CONGRESO IBEROAMERICANO DE CIENCIA, TECNOLOGÍA, INNOVACIÓN Y EDUCACIÓN
BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVIEMBRE 2014

CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE CIÊNCIA, TECNOLOGIA, INOVAÇÃO E EDUCAÇÃO
BUENOS AIRES, ARGENTINA
12, 13 Y 14 DE NOVEMBRO 2014

Situación de optimización tradicional en análisis matemático analizada dinámicamente.

TORRES, M; TORRES, J; VARAS, C.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 954

Situación de optimización tradicional en análisis matemático analizada dinámicamente.

Torres, Mariana Gabriela - Torres, Julio Ricardo - Varas, Cristina Viviana.

Instituto de GeoGebra de la Patagonia Austral de Argentina – UNPA // Instituto de GeoGebra de la Patagonia Austral de Argentina – UNPA // Instituto de GeoGebra de la Patagonia Austral de Argentina – UNPA.

mtorres@uaco.unpa.edu.ar - ricardo_lh13@hotmail.com - varascristina@yahoo.com.ar.

Resumen

Este trabajo surgió en el marco de un curso para docentes y alumnos que se realizó en Unidad Académica Caleta Olivia de la Universidad Nacional de la Patagonia Austral, en la República Argentina. Allí un participante, realizó una interesante reflexión acerca de la resolución de un problema típico de optimización, como sobre la justificación de la solución encontrada. El problema: “Hallar el volumen máximo de una caja de cartón construida con una lámina rectangular, recortando de cada esquina un cuadrado de igual tamaño”. Lo planteamos de dos maneras, según el contexto donde funcionan las relaciones que se producen con los datos: el analítico, como se realiza en un curso de cálculo y el dinámico, con GeoGebra. Comparamos las resoluciones pensando, como incide el uso de elementos dinámicos, en los significados y en los que surgen a partir de las condiciones de diferentes contextos, tratando de brindar una mirada para abordar el problema desde diferentes mirandas y su efecto en la enseñanza y el aprendizaje del análisis matemático con éstas actividades.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 954

1. Introducción

Este trabajo surgió en el marco de un curso que formaba parte de un Programa de Extensión[1] que se brindó para docentes y alumnos de carreras de ciencias exactas, el cual se llevó a cabo en la Unidad Académica Caleta Olivia de la Universidad Nacional de la Patagonia Austral, en la República Argentina. El objetivo del curso era el uso e integración del software GeoGebra en la enseñanza y el aprendizaje del Análisis Matemático. Allí un alumno participante, co-autor de este trabajo, realizó una interesante reflexión acerca de la resolución de un problema típico de optimización de un curso de análisis matemático, y como el software facilita distinguir los diferentes objetos en lo dinámico, los cuales no se observan desde lo analítico. Nos propusimos abordar el trabajo en dos diferentes enfoques, el analítico y el que denominamos *dinámico*. El primero de ellos, utilizando las herramientas que brinda un curso de Análisis Matemático y en el segundo nos apoyamos con GeoGebra.

2. Desarrollo

La importancia y delimitación del campo de la modelización en la educación matemática han sido puestas de manifiesto por diversos autores. Además, la diversidad de trabajos de investigación en esta área y la introducción de cursos y propuestas curriculares para su uso, otorgan a la modelización un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles. Tal como lo expresa[2], las modificaciones que se han incorporado a los currículos en algunos países han sido dirigidas hacia una introducción del Análisis Matemático más intuitiva y experimental, incorporando el uso de las nuevas tecnologías.

En primer lugar, queremos comentar diversas características que dan los dos autores que hemos tomado de referencia para abordar éste problema.

El *Problema*, (según Larson, R. Hosteler, R. Edwards, B.) dice:

Se desea construir una caja abierta de volumen máximo, a partir de una pieza de cartón cuadrada de 24 cm de lado, cortando cuadrados iguales en las esquinas (véase Figura 1).

[1] Programa de Extensión denominado: “Uso e Integración de software libres en la enseñanza-aprendizaje de la Matemática”, a cargo de la Lic. Mariana Torres (directora de dicho Programa) docente UACO -UNPA y la Prof. Cristina Viviana Varas docente UACO- UNPA.

