1) Em 1998, a população do Canadá era de 30,3 milhões. Qual das opções abaixo representa a população do Canadá em 1998?

A) 30 300 000 B) 303 000 000 C) 30 300 D) 303 000 E) 30 300 000 000

2) Uma certa máquina é capaz de produzir 8 réguas em cada minuto. Quantas réguas esta máquina consegue produzir em 15 minutos?

A) 104 B) 110 C) 112 D) 128 E) 120

3) Luíza, Maria, Antônio e Júlio são irmãos. Dois deles têm a mesma altura. Sabe-se que:

- Luíza é maior que Antônio
- Maria é menor que Luíza
- Antônio é maior do que Júlio
- Júlio é menor do que Maria.

Quais deles têm a mesma altura?

A) Maria e Júlio B) Júlio e Luíza C) Antônio e Luíza
D) Antônio e Júlio E) Antônio e Maria

4) O algarismo das unidades do número $1 \times 3 \times 5 \times 79 \times 97 \times 113$ é:

A) 1 B) 3 C) 5 D) 7 E) 9

Seleção	Jogos	V	E	D	GM	GS	P
Dinamarca	3	2	1	0	5	2	7
Senegal	3	1	2	0	5	4	**?**
Uruguai	3	0	2	1	4	**?**	2
França	3	0	1	2	0	3	1

Utilize as informações abaixo para resolver as duas próximas questões:

A tabela ao lado mostra o desempenho das seleções do grupo A da Copa do Mundo de 2002:

Legenda:
V - vitórias, E - empates, D - derrotas, GM - Gols Marcados, GS - Gols Sofridos, P - Pontos.

Numa partida de futebol, a equipe vencedora ganha 3 pontos, em caso de empate as duas ganham 1 ponto e a perdedora não ganha nem perde pontos.

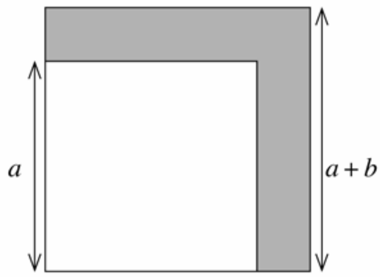
5) Quantos pontos obteve a seleção do Senegal?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

6) Quantos gols sofreu a seleção do Uruguai?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

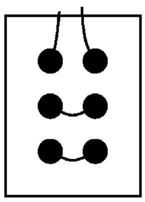
7) Na figura abaixo temos dois quadrados. O maior tem lado $a + b$ e o menor lado a.



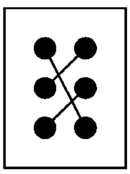
Qual é a área da região em cinza?

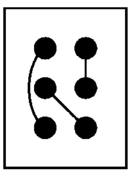
A) b B) $a + b$ C) $a^2 + 2ab$ D) b^2 E) $2ab + b^2$

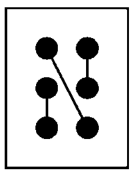
8) Passa-se um barbante através dos seis furos de uma cartolina. A frente da cartolina, com o barbante, é mostrada na figura.

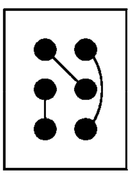


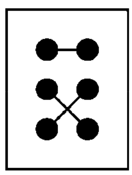
Qual das figuras abaixo **não** pode ser o verso da cartolina?

(a)


(b)


(c)


(d)


(e)


9) Adriano, Bruno, César e Daniel são quatro bons amigos. Daniel não tinha dinheiro, mas os outros tinham. Adriano deu a Daniel um quinto do seu dinheiro, Bruno deu um quarto do seu dinheiro e César deu um terço do seu dinheiro. Cada um deu a Daniel a mesma quantia. A quantia que Daniel possui agora representa que fração da quantia total que seus três amigos juntos possuíam inicialmente?

A) $\frac{1}{10}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{3}$ D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

10) O quadrado abaixo é chamado *quadrado mágico,* porque a soma dos números de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é sempre a mesma. Neste caso essa soma é 15 .

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Complete os cinco números que faltam no quadrado abaixo para que ele seja um quadrado mágico.

-12		- 4
	0	
4		

1. **(A)** Temos que $1 \text{ milhão} = 1000\,000$. Logo, $30,3 \text{ milhões} = 30,3 \times 1000\,000 = 30\,300\,000$

2. **(E)** Se a máquina produz 8 réguas em 1 minuto, em 8 minutos ela produzirá $8 \times 15 = 120$ réguas.

3. **(E) Solução 1:** Usaremos a notação $a < b$ que significa que a é menor do que b, ou equivalentemente, b é maior do que a. Assim, $a<b<c$ significa que a é menor do que b e b é menor do que c.
Para simplificar, vamos denotar a altura de cada um dos irmãos pela letra inicial de seu nome.
Do enunciado temos:

(i) L maior que A ou, equivalentemente, A menor que L (A< L)
(ii) M menor que L (M<L)
(iii) A maior que J ou, equivalentemente, J menor que A (J<A)
(iv) J menor que M (J<M)

De (i) e (iii) segue que: J < A < L. Portanto, os irmãos de mesma altura não estão entre Júlio, Antônio e Luíza.
De (ii) e (iv) segue que: J < M < L. Portanto, os irmãos de mesma altura não estão entre Júlio, Maria e Luíza.
Logo, a única opção é que Antônio e Maria tenham a mesma altura.

Solução 2: Pelo enunciado, as opções A, C e D não ocorrem. Como Luíza é maior do que Antônio e Antônio é maior do que Júlio, temos que Luíza é maior do que Júlia. Logo, a opção correta é (E).

4. **(C)** Como um dos fatores é 5, **o produto é um múltiplo de 5.** Os múltiplos de 5 são aqueles cujo algarismo das unidades é 0 ou 5. Além disso**,** todos os fatores são números ímpares, então **o produto é um número ímpar.** Logo, o seu algarismo das unidades tem que ser 5.

5. **(C)** Segundo as condições da copa, uma vitória vale 3 pontos, um empate vale 1 ponto e quem sofre uma derrota não pontua. Como Senegal teve uma vitória e dois empates, ele somou: $1 \times 3 + 2 \times 1 = 5$ pontos.

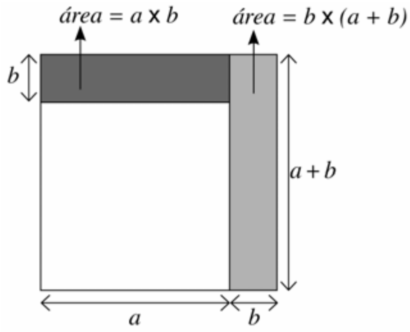
6. **(D)** Observe que num campeonato, o número total de gols marcados é o mesmo que o total de gols sofridos. Denotando por x o número de gols que sofreu a seleção do Uruguai temos:

$$5+5+4+0 = 2+4+x+3 \Rightarrow 14 = 9+x$$

Daí obtemos $x = 5$.

7. **(E) Solução 1** – Usaremos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Lembre que a área de um quadrado de lado l é l^2. Note que a área da região cinza é a diferença entre as áreas do maior e do menor quadrado. O lado do maior é $a+b$, portanto sua área é $(a+b)^2$. Já o lado do menor é a, logo sua área é a^2. Concluímos que a área da região cinza é: $(a+b)^2 - a^2 = a^2 + 2ab + b^2 - a^2 = 2ab + b^2$.

Solução 2 - Lembre que a área de um retângulo é o produto da largura pelo comprimento.



Podemos dividir a região cinza em dois retângulos, um da largura b e comprimento a, e o outro de largura b e comprimento $a+b$, como mostra a figura. A área em cinza é a soma das áreas desses dois retângulos, ou seja:

$a \times b + b \times (a+b) = ab + ab + b^2 = 2ab + b^2$.

Portanto, a área solicitada é $2ab + b^2$.

Solução 3 – A região cinza é formada por 2 retângulos de dimensões $a \times b$ e um quadrado de lado b. Logo a sua área é: $2 \times ab + b^2$.

8. **(E)** Observando a frente da cartolina, verificamos que o barbante entra e sai pelos furos da primeira linha. Na opção (e) o verso mostra estes dois furos como consecutivos ao percorrer o barbante, o que não é possível.

9. **(B)** Suponha que Daniel tenha recebido x reais de cada um de seus amigos. Então, Adriano tinha, inicialmente, $5x$ reais, Bruno tinha $4x$ reais e César tinha $3x$ reais. Segue que o total de dinheiro dos três no início era de $5x + 4x + 3x = 12x$ reais. Como cada um de seus três amigos lhe deu x reais, Daniel tem agora $3x$ reais, o que representa a quarta parte de $12x$. Logo, ele possui agora $\frac{1}{4}$ da quantia que seus três amigos juntos possuíam inicialmente.

10. Como a soma dos números de uma diagonal é $4 + 0 + (-4) = 0$, este deve ser o valor da soma dos números de cada linha coluna e diagonal.

