciones geométricas.

Otra alternativa que nos atrevemos a recomendar es la implementación de los procesos de reflexión permanente en los cursos de especialidad para los estudiantes de bachillerato en educación. Esto se vería favorecido si para estos cursos de especialidad se tienen en cuenta aspectos como: (1) su ofrecimiento debería ser como cursos regulares, (2) deberían incluir horas de laboratorio. Es muy conveniente en los cursos de especialidad ofrecidos a futuros maestros de matemáticas tener horas de laboratorio que permitan la experimentación de formas de enseñanza de los conceptos matemáticos estudiados. Crear el espacio para la creatividad y creación colectiva de formas e instrumentos de enseñanza, la reflexión y discusión sobre los mismos.

Los dos aspectos antes mencionados apuntan al enriquecimiento del conocimiento de contenido y a la exploración de estrategias de enseñanza de los contenidos, esto mediado por procesos de reflexión permanente, de estrategias metacognitivas.

Así pues estamos recomendando una revisión curricular de los programas de bachillerato en educación matemática de nivel secundario, con el propósito de mejorar la calidad profesional del maestro de matemáticas incrementando el conocimiento de contenido y el conocimiento pedagógico del contenido.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

Referencias

AUSUBEL, D y SULLIVAN E (1991). *El desarrollo infantil, aspectos lingüísticos, cognitivos y físicos.* Paidós, México.

BALACHEFF, N. (1999). Is argumentation an obstacle? Invitation to a debate... Newsletter on proof, Mai/Juin. Disponible en http://www.lettredelapreuve.it/

BATTISTA Michael T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. vol. 2, pp. 843-908 .

BELL, A.W. (1976). A study of pupil's proof explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics, 7*(1), 23-40.

BRUNER, J. S. (1961). The act of discovery. *Harvard Educational Review*, 31, 21-32.

BRUNER, J. S. (1973). *The relevance of education*. New York: Norton.

BURGER W.F., y J.M. Shaughnessy. (1986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education, 17*(1), 31-48

D`ANGELO, O. (2002). La acción grupal como base para los aprendizajes reflexivos-creativos. Centro de investigaciones sicológicas. Revista cubana de psicología, volumen 19, número 1, 2002

DENIS, L. (1996). *Pensamiento Geométrico-Niveles de Van Hiele.* Inc., Río Piedras, P.R.: Publicaciones Puertorriqueñas.

DE VILLIERS, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon, 26*, pp. 15-29.

DE VILLIERS, M. (1996a). Algunos desarrollos en la enseñanza de la geometría (1). *The future of secondary school geometry.* La lettre de la preuve, Novembre-Décembre 1999 Traducido por Martín Acosta. Disponible en http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/futureb.pdf

DE VILLIERS, M. (1996b). Algunos desarrollos en la enseñanza de la geometría (2). *The future of secondary school geometry.* La lettre de la preuve, Novembre-Décembre 1999 Traducido por Martín Acosta. Disponible en http://mzone.mweb.co.za/residents/profmd/futurec.pdf

Departamento de Educación de Puerto Rico. (2000). *Estándares de excelencia de matemáticas*. San Juan, PR: Author.

Departamento de Educación de Puerto Rico. (2003). *Proyecto de renovación curricular fundamentos teóricos y metodológicos*. San Juan, PR: Author.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

Departamento de Educación de Puerto Rico. (2010). *Prontuario y mapa curricular grado octavo*. Programa de Matemáticas MATE 121-1408. San Juan, PR: Author.

FLAVELL, J. H. (1979). Metacognitive and cognition monitoring. *American Psychologist* (34), 906-911

FREUDENTHAL, H. (1973b) *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

GODINO, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3): 325-355.

GODINO, J., y Recio, A. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la Educación Matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 19*(3), 405 - 414.

GRIFFITHS, H. B. and A.G. Howson. (1974). *Mathematics: society and curricula.* Cambridge: Cambridge University Press.

HANNA, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. En L. Puig y A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference for the Psychology of Mathematical Education, I,* 21-34). Valencia (Spain).

HANNA, G. (2000). *Proof, Explanation and Exploration: An Overview*. Educational Studies in Mathematics, 44, 5-23.

HAREL, G. y Sowder, I. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. En F. J. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM.

HOFFER, Alan (1981): "Geometry is more than Proof", en The Mathematics Teachers, vol. 74, n.º 1, pp. 11-18.

IBAÑES, M. (2001a). "Un ejemplo de demostración en Geometría como medio de descubrimiento". *Actas del 5º seminario Regional de Educación Matemática. Toro, 1998*. Zamora.

IBAÑES, M. (2001b). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. (Disertación doctoral). Universidad de Valladolid.

KILPATRICK, J.; Gómez, P. y Rico, L. (1995) Educación Matemática, Primer Simposio Internacional de Educación Matemática, Bogotá.Grupo Editorial Iberoamericano. México. ISBN: 970-625-107-3.

KILPATRICK, Jeremy; Swafford, Jane; Findell, Bradford (Eds.); Mathematics Learning Study Committee, National Research Council (2001). Conclusions and

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

recommendations. In *Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics* (pp. 407-432). Washington, D.C.: The National Academies Press.

LUCCA, N. & Berríos, R. (2009). *Investigación cualitativa en educación y ciencias sociales*. San Juan, PR: Publicaciones Puertorriqueñas.

RECIO, T. (2001). La mecánica de la demostración y la demostración mecánica. En: http://www.uv.es/~didmat/angel/seiem.html

VERGNAUD, G. (1987). About constructivism. In J.C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds), *Proceedings of the 11th PME International Conference*, I, 42-54.

VYGOTSKY, L.S. (1979) *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* Buenos Aires: Grijalbo.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93

Apéndice A

Demostrar y hacer demostraciones geométricas algo de lo cual ocuparse en la formación de maestros de matemáticas en puerto rico

PROTOCOLO NARRATIVO AUTORREFLEXIVO

CURSO GEOMETRÍA EUCLIDIANA II

Reflexiona sobre cada uno de los siguientes aspectos, y haz un escrito que explique tus consideraciones y aprendizajes.

UTILIZA TODO EL ESPACIO QUE REQUIERAS PARA CONTESTAR A CADA UNO DE ESTOS ASPECTOS

Describe estrategias que tu consideras que contribuyen al logro de aprendizaje significativo en geometría

Haz una lista de los conocimientos, destrezas y/o habilidades que consideras necesarias para realizar una demostración geométrica

Describe según tu experiencia, ¿cómo incide el uso de las demostraciones geométricas en la apropiación de conceptos geométricos?

Según tu experiencia, ¿Cómo incide el trabajo colaborativo en el desarrollo de destrezas de verificación y demostración geométricas?

¿Qué opinas sobre la inclusión de procesos de autoevaluación y coevaluación en el proceso de enseñanza aprendizaje?

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 93