[2] Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 954

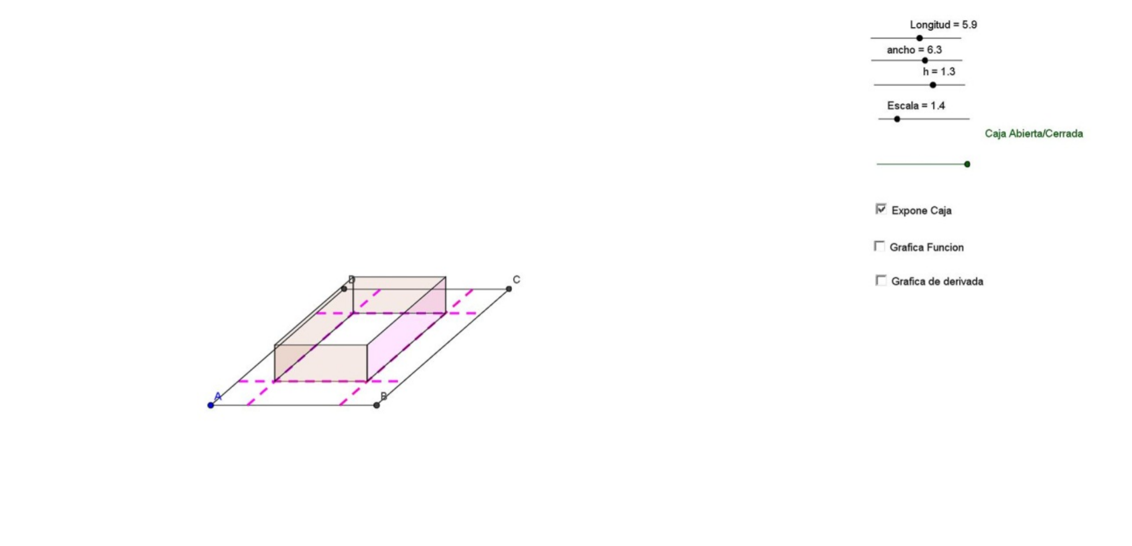

Figura 1

Luego el autor, escribe una serie de sugerencias, para que el alumno tenga en cuenta a la hora de su resolución:

* Pide que exprese el volumen V como función de x. Donde x es el valor que el alumno asigna al lado del cuadrado de cartón que se va a ir quitando de las esquinas.

* A continuación se comenta que utilice las herramientas del cálculo, para hallar el punto crítico de dicha función y su que encuentre su valor máximo.

Luego se requiere que con algún software grafique esa función y verifique en la gráfica el volumen máximo. Por último solicita resolver para una pieza de ***s*** metros de lado y pregunta: Si las dimensiones de la pieza cuadrada se doblan, ¿Cómo cambia el volumen? Esto, ya se encuentra más abocado a la generalización.

J. Stewart. enuncia de igual manera el *problema*, sólo que utiliza como medida de los lados del cartón, *pies*. Solicita al alumno que: dibuje varios diagramas para ilustrar la situación; algunas cajas cortas con bases grandes y otras altas con bases pequeñas. Suponiendo que el alumno va tomando distintos valores para recortar las esquinas. Luego pide, que encuentre el volumen de varias de esas cajas y pregunta: ¿Parece que existe un volumen máximo? Si es así, estímelo. Solicita también, que dibuje un diagrama en el cual se ilustre la situación general, que introduzca la notación y marque en el diagrama con sus símbolos. Además que escriba una expresión para el volumen usando la información dada, y que para escribir dicha función, relacione las variables, que escriba el volumen como función de una variable. Y que una vez terminado de

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 954

resolver el problema, compare la respuesta con la estimación que hizo al principio. Se quiere que el alumno realice un modelo matemático del problema de optimización.

Nuestro trabajo no se basa en hacer críticas a cada una de las sugerencias y cuestiones enunciadas por los autores, para orientar al alumno a resolver el problema. Por ello sólo nos limitaremos a describir el trabajo realizado desde las dos resoluciones que proponemos.

3. Estudio Realizado

3.1 Enfoque analítico

La resolución del problema, desde en éste enfoque se realizó utilizando las herramientas del Análisis Matemático, para ello se encuentra el modelo matemático que relaciona el volumen como función del lado del cuadrado extraído de las esquinas del cartón, luego se encuentran el punto crítico del modelo y se aplican los criterios de derivada para concluir si dicho punto es un máximo y en consecuencia, el máximo volumen de la caja que es lo que se está buscando.