Assim, obtemos de imediato os números que faltam nas casas em cinza no primeiro tabuleiro: 16, 8 e 12, pois $(-12) + 16 + (-4) = 0$ (na primeira linha), $(-12) + 8 + 4 = 0$ (na primeira coluna) e $(-12) + 0 + (12) = 0$ (na diagonal).

-12		- 4
	0	
4		

→

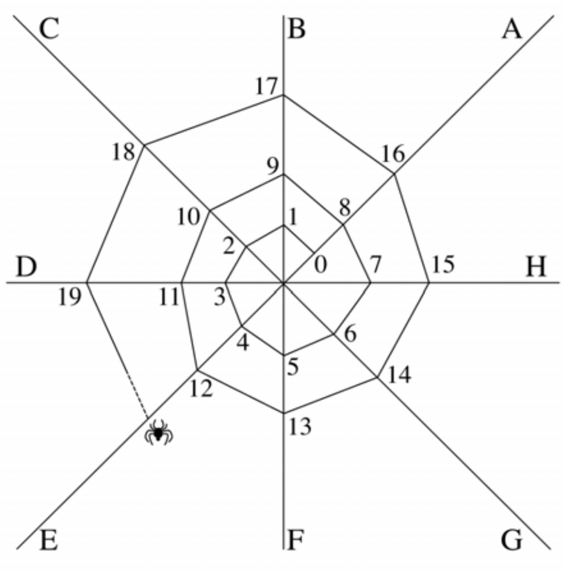
-12	*16*	- 4
8	0	
4		*12*

→

-12	*16*	- 4
8	0	-8
4	-16	*12*

Agora, o número que falta na segunda linha do segundo tabuleiro é (-8), porque $8 + 0 + (-8) = 0$. Para a terceira linha, obtemos (-16), pois $4 + (-16) + 12 = 0$.

1) A, B, C, D, E, F, G e H são os fios de apoio que uma aranha usa para construir sua teia, conforme mostra a figura. A aranha continua seu trabalho. Sobre qual fio de apoio estará o número 118?

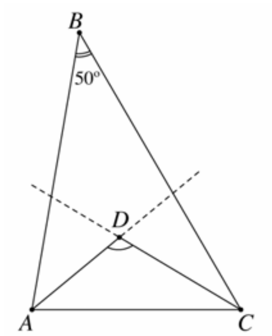


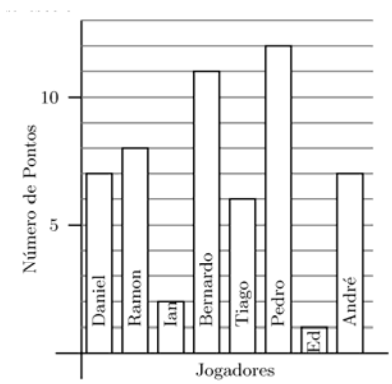
A) B B) D C) E D) G E) H

2) Na figura temos $\hat{B} = 50^\circ$, AD e CD são as bissetrizes dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{C}$ respectivamente.

Qual a medida do ângulo $A\hat{D}C$?

A) 90° B) 100° C) 115° D) 122.5° E) 125°





3) O gráfico mostra o número de pontos que cada jogador da seleção de basquete da escola marcou no último jogo.
O número total de pontos marcados pela equipe foi:

A) 54 B) 8 C) 12 D) 58 E) 46

4) Geni é cliente de um companhia telefônica que oferece o seguinte plano:

- tarifa mensal fixa de R$ $18{,}00$
- gratuidade em 10 horas de ligações por mês
- R$ $0{,}03$ por cada minuto que exceder às 10 horas.

Em janeiro, Geni usou seu telefone por 15 horas e 17 minutos, e em fevereiro por 9 horas e 55 minutos. Qual a despesa de Geni com telefone nesses dois meses?

A) R$ $45{,}51$ B) R$ $131{,}10$ C) R$ $455{,}10$ D) R$ $13{,}11$ E) R$ $4{,}55$

5) Veja as promoções de dois supermercados:

Supermercado A	**Supermercado B**
6 latas de 3 litros do sorvete QUENTE	Sorvete QUENTE – lata de 3 litros
R$ $24{,}00$	4 latas - só R$ $14{,}00$

Joana quer comprar 12 latas de sorvete para a festa de seu aniversário. Em qual supermercado ela deve comprar?

A) No A, pois economizará R$ $7{,}00$ em relação ao B.
B) No A, pois economizará R$ $6{,}00$ em relação ao B.
C) No B, pois economizará R$ $8{,}00$ em relação ao A.
D) No B, pois economizará R$ $6{,}00$ em relação ao A.
E) Tanto faz, porque o preço é o mesmo nos dois supermercados.

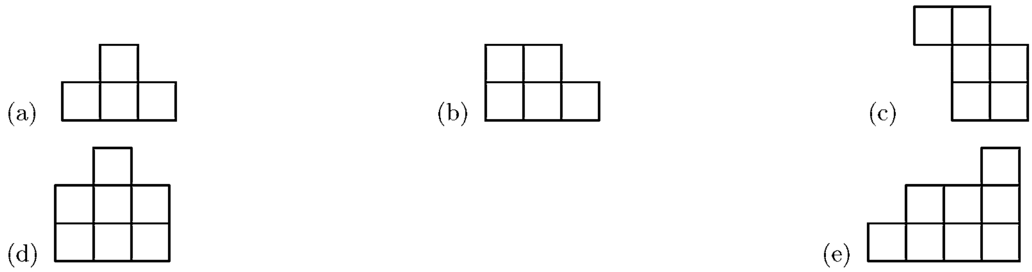
6) Paulo quer comprar um sorvete com 4 bolas em uma sorveteria que dispõe de três sabores: açaí, baunilha e cajá. De quantos modos diferentes ele pode fazer a compra?

A) 6 B) 9 C) 12 D) 15 E) 18

7) A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Até quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias fazendo trocas sucessivas?

A) 11 B) 12 C) 13 D) 14 E) 15

8) Pedro montou um quadrado com quatro das cinco peças abaixo. Qual é a peça que ele não usou?



9) Uma linha de ônibus possui 12 paradas numa rua em linha reta. A distância entre duas paradas consecutivas é sempre a mesma. Sabe-se que a distância entre a terceira e a sexta paradas é 3300 metros. Qual é a distância entre a primeira e a última parada?

A) $8,4\,km$ B) $12,1\,km$ C) $9,9\,km$ D) $13,2\,km$ E) $9,075\,km$

10) Sete equipes, divididas em dois grupos, participaram do torneio de futebol do meu bairro.

O grupo 1 foi formado pelas equipes Avaqui, Botágua e Corinense.
O grupo 2 foi formado pelas equipes Dinossauros, Esquisitos, Flurinthians e Guaraná.

Na primeira rodada do torneio, cada equipe enfrentou cada uma das equipes do seu grupo exatamente uma vez.

Na segunda rodada do torneio, cada equipe enfrentou cada uma das equipes do outro grupo exatamente uma vez.

(a) Quantas partidas foram disputadas na primeira rodada no grupo 1?
(b) Quantas partidas foram disputadas na primeira rodada no grupo 2?
(c) Quantas partidas foram disputadas na segunda rodada?

1. **(D)** Observe que são 8 fios de apoio que a aranha utiliza, numerados a partir do fio A iniciando com 0. Logo:

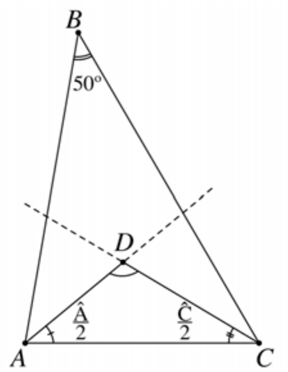
- sobre o fio A aparecem os $\text{múltiplos de } 8$
- sobre o fio B aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+1$
- sobre o fio C aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+2$
- sobre o fio D aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+3$
- sobre o fio E aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+4$
- sobre o fio F aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+5$
- sobre o fio G aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+6$
- sobre o fio H aparecem os $(\text{múltiplos de } 8)+7$

Na divisão de 118 por 8 encontramos resto 6, o que significa que $118=(\text{múltiplo de } 8)+6$.
Portanto, 118 está sobre o fio G.

2. **(C)** Nesta questão, usaremos o seguinte importante teorema da Geometria Plana:
Teorema: *A soma dos ângulos internos de um triângulo é* 180°.

Do teorema acima temos $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$, e como $\hat{B}=50^\circ$, segue que

$$\hat{A}+50^\circ+\hat{C}=180^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{C}=130^\circ.$$



Aplicando agora o teorema ao triângulo ADC, obtemos:

$$\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}+A\hat{D}C=180^o$$

Como $\frac{\hat{A}}{2}+\frac{\hat{C}}{2}=\frac{\hat{A}+\hat{C}}{2}=\frac{130^\circ}{2}=65^\circ$, concluímos da igualdade acima que $A\hat{D}C=180^\circ - 65^\circ=115^\circ$.