Habiendo realizado el gráfico de la situación, llamamos *x*, al cuadrado que se quita de cada una de las esquinas del cartón, como lo sugiere uno de los autores considerados en éste trabajo. Luego, cada lado del cartón, tiene una longitud de 24 – 2.x, pues se considera un cartón cuadrado. Una vez que tenemos la longitud de cada lado se plantea la función volumen, en términos de la variable x. Donde:

Base= 24-2.x Ancho=24-2x y Altura=x

Entonces,

$$V = (24-2x).(24-2x).x \Rightarrow V = (24-2x)^2.x$$

Ahora a partir de la función V, calculamos la derivada primera, la igualamos a cero para obtener el/los puntos críticos, como ya mencionamos arriba.

$$V' = 2.(24-2x).(-2).x + (24-2x)^2 \Rightarrow V' = -96x + 8x^2 + 576 - 96x + 4x^2$$

$$V' = 12x^2 - 192x + 576 \quad \text{luego} \quad V' = 0 \qquad x_1 = 12, x_2 = 4$$

De los puntos críticos hallados, se tiene:

$$V''(x) = 24x - 192 \Rightarrow V''(12) = 96 > 0 \Rightarrow V''(4) = -96 < 0$$

Observemos que para x=12 no tiene sentido el calculo del volumen, dejamos en claro que luego de hallar la solución analítica debemos contextualizarla. Y además que el dominio de la solución estará acotado de acuerdo a las longitudes dadas del cartón.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 954

Concluimos entonces que, cuando se saca un cuadrado de cada esquina del cartón, de 4 cm de lado, el volumen de la caja será máximo.

3.2 Enfoque dinámico

Cuando analizamos el problema aplicando GeoGebra, surge una cuestión interesante en la función V, que no se tiene en cuenta a la hora de analizarlo desde el enfoque analítico. Para crear la caja, tendremos que tener en cuenta el valor de cada cuadrado x, la altura de la caja, dependerá de la longitud de cada lado del cuadrado de cartón que se considera, pues sino, no se formará la caja. Véase Figura 2 y Figura 3.