3. **(A)** Analisando o gráfico, verificamos que os jogadores marcaram as seguintes quantidades de pontos: Daniel 7, Ramon 8, Ian 2, Bernardo 11, Tiago 6, Pedro 12, Ed 1 e André 7.

Total: 54 pontos.

4. **(A)** Vejamos a despesa em janeiro. Como 10 horas são gratuitas e Geni usou seu telefone por 15 horas e 17 minutos, ela deve pagar o custo de apenas 5 horas e 17 minutos mais a tarifa fixa mensal de 18 reais. Como o preço é dado em minutos, vamos reduzir a minutos o tempo a pagar. Sabemos que 1 hora $=$ 60 minutos, portanto $5\,\text{horas} = 5 \times 60 = 300\,\text{minutos}$. Logo, $5\,\text{h}\,17\,\text{m} = 300 + 17 = 317\,\text{m}$. Portanto, a conta telefônica de Geni em janeiro foi:

$$18 + 317 \times 0{,}03 = 18 + 9{,}51 = 27{,}51 \text{ reais.}$$

Em fevereiro, Geni usou seu telefone menos do que 10 horas, portanto neste mês ela só precisa pagar a tarifa fixa mensal de 18 reais. Logo, a despesa de Geni com telefone nesses dois meses foi:

$$27{,}51 + 18 = 45{,}51 \text{ reais.}$$

5. **(D)** Se comprar no supermercado A, Joana gastará $2 \times \text{R\$}24{,}00 = \text{R\$}48{,}00.$
Se comprar no supermercado B, ela gastará $3 \times \text{R\$}14{,}00 = \text{R\$}42{,}00.$

6. **(D)** Vamos denotar cada sabor de sorvete pela sua letra inicial:
$a \to$ açaí, $b \to$ baunilha, $c \to$ cajá

Para enumerar todas as possibilidades de compra do sorvete com quatro bolas, devemos considerar os seguintes casos:

- 4 bolas do mesmo sabor (1ª coluna ao lado);
- 3 bolas do mesmo sabor e 1 de sabor diferente (2ª coluna ao lado);
- 2 bolas de um mesmo sabor e 2 de outro sabor (3ª coluna ao lado);
- 2 bolas de um mesmo sabor e as outras 2 dos outros dois sabores (4ª coluna ao lado).

aaaa	*aaab*	*aabb*	*aabc*
bbbb	*aaac*	*aacc*	*bbac*
cccc		*bbcc*	*ccab*
	bbba		
	bbbc		
	ccca		
	cccb		

Obtemos assim 15 modos de fazer a compra do sorvete.

7. **(D)** Ele separa 40 garrafas vazias e as troca por 10 garrafas de 1 litro cheias de leite. Esvaziadas as 10 garrafas, ele pode juntá-las com as 3 vazias que restaram e trocá-las por 3 garrafas cheias, sobrando ainda 1 garrafa vazia. Esvaziando as 3 cheias e juntando com a garrafa vazia, ele ainda pode obter em troca mais uma garrafa cheia. Ao todo, ele pode obter, por sucessivas trocas, $10 + 3 + 1 = 14$ garrafas cheias de leite, todas elas a partir das 43 vazias que ele possuía.

8. **(B)**

Solução 1 - Contando o total de quadrados nas peças.

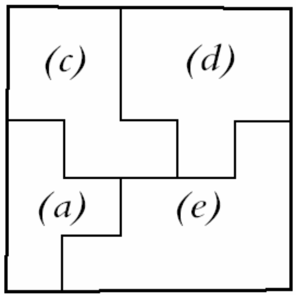
Para que seja possível montar o quadrado, o número total de quadradinhos deve ser um quadrado perfeito (Um número é um *quadrado perfeito* se ele é igual ao quadrado de um número inteiro. Por exemplo, $1, 9$ e 16 são quadrados perfeitos pois $1 = 1^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$.).

Contando o total de quadradinhos apresentados nas cinco opções de resposta, obtemos: $4+5+6+7+8=30$.

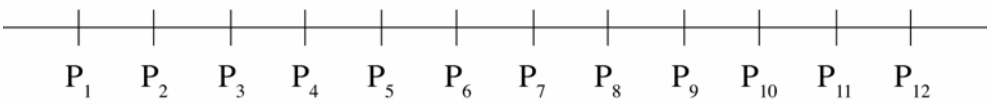
Portanto, devemos eliminar uma peça de modo que o total de quadradinhos resultante seja um quadrado perfeito. A única possibilidade é a (b). De fato, eliminando (b), a soma fica sendo 25 que é um quadrado perfeito, pois $25 = 5^2$.

Solução 2 - Tentando montar o quadrado com 4 das cinco peças.

Neste caso, conseguimos montar um quadrado com as peças *a*, *c*, *d* e *e*, como na figura:



9. **(B)**



Como a distância entre a 3ª e a 6ª paradas é $3300\,m$, então a distância entre duas paradas consecutivas é $3300 \div 3 = 1100\,m$.

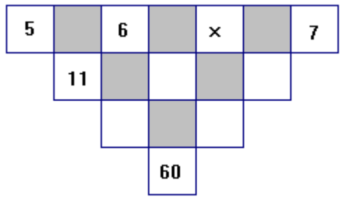
Portanto, a distância entre a primeira e a última paradas é $1100\,m \times 11 = 12100\,m$. Como as opções da resposta são dadas em quilômetro, devemos reduzir $12100\,m$ a quilômetro. Como $1\,km = 1000\,m$, temos $12100\,m = 12,1\,km$.

10. **(a)** Foram disputadas 3 partidas que são: $A \times B$, $B \times C$, $C \times A$.

(b) Foram disputadas 6 partidas que são: $D \times E$, $D \times F$, $D \times G$, $E \times F$, $E \times G$, $F \times G$

(c) Na segunda rodada, cada equipe do grupo 1 joga 4 partidas; uma com cada equipe do grupo 2. Como o grupo 1 tem 3 equipes, o total de partidas será $3 \times 4 = 12$.

1) Os quadrados brancos sem números da figura ao lado devem ser preenchidos com números de modo que cada número, a partir da segunda linha, seja igual à soma dos dois números vizinhos da linha imediatamente superior. Por exemplo, o número da primeira casa da segunda linha é 11, porque $11 = 5 + 6$. Qual o número que vai aparecer no quadrado indicado com x?

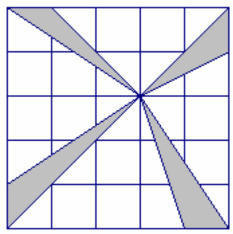


A) 4 B) 6 C) 9 D) 15 E) 10

2) Uma bola de futebol é feita com 32 peças de couro. Dessas peças 12 são pentágonos regulares idênticos e as outras 20 são hexágonos, também regulares e idênticos. Os lados dos pentágonos são iguais aos lados dos hexágonos. Para unir dois lados de duas dessas peças é necessária uma costura. Quantas são as costuras necessárias para fazer uma bola?

A) 60 B) 64 C) 90 D) 120 E) 180

3) A figura ao lado mostra uma grade formada por quadrados de lado $1cm$. Qual é a razão entre a área sombreada e a área não sombreada?



A) $1/4$ B) $1/5$ C) $1/6$
D) $2/5$ E) $2/7$

4)Em um quente dia de verão, 64 crianças comeram, cada uma, um sorvete pela manhã e outro à tarde. Os sorvetes eram de 4 sabores: abacaxi, banana, chocolate e doce de leite. A tabela abaixo mostra quantas crianças consumiram um destes sabores pela manhã e outro à tarde; por exemplo, o número 7 na tabela indica que 7 crianças tomaram sorvete de banana pela manhã e de chocolate à tarde.

		TARDE			
		Abacaxi	Banana	Chocolate	Doce de leite
MANHÃ	Abacaxi	1	8	0	3
	Banana	6	2	7	5
	Chocolate	3	3	0	5
	Doce de Leite	2	9	9	1

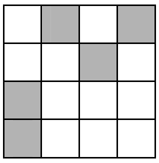
Quantas crianças tomaram sorvetes de sabores diferentes neste dia?

A) 58 B) 59 C) 60 D) 61 E) 62

5) Camila e Lara têm, cada uma, um tabuleiro 4×4, inicialmente ambos em branco. Com estes tabuleiros elas fazem uma brincadeira do seguinte modo:

- Camila, escondida de Lara, pinta algumas casas de seu tabuleiro, de preto;
- Ainda em seu tabuleiro, Camila escreve em cada casa o número de casas vizinhas que estão pintadas de preto (duas casas distintas são vizinhas se possuem um lado ou um vértice em comum);
- Camila copia os números escritos em seu tabuleiro no tabuleiro de Lara;
- Lara deve adivinhar, a partir dos números escritos em seu tabuleiro, quantas são as casas pretas do tabuleiro de Camila.