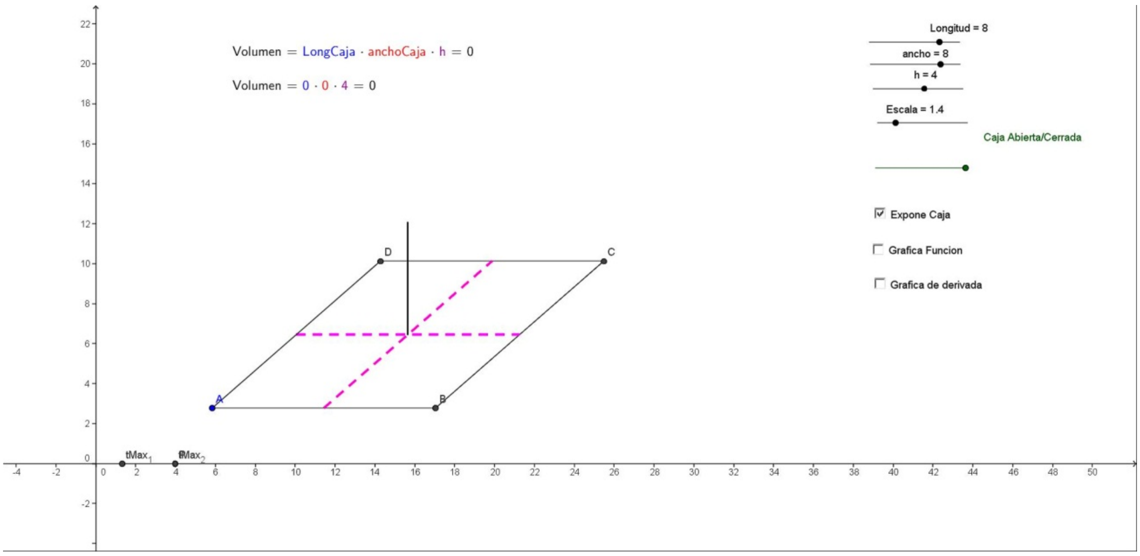

Figura 2

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 954

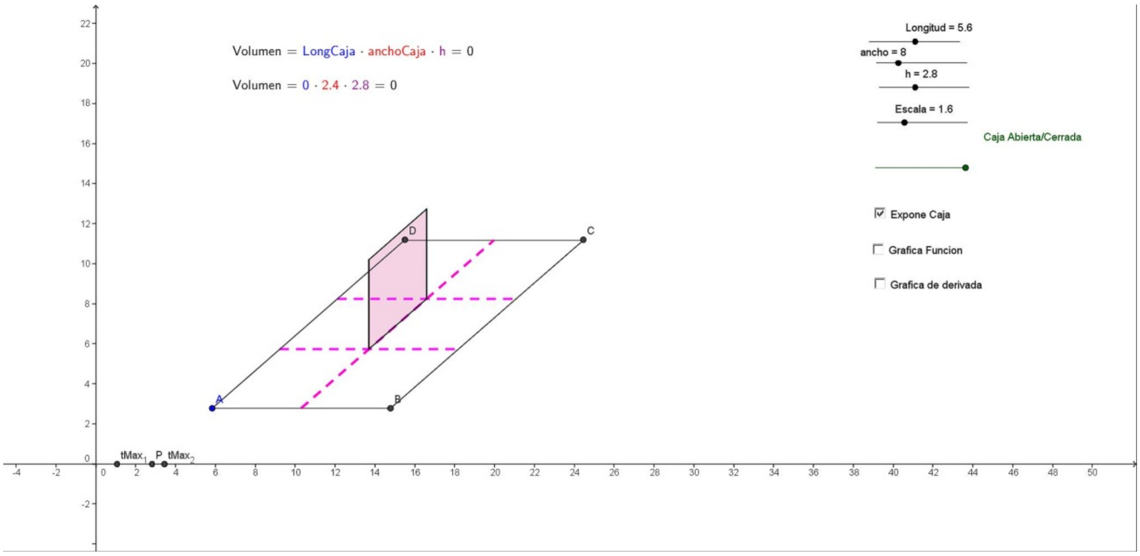

Figura 3

El problema se vuelve muy interesante con el software si se hace variar las dimensiones de la caja, es decir si se considera en vez de un cartón cuadrado, un cartón rectangular, así podrá generalizar el problema. En éste proceso de generalización se deberá poner especial énfasis en el dominio de definición de cada uno de los lados, como así también el dominio de x. Véase Figura 4 con la caja formándose y la gráfica de la función V.

Y la Figura 5 con la caja armada.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 954