Por exemplo, se Camila pintou seu tabuleiro assim



então ela vai colocar os números no tabuleiro de Lara do seguinte modo:

1	1	3	1
2	3	2	2
1	3	1	1
1	2	0	0

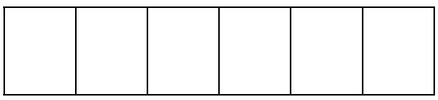
Se o tabuleiro de Lara tem os números

1	2	1	1
0	2	1	2
2	3	3	1
1	0	2	1

quantas foram as casas que Camila pintou?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

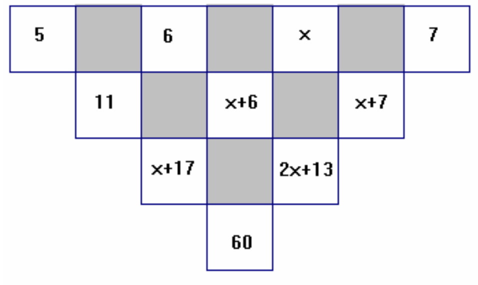
6) Larissa e Jorge estão jogando com cartões numerados de 1 a 6 que devem ser colocados nas casas do tabuleiro abaixo de modo a formar um número de seis algarismos.



Jorge coloca o primeiro cartão e a seguir as jogadas são alternadas entre os dois. O objetivo de Larissa é obter o maior número possível e o de Jorge é obter o menor número possível. Larissa tem os cartões com os algarismos 1, 3 e 5 e Jorge tem os cartões com os algarismos 2, 4 e 6. Se os dois jogadores forem espertos, qual o número que aparecerá ao final do jogo?

A) 254361 B) 253416 C) 251634 D) 256134 E) 251346

1. **(E)** Preenchendo o tabuleiro de acordo com as regras do problema:



segue que $60=(x+17)+(2x+13)=3x+30$, donde $x=10$.

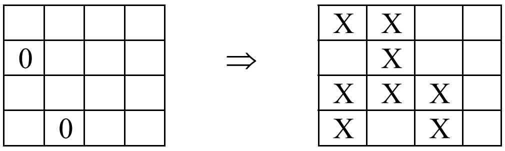
2. **(C)** Se somarmos os números de lados de todos os polígonos (20 hexágonos e 12 pentágonos) que compõem a superfície da bola, obteremos um valor que é duas vezes o número de costuras, pois cada costura é lado comum de exatamente dois polígonos. Assim, temos que $2\times$ (número de costuras) $=12\times5+20\times6=180$, donde o número de costuras é 90.

3. **(A)** A grade é um quadrado de lado igual a $5cm$, logo sua área é igual a $25cm^2$. A parte sombreada da grade é formada por quatro triângulos, sendo que dois deles têm base $1cm$ e altura $2cm$ e os outros dois têm base $1cm$ e altura $3cm$. Logo a área sombreada é igual a $2\times\frac{1\times2}{2}+2\times\frac{1\times3}{2}=5cm^2$ e a área não sombreada é igual a $25-5=20cm^2$. Assim, a razão pedida é $\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$.

4. **(C)** Vamos primeiro analisar a informação contida na diagonal da tabela indicada pelos números dentro dos quadradinhos.

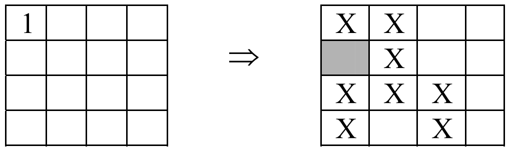
		TARDE			
		Abacaxi	Banana	Chocolate	Doce de leite
MANHÃ	Abacaxi	$\boxed{1}$	8	0	3
	Banana	6	$\boxed{2}$	7	5
	Chocolate	3	3	$\boxed{0}$	5
	Doce de Leite	2	9	9	$\boxed{1}$

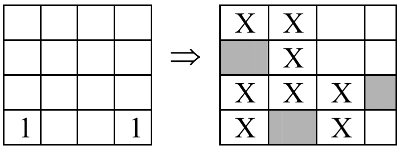
Esses números indicam quantos foram as crianças que tomaram sorvetes com o mesmo sabor pela manhã e pela tarde: 1 tomou sorvetes de abacaxi, 2 de banana, 0 de chocolate e 1 de doce de leite. Todos os outros estudantes comeram sorvetes de sabores diferentes pela manhã e à tarde; estes são em número de $64-(1+2+0+1)=60$.



5. **(B)** Notamos primeiro que se uma casa tem o algarismo 0, então nenhuma das casas vizinhas pode estar pintada. Logo as casas marcadas com um X na figura ao lado não foram pintadas:

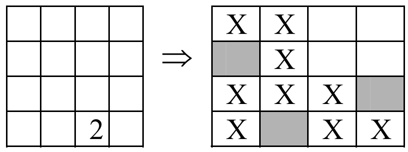
Consideremos agora a casa do canto superior direito, na qual aparece o número 1. Ela tem 3 vizinhas, e já sabemos que duas delas não foram pintadas; logo, a vizinha que sobra (a casa imediatamente abaixo) foi pintada.

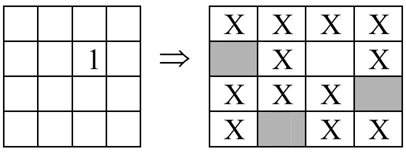




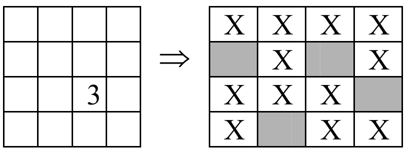
Podemos aplicar o mesmo argumento às casas do canto inferior esquerdo e do canto inferior direito.

Olhamos agora para o 2 na última linha. Como esta casa já tem duas vizinhas pintadas, todas suas outras vizinhas não foram pintadas:





Argumento idêntico se aplica à casa da segunda linha e terceira coluna, pois nela aparece um 1 e já temos uma de suas vizinhas pintadas. Logo, as suas outras 3 vizinhas não foram pintadas



Finalmente, usamos o 3 que aparece na casa da terceira linha e terceira coluna; esta casa já tem 2 vizinhas pintadas, logo deve haver mais uma de suas vizinhas pintada. Esta vizinha só pode ser a casa em branco na figura acima, e podemos completar a tabela:

Concluímos que o número de casas pintadas é 4.

6. **(B)** A formação de um número de 6 algarismos é ilustrada a seguir.

centena de milhar	dezena de milhar	unidade de milhar	centena	dezena	unidade

Para se obter o menor número possível, os menores algarismos devem estar o mais à esquerda possível (na casa do milhar); e para se obter o maior número possível os maiores algarismos devem também estar o mais à esquerda possível (na casa do milhar).

Jorge joga primeiro: Para obter o menor número possível, ele coloca o menor algarismo que ele possui, que é o 2, na casa das centenas de milhar. Se ele não fizesse isso, Larissa colocaria seu 5 nesta casa na próxima jogada, obtendo assim um número maior.

2	dezena de milhar	unidade de milhar	centena	dezena	unidade

Agora é a vez de Larissa: Para obter o maior número possível, ela coloca o maior algarismo que ela possui, que é o 5, na casa das dezenas de milhar, pois a casa das centenas de milhar já está ocupada.

2	5	unidade de milhar	centena	dezena	unidade

Jorge tem agora os algarismos 4 e 6, e Larissa 1 e 3. Logo, os algarismos de Larissa são menores dos que os de Jorge, o que determina a estratégia de Jorge : ele deve tentar colocar seus algarismos o mais à direita possível, com o 6 à direita do 4. Por sua vez, Larissa deve tentar colocar seus algarismos o mais à esquerda possível, com o 3 à esquerda do 1. Jorge então coloca o 6 na casa das unidades.

Jorge joga: Ele coloca o algarismo 6 na casadas unidades.

2	5	unidade de milhar	centena	dezena	6

Larissa joga: Ela coloca seu 1 na casa das dezenas.

2	5	unidade de milhar	centena	1	6

Agora Jorge tem apenas o algarismo 4 e Larissa o 3. Ele então coloca o 4 na casa das centenas, e Larissa coloca o 3 na casa das unidades de milhar, acabando assim o jogo.

2	5	3	4	1	6

Logo, o número final obtido se os dois jogadores forem espertos é 253416.

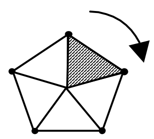
1) Uma professora tem 237 balas para dar a seus 31 alunos. Qual é o número mínimo de balas a mais que ela precisa conseguir para que todos os alunos recebam a mesma quantidade de balas, sem sobrar nenhuma?

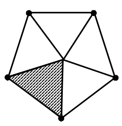
A) 11 B) 20 C) 21 D) 31 E) 41

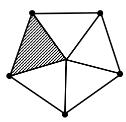
2) Um artesão começa a trabalhar às 8 h e produz 6 braceletes a cada vinte minutos; já seu auxiliar começa a trabalhar uma hora depois e produz 8 braceletes do mesmo tipo a cada meia hora. O artesão pára de trabalhar às 12 h, mas avisa ao seu auxiliar que este deverá continuar trabalhando até produzir o mesmo que ele. A que horas o auxiliar irá parar?

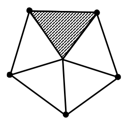
A) 12 h B) 12 h 30 min C) 13 h D) 13 h 30 min E) 14h 30 min

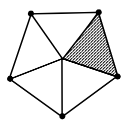
3) Se girarmos o pentágono regular, ao lado, de um ângulo de 252°, em torno do seu centro, no sentido horário, qual figura será obtida?
Observação: Sentido horário é o sentido em que giram os ponteiros do relógio; no caso ele está indicado pela seta no desenho.

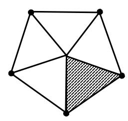



A)


B)


C)


D)


E)

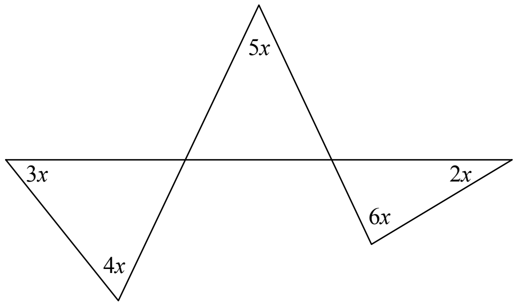
4) O perímetro de um retângulo é 100 cm e a diagonal mede x cm. Qual é a área do retângulo em função de x?

A) $625-x^2$ B) $625-\frac{x^2}{2}$ C) $1250-\frac{x^2}{2}$ D) $250-\frac{x^2}{2}$ E) $2500-\frac{x^2}{2}$

5) Se $x+y=8$ e $xy=15$, qual é o valor de $x^2+6xy+y^2$?

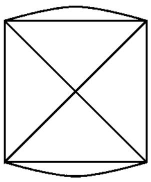
A) 64 B) 109 C) 120 D) 124 E) 154

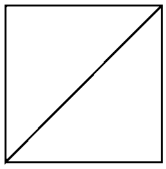
6) Na figura estão indicadas em graus as medidas de alguns ângulos em função de x. Quanto vale x?

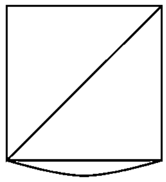


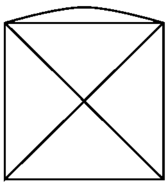
A) 6° B) 12° C) 18°
D) 20° E) 24°

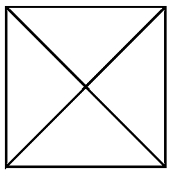
7) Qual dos seguintes desenhos **não pode ser feito** sem tirar o lápis do papel e passando apenas uma vez por cada linha?

A) 

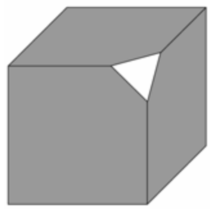
B) 

C) 

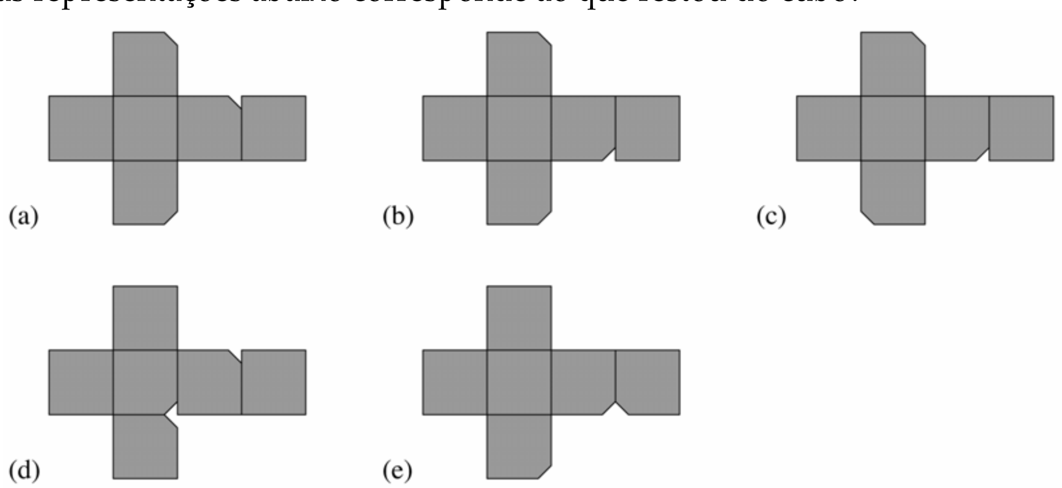
D) 

E) 

8)Cortamos um canto de um cubo, como mostrado na seguinte figura.



Qual das representações abaixo corresponde ao que restou do cubo?



9)Você já viu *um truque numérico*? Aqui vão os passos de um truque numérico:

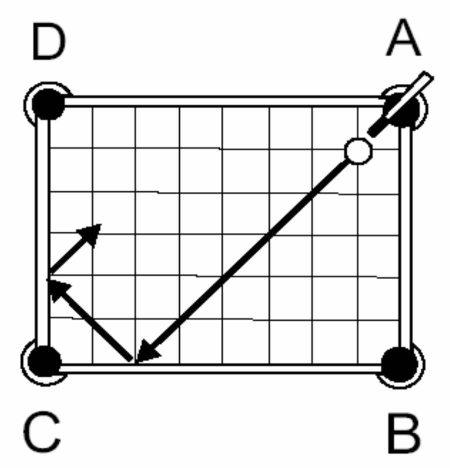
(I) Escolha um número qualquer.
(II) Multiplique-o por 6.
(III) Do resultado subtraia 21.
(IV) Divida agora este novo resultado por 3.
(V) Deste último resultado subtraia o dobro do número que você escolheu.

(a) Experimente fazer esses cinco passos três vezes, iniciando cada vez com um número diferente. Qual foi o resultado de seu experimento?

(b) A seguir, usando a letra x para representar o número que você pensou, mostre por que os resultados do item (a) não são apenas uma coincidência, mas sim um fato matemático.

10)Na figura abaixo vemos uma mesa de sinuca quadriculada e parte da trajetória de uma bola, tacada a partir de um canto da mesa, de modo que, sempre, ao bater em uma das bordas da mesa, segue seu movimento formando ângulos de 45° com a borda.

(a) Em qual das quatro caçapas a bola cairá?
(b) Quantas vezes a bola baterá nas bordas da mesa antes de cair na caçapa?
(c) A bola atravessará a diagonal de quantos desse quadrados durante sua trajetória?

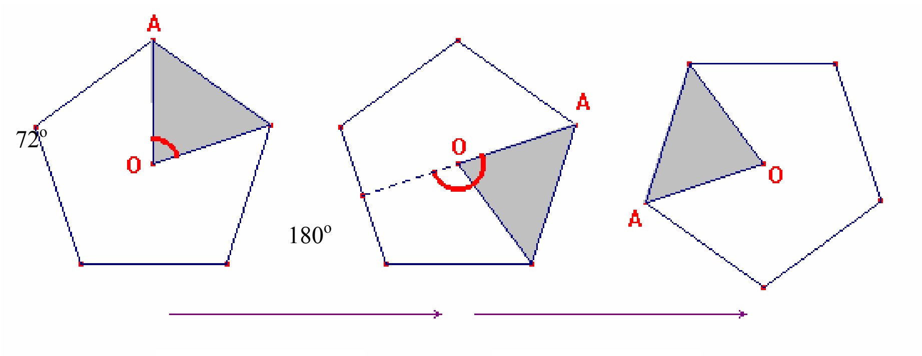


1. **(A)** O algoritmo de divisão de Euclides nos dá $237 = 7\times 31+20$; logo 237 não é divisível por 31. Isso quer dizer que a professora realmente vai ter que comprar mais balas para que todos os alunos recebam o mesmo número de balas. De acordo com o enunciado, devemos então adicionar à expressão $7\times 31+20$ o menor inteiro positivo x tal que $7\times 31+20+x$ seja múltiplo de 31. Como $x = 31-20 = 11$, basta que a professora compre 11 balas.

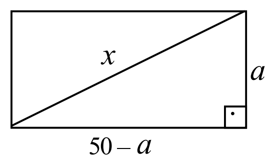
2.**(D)** O artesão produz 6 braceletes a cada 20 minutos. Como $1 \text{ hora} = 60 \text{ minutos} = 3 \times 20 \text{ minutos}$, o artesão produz $6\times 3 = 18$ braceletes em 1 hora. Como ele trabalhou $12\,\text{horas} - 8\,\text{horas} = 4\,\text{horas}$, o número de braceletes feitos pelo artesão é $18\times 4 = 72$.