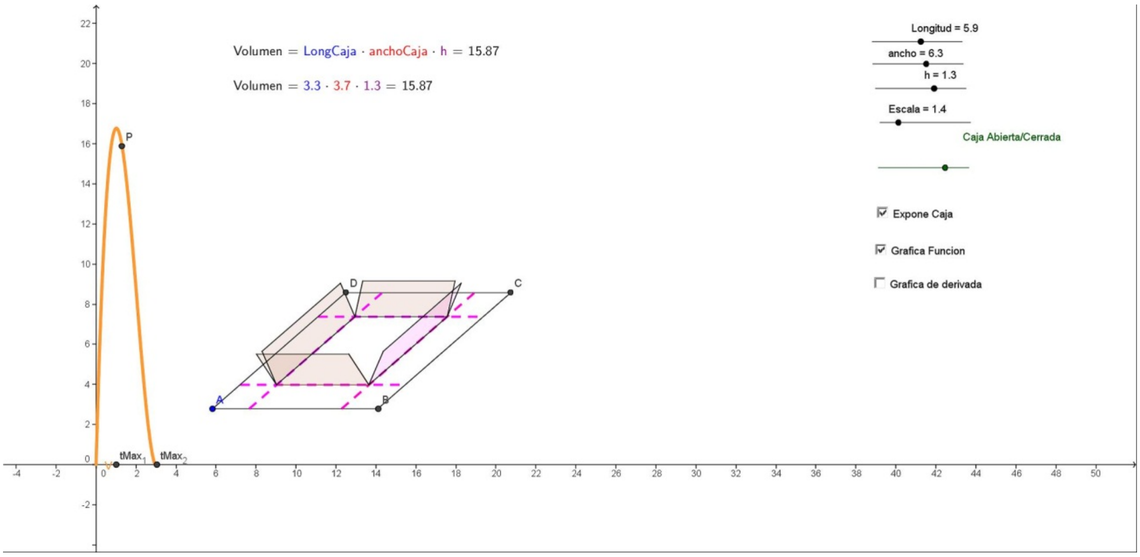

Figura 4

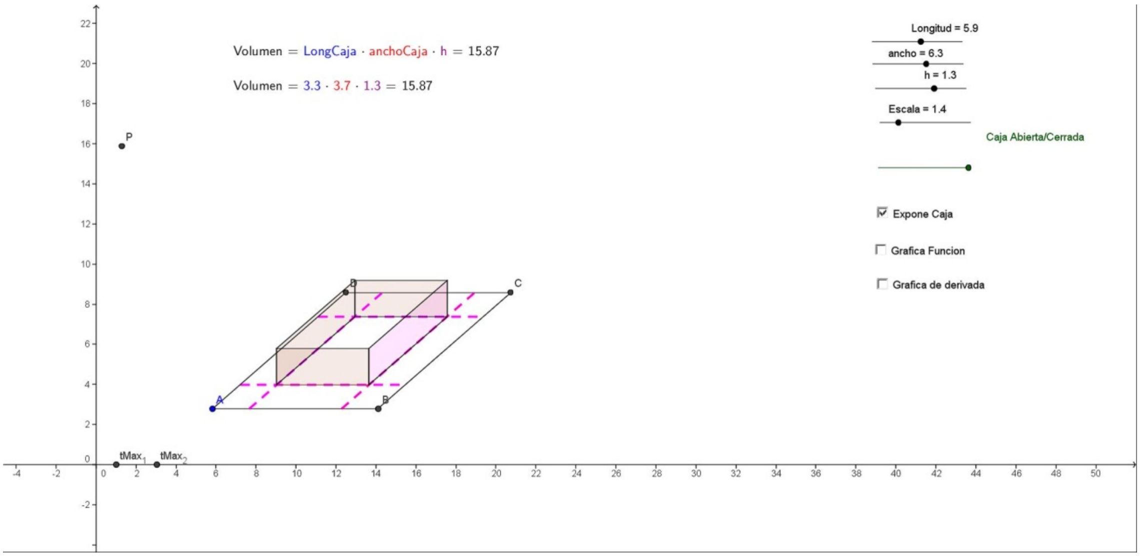

Figura 5

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 954

4. Reflexiones Finales:

En el enfoque analítico la caja se ve y es una, como así también solo se puede realizar la gráfica de una función V, sin ver la familia de funciones que surgen a medida que varían los cuadrados de cartón.

Mientras que en el enfoque dinámico vimos que se ponen a funcionar elementos y propiedades que no se explicitan en el contexto analítico, por ejemplo, la necesidad de tener de antemano el dominio de definición de x, cuando consideramos un cartón cuadrado y el dominio de los lados del cartón si se considera de forma rectangular. Aquí se podrán observar las gráficas de las funciones V, si el cartón es cuadrado y las gráficas de V cuando es rectangular.

No pretendemos tomar partido por el enfoque analítico o el dinámico, estamos convencidos que cada uno de los enfoques tienen cuestiones interesantes para abordar, creemos que los mismos deben interactuar entre sí. El GeoGebra permite visualizar, significar e idealizar conceptos, propiedades y relaciones que desde lo analítico se pierden de vista.

Referencias

* Azcárate Giménez, C, Camacho Machín, M. (2003). "Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático". Boletín de la Asociación Matemática Venezolana. Vol. X (Nº 2). Pág. 135 – 149.

* Blomhøj, M. Traducción: María Mina. *Modelización Matemática - Una Teoría para la Práctica.* http://www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_23/23_2_Modelizacion1.pdf. [Fecha de Consulta: 10/03/12].

* Gómez-Chacón, M. Modelización matemática en contextos tecnológicos. http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/modelizaciones/modelizacion-1.pdf. [Fecha de Consulta: 08/05/12].

* Larson, R., Hosteler, R.; Edwards, B. (2000). *Cálculo y Geometría Analítica Vol. 1*. México: Editorial MC GRAW HILL.

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 954

* Stewart, J. (2002). *Cálculo. Trascendentes Tempranas*. México: Editorial THOMSON.

* Vilanova, S. Rocerau, M. Valdez, G. Oliver, M. Vecino, S. Medina, P. Astiz, M. Álvarez, E. (2001). *LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje*. http://www.rieoei.org/deloslectores/203Vilanova.PDF. [Fecha de Consulta: 10/04/12].

ISBN: 978-84-7666-210-6 – Artículo 954