O auxiliar produz 8 braceletes a cada meia-hora, portanto em 1 hora ele produz 16 braceletes. Para produzir 72 braceletes ele precisará de $\frac{72}{16} = 4{,}5$ horas = 4 horas e 30 minutos. Como ele inicia seu trabalho às 9 horas, ele terminará seu trabalho às $9 \text{ horas} + 4 \text{ horas} + 30 \text{ minutos} = 13 \text{ horas e } 30 \text{ minutos}$.

3. **(B)** O pentágono tem 5 lados, logo seu ângulo central é $\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$. Como $252^\circ = 72^\circ + 180^\circ$, podemos pensar na rotação de 252° como uma rotação de 72° seguida de outra de 180°, conforme ilustrado na figura abaixo, onde *O* é o centro do polígono.



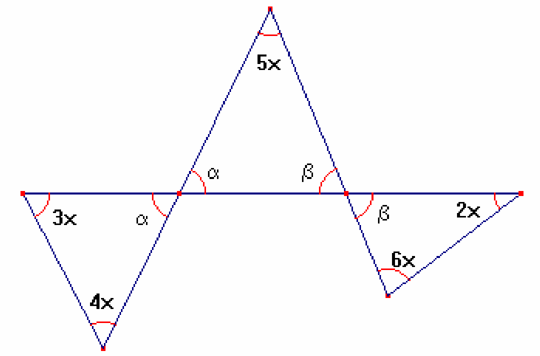
4. **(C)** **Solução 1:** Como o perímetro do retângulo é 100, seu semi-perímetro é 50. Como o semi-perímetro de um retângulo é a soma do comprimento com a largura, concluímos que esses são da forma a e $50-a$. A área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura. No nosso caso, esta área é $(50-a).a = 50a-a^2$ .Pelo teorema de Pitágoras, temos $x^2 = (50-a)^2 + a^2$, ou seja, $x^2 = 2500-100a+2a^2 = 2500-2\left(50a-a^2\right)$. Logo $50a-a^2 = \frac{1}{2}\left(2500-x^2\right)$ e obtemos a expressão da área do retângulo em função de x.



Solução 2: Área do retângulo de medidas a e b é $A = ab$. Como $a+b=50$, temos $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab = 50^2$. Pelo Teorema de Pitágoras, $x^2 = a^2+b^2$, assim, $x^2+2A = 2500$

5. **(D)** Usando a identidade $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, temos
$x^2+6xy+y^2 = (x^2+2xy+y^2)+4xy = (x+y)^2+4xy = 8^2+4\times 15 = 124$

6. **(C)** Completamos a figura marcando os ângulos α e β, lembrando que ângulos opostos pelo vértice são iguais. Como a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º, podemos escrever as três igualdades abaixo, uma para cada um dos triângulos da figura:



$$\alpha + 7x = 180^o$$
$$\beta + 8x = 180^o$$
$$\alpha + \beta + 5x = 180^o$$

Logo,

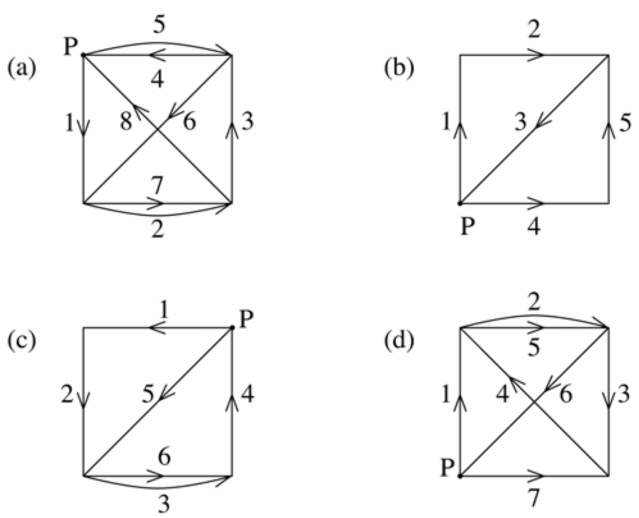
$$(\alpha + 7x) + (\beta + 8x) - (\alpha + \beta + 5x) = 180^o + 180^o - 180^o = 180^o$$

e como

$$(\alpha + 7x) + (\beta + 8x) - (\alpha + \beta + 5x) = \alpha + 7x + \beta + 8x - \alpha - \beta - 5x = 10x$$

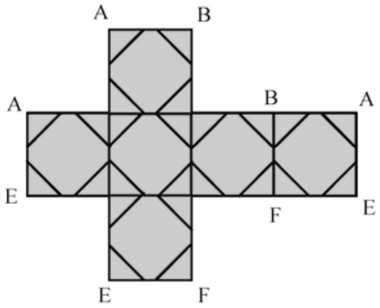
segue que $10x = 180^o$, donde $x = 18^o$

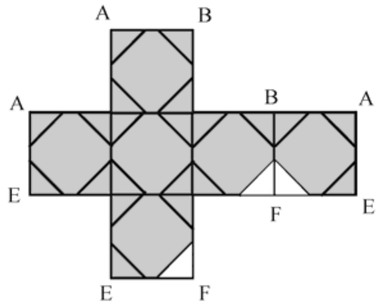
7. **(E)**



Observe nas ilustrações (a), (b), (c) e (d) que iniciando o desenho no ponto P e seguindo as setas de acordo com a ordem numérica, é possível completar cada desenho sem tirar o lápis do papel.
Já o desenho da opção (e) não pode ser construído sem tirar o lápis do papel. De fato, excetuando-se o vértice de início do traçado e o vértice de finalização, os demais vértices do desenho devem possuir obrigatoriamente um número par de linhas chegando até eles, pois a cada vez que se chega a um desses vértices por uma linha, deixa-se esse mesmo vértice por outra linha. No caso da letra (e), os quatro vértices externos possuem três linhas chegando a cada um deles, logo é impossível fazer tal traçado.

8. **(E)** Cortando um canto do cubo, eliminamos um de seus vértices. Como cada vértice se liga a três arestas do cubo, uma representação do cubo cortado deve mostrar três cortes ao redor de um mesmo vértice.





9. **(a)** Vamos fazer o experimento com os números 0, 5 e – 4.

$$0 \xrightarrow[\text{x } 6]{} 0 \xrightarrow[-21]{} -21 \xrightarrow[\div 3]{} -7 \xrightarrow[-(0 \text{ x } 2)=0]{} -7$$

$$5 \xrightarrow[\text{x } 6]{} 30 \xrightarrow[-21]{} 9 \xrightarrow[\div 3]{} 3 \xrightarrow[-(5 \text{ x } 2)=-10]{} -7$$

$$-4 \xrightarrow[\text{x } 6]{} -24 \xrightarrow[-21]{} -45 \xrightarrow[\div 3]{} -15 \xrightarrow[-(-4 \text{ x } 2)=+8]{} -7$$

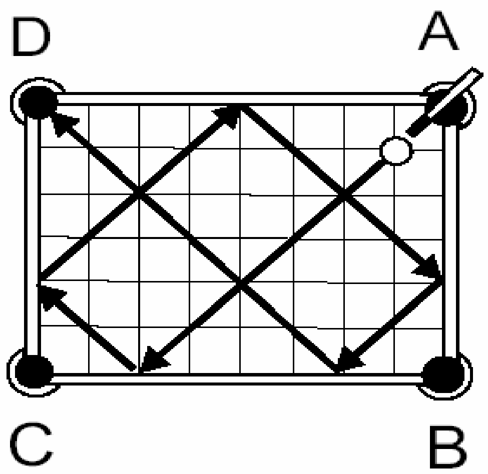
O resultado final é sempre -7.

(b) É razoável conjeturar então que para qualquer número escolhido o resultado final deste procedimento será sempre –7. Seja x o número inicial. Temos então as operações:

$$x \xrightarrow[\text{x } 6]{} 6x \xrightarrow[-21]{} 6x-21 \xrightarrow[\div 3]{} \frac{6x-21}{3} \xrightarrow[-2x]{} 2x-7-2x=-7$$

Portanto, o resultado será -7 qualquer que seja o número inicialmente escolhido.

10. A bola muda a direção de sua trajetória cada vez que bate na borda da mesa. Como a trajetória faz sempre um ângulo de 45° com a borda, a bola seguirá sempre as diagonais dos quadrados que ela cruza.
a) Traçando esta trajetória, concluímos que a bola cairá na caçapa D;
b) A bola baterá 5 vezes na borda da mesa;
c)Contando quantos são os quadradinhos atravessados, descobrimos que ela atravessará 23 quadradinhos.



1) Se m e n são inteiros maiores do que zero com $m < n$, definimos $m \nabla n$ como a soma dos inteiros entre m e n, incluindo m e n. Por exemplo, $5 \nabla 8 = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$.

Então o valor de $\frac{22\nabla 26}{4\nabla 6}$ é:

A) 4 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

2) O preço de uma corrida de táxi é R\$ 2,50 fixos ("bandeirada"), mais R\$ 0,10 por cada 100 metros rodados. Tenho apenas R\$ 10,00 no bolso. Logo, tenho dinheiro para uma corrida de até:

A) $2{,}5\,km$ B) $5{,}0\,km$ C) $7{,}5\,km$ D) $10{,}0\,km$ E) $12{,}5\,km$

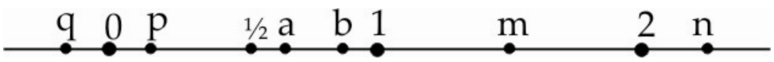
3) Quantos números entre 1 e 601 são múltiplos de 3 ou múltiplos de 4?

A) 100 B) 150 C) 250 D) 300 E) 430

4) Se x, y e z são números inteiros positivos tais que $xyz = 240$, $xy + z = 46$ *e* $x + yz = 64$, qual é o valor de $x + y + z$?

A) 19 B) 20 C) 21 D) 24 E) 36

5) Na reta abaixo estão representados os cinco números **a, b, m, n, p** e **q**



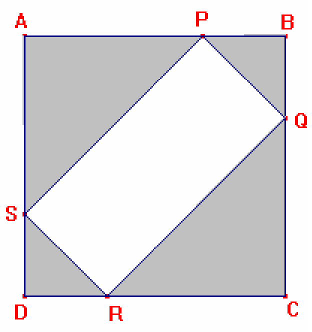
Então os números que melhor representam $a+b$, $a-b$ e ab são, respectivamente,

(A) m, p e q (B) m, q e p (C) n, q e p (D) n, p e q (E) q, m e p

6) Numa corrida de carros, um piloto percorreu três trechos: um de $240\,km$, um de $300\,km$ e um de $400\,km$. O piloto sabe que as velocidades médias nesses trechos foram $40\,km/h$, $75\,km/h$ e $80\,km/h$, mas não se lembra qual dessas velocidades corresponde a cada um desses trechos.. Podemos garantir que o tempo total em horas gasto pelo piloto para percorrer os três trechos foi:

A) menor ou igual a 13 horas
B) maior ou igual a 13 horas e menor ou igual a 16 horas
C) maior ou igual a 16 horas e menor ou igual a 17 horas
D) maior ou igual a 15 horas e menor ou igual a 18 horas
E) maior ou igual a 18 horas

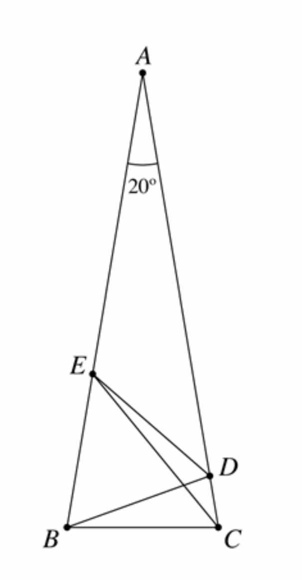
7) Do quadrado $ABCD$ foram cortados os triângulos isósceles sombreados, como na figura, restando o retângulo $PQRS$. A área total do que foi cortada é de $200m^2$. Qual é o comprimento de PR?



(A) $\sqrt{200}m$ (B) $20m$ (C) $\sqrt{800}m$ (D) $25m$ (E) $88m$

8) Na figura o triângulo ABC é isósceles, $B\hat{A}C = 20^\circ$ e $BC = BD = BE$.

Determine a medida do ângulo $B\hat{D}E$.



9) São dadas 4 moedas aparentemente iguais, das quais 3 são verdadeiras e por isso têm o mesmo peso; uma é falsa e por isso tem peso diferente. Não se sabe se a moeda falsa é mais leve ou mais pesada que as demais. Mostre que é possível determinar a moeda diferente empregando somente duas pesagens em uma balança de pratos. *Observação*: Neste tipo de balança podemos comparar os pesos colocados nos dois pratos, ou seja, a balança pode ficar equilibrada ou pender para o lado mais pesado.

1. **(C)** De acordo com a definição de ∇, temos $\dfrac{22\nabla 26}{4\nabla 6}=\dfrac{22+23+24+25+26}{4+5+6}=\dfrac{120}{15}=8$.

2. **(C)** Como a bandeirada é fixa, temos $10,00-2,50=7,50$ reais a serem gastos apenas com os metros rodados. Cada trecho de 100 metros rodado custa R$ 0,10, então com R$ 7,50 posso fazer uma corrida de $\dfrac{7,50}{0,10}=\dfrac{750}{10}=75$ trechos de 100 metros cada um, ou seja $75\times 100=7500$ metros. Como 1 quilômetro tem 1000 metros, segue que com R$ $10,00$ posso pagar uma corrida de até $7500\text{ metros}=\dfrac{7500}{1000}\text{quilômetros}=7,5\text{ quilômetros}$.

3. **(D)** Para achar o número de múltiplos de 3 compreendidos de 1 a 601, basta usar o algoritmo da divisão e escrever $601=200\times 3+1$. Isso mostra que $3\times \underset{\uparrow}{1}$, $3\times \underset{\uparrow}{2}$, ..., $3\times \underset{\uparrow}{200}$ são os múltiplos de 3 de 1 a 601, ou seja, temos 200 destes múltiplos. Do mesmo modo vemos que existem 150 múltiplos de 4 de 1 a 601.
Nesse total $\underbrace{200}_{\substack{\text{múltiplos}\\ \text{de 3}}}+\underbrace{150}_{\substack{\text{múltiplos}\\ \text{de 4}}}=350$, alguns números aparecem contados duas vezes, pois são múltiplos de 3 e de 4 ao mesmo tempo. Por exemplo: $12, 36$ e 60 foram incluídos nos 200 múltiplos de 3 e também nos 150 múltiplos de 4. Lembre que os múltiplos de 3 e de 4 são também múltiplos de 12. O mesmo argumento usado acima mostra que temos 50 múltiplos de 12 de 1 a 601. Logo o número de múltiplos de 3 ou 4 de 1 a 601 é $350-50=300$.

4. **(B) Solução 1:** De $xyz=240$ segue que $xy=\dfrac{240}{z}$; substituindo em $xy+z=46$ obtemos $\dfrac{240}{z}+z=46$, ou seja, $z^2-46z+240=0$. As raízes desta equação são números cuja soma é 46 e cujo produto é 240, ou seja, as raízes são 6 e 40. Logo, $z=6$ ou $z=40\,(\mathrm{I})$. Do mesmo modo, a substituição de $yz=\dfrac{240}{x}$ em $x+yz=64$ nos leva a $x=4$ ou $x=60\,(\mathrm{II})$. De $xyz=240$, segue que $y=\dfrac{240}{xz}$. Como y é um número inteiro, então xz é um divisor de 240. Segue de (I) e (II) que as possibilidades para xz são:

$$\underbrace{4}_{x}\times\underbrace{6}_{z}=24\ ,\ \underbrace{4}_{x}\times\underbrace{40}_{z}=160\ ,\ \underbrace{60}_{x}\times\underbrace{6}_{z}=360\ ,\ \underbrace{60}_{x}\times\underbrace{40}_{z}=2400$$

Vemos que só podemos ter $x=4$ e $z=6$, pois em qualquer outro caso o produto xz não é um divisor de 240. Segue que $y=\dfrac{240}{xz}=\dfrac{240}{4\times 6}=10$, donde $x+y+z=4+10+6=20$.

Solução 2: Somando $xy+z=46$ e $x+yz=64$, obtemos:

$$xy+z+x+yz=(x+z)+y(x+z)=(x+z)(y+1)=110 \text{ (I)}$$

e vemos que $y+1$ é um divisor de 110. Logo, temos as possibilidades $y+1=1,2,5,10,11,22,55$ e 110, ou seja, $y=0,1,4,9,10,21,54$ e 109. Por outro lado, y é um divisor de 240 porque $xyz=240$, além disso y é positivo, que nos deixa com as possibilidades e $y=1,4$ e 10.

Se $y=1$ então $\begin{cases}(x+z)(y+1)=110 \Rightarrow x+z=55\\ xy+z=46 \Rightarrow x+z=46\end{cases}$; o que não é possível. Logo $y \neq 1$.

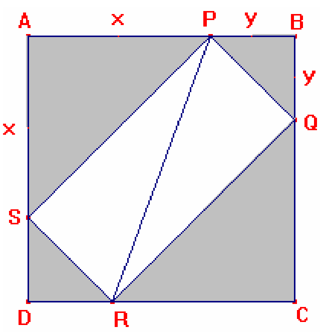
Se $y=4$ então $\begin{cases}(x+z)(y+1)=110 \Rightarrow x+z=22\\ xyz=240 \Rightarrow xz=60\end{cases}$, e podemos verificar (por exemplo, com uma lista de divisores de 60 ou então resolvendo a equação $w^2-22w+60=0$) que não há valores inteiros positivos de x e z que verifiquem estas duas condições. Logo $y \neq 4$.

Se $y=10$ então $\begin{cases}(x+z)(y+1)=110 \Rightarrow x+z=10\\ xyz=240 \Rightarrow xz=24\end{cases}$, donde concluímos que $x=4$ e $z=6$. Finalmente, temos $x+y+z=4+10+6=20$.

5. **(B)** Notamos que a e b são números maiores que 1/2 e menores que 1. Logo $a+b$ é um número maior que 1 e menor que 2; assim, $a+b$ só pode ser representado por m. Como $a<b$, segue que $a-b$ é negativo e portanto só pode ser representado por q. Quanto ao produto ab, notamos primeiro que como a e b são positivos, seu produto é positivo. Por outro lado, temos $b<1$ e $a>0$, donde $ab<a$.Logo o único número que pode representar ab é p.

6. **(D)** O menor tempo de percurso é obtido quando se percorre o maior trecho com a maior velocidade e o menor trecho com a menor velocidade. Já o maior tempo é obtido quando se percorre o maior trecho com a menor velocidade e o menor trecho com a maior velocidade. Assim, o tempo total gasto pelo piloto nos três trechos é no mínimo $\frac{240}{40}+\frac{300}{75}+\frac{400}{80}=15$ horas e no máximo $\frac{240}{80}+\frac{300}{75}+\frac{400}{40}=17$ horas.

7. **(B)** Primeiro notamos que os triângulos *APS* e *CQR* são congruentes, pois têm os três ângulos iguais (um deles é reto) e também um de seus lados *(PS = QR)*. Do mesmo modo os triângulos *BPQ* e *DRS* também são congruentes. Sejam $AP=x$ e $BP=y$; então a área do triângulo *APS* é $\frac{1}{2}x^2$ e a do triângulo *BPQ* é $\frac{1}{2}y^2$. Logo a área cortada foi de $2\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2\right)=x^2+y^2$, e concluímos que $x^2+y^2=200$.



Agora notamos que *PR* é a hipotenusa do triângulo retângulo *PSR*; para calcular *PR* basta saber o comprimento dos catetos *PS* e *RS*. Mas *PS* é a hipotenusa do triângulo retângulo *APS*; do teorema de Pitágoras segue que $PS^2=AS^2+AP^2=x^2+x^2=2x^2$; do mesmo modo obtemos $RS^2=2y^2$. Logo $PR^2=PS^2+RS^2=2x^2+2y^2=2(x^2+y^2)=2\times 200=400$, ou seja, $PR=\sqrt{400}=20\,m$.

8. Lembramos que um triângulo isósceles é caracterizado tanto por ter dois lados iguais como por ter dois ângulos iguais.
A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°. Como $\hat{A}=20^{\circ}$ e $\hat{B}=\hat{C}$, segue que $180^{\circ}=20^{\circ}+\hat{B}+\hat{C}=20^{\circ}+2\hat{B}$. Logo, $\hat{B}=\hat{C}=80^{\circ}$.

Pelo enunciado temos $BC=BD$, donde o triângulo *BDC* é também isósceles de base *CD*. Então, $C\hat{D}B=\hat{C}$ e portanto $C\hat{D}B=80^{\circ}$. Considerando a soma dos ângulos internos do triângulo *BCD*, temos $C\hat{B}D+C\hat{D}B+\hat{C}=180^{\circ}$. Substituindo os valores acima, temos $C\hat{B}D+80^{\circ}+80^{\circ}=180^{\circ}$.Concluímos que $C\hat{B}D=20^{\circ}$, e segue então que $D\hat{B}E=\hat{B}-20^{\circ}=80^{\circ}-20=60^{\circ}$.

O triângulo *BDE* também é isósceles, pois $BD=BE$. Logo $B\hat{D}E=B\hat{E}D$. Como $B\hat{D}E+B\hat{E}D+60^{\circ}=180^{\circ}$, concluímos que $B\hat{D}E=60^{\circ}$.

9. Sejam *A*, *B*, *C* e *D* as quatro moedas. Comparamos as moedas *A* e *B* na balança, colocando uma em cada prato. Dois casos podem ocorrer: a balança fica em equilíbrio ou a balança não fica em equilíbrio. Vamos analisar separadamente cada caso.

1º Caso: A balança fica equilibrada. Podemos concluir que *A* e *B* têm o mesmo peso, e logo são verdadeiras. Vamos então comparar *A* com *C*. Para isso, mantemos *A* na balança e colocamos *C* no lugar de *B*. Se houver equilíbrio novamente, é porque *A* e *C* têm o mesmo peso e logo são verdadeiras. Portanto, *A*, *B* e *C* são verdadeiras, e a única opção é que *D* seja falsa. Se não houver equilíbrio, *C* será a moeda falsa.

2º Caso: A balança não fica equilibrada. Logo uma das duas moedas, *A* ou *B* será falsa. Substituímos *A* por *C* na balança. Se houver equilíbrio, *A* será a moeda falsa. Se não houver equilíbrio, a moeda falsa será *B*.

Observe que nos dois casos só utilizamos a balança duas vezes.

1)Determine o valor de $123456123456 \div 1000001 =$.

2)Toda vez que Joãozinho vai ao cinema, ele toma 2 refrigerantes. Ele gastou toda a sua mesada de R\$ $50,00$ indo ao cinema 6 vezes e tomando um total de 20 refrigerantes, incluindo os que ele tomou quando foi ao cinema. Se Joãozinho tivesse tomado só um refrigerante cada vez que foi ao cinema, com essa economia ele poderia ter ido ao cinema mais uma vez, tomando um refrigerante também nessa ocasião. A respeito do preço do ingresso no cinema e preço do refrigerante, podemos afirmar que:

A) o preço do ingresso é o triplo do preço do refrigerante.
B) o preço do ingresso é o quádruplo do preço do refrigerante.
C) o preço do ingresso é o quíntuplo do preço do refrigerante.
D) o ingresso é R\$ $6,00$ mais caro que o refrigerante.
E) o ingresso é R\$ $5,00$ mais caro que o refrigerante

3)O quociente de 50^{50} por 25^{25} é igual a :

A) 25^{25} B) 10^{25} C) 100^{25} D) 2^{25} E) 2×25^{25}

4)Você possui apenas palitos com $6cm$ e $7cm$ de comprimento. O número mínimo de palitos que você precisa para cobrir com esses palitos um segmento de reta com 2 metros é:

A) 29 B) 30 C) 31 D) 32 E) 33

5)A maior raiz da equação $(x-37)^2 - 169 = 0$ é:

A) 39 B) 43 C) 47 D) 50 E) 53

6)Uma certa máquina tem um visor, onde aparece um número inteiro x, e duas teclas A e B. Quando se aperta a tecla A o número do visor é substituído por 2x + 1. Quando se aperta a tecla B o número do visor é substituído por 3x – 1.
Se no visor está o número 5, o maior número de dois algarismos que se pode obter apertando alguma seqüência das teclas A e B é:

A) 85 B) 87 C) 92 D) 95 E) 96

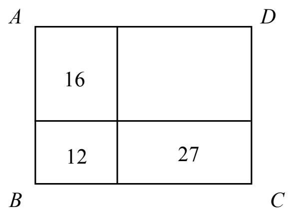
7)Em um quadrado mágico, a soma dos 3 números de cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma. A seguir temos um quadrado mágico, parcialmente preenchido.

1	14	x
26		13

Qual é o valor de x?

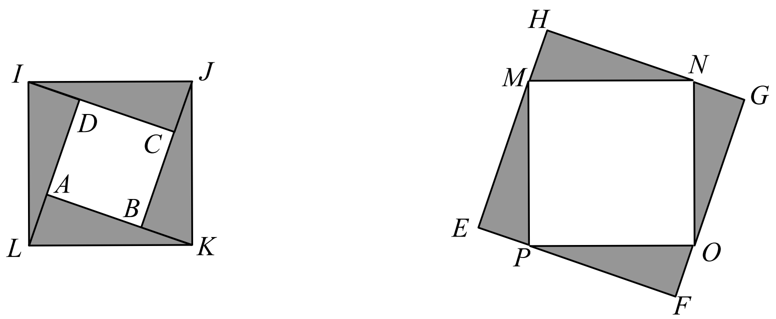
A) 20 B) 22 C) 23 D) 25 E) 27

8)Um retângulo *ABCD* está dividido em quatro retângulos menores. As áreas de três deles estão indicadas na figura abaixo. Qual é a área do retângulo *ABCD*?



A) 80 B) 84 C) 86 D) 88 E) 91

9) Quatro peças iguais, em forma de triângulo retângulo, foram dispostas de dois modos diferentes, como mostram as figuras abaixo.



Os quadrados *ABCD* e *EFGH* têm lados respectivamente iguais a 3 cm e 9 cm. Determine a medida do lado do quadrado *IJKL*.

1. É claro que com números tão grandes, a questão não pretende que se efetue a divisão. Para resolvê-la vamos usar alguns truques aritméticos:

$$123456123456 = 123456000000 + 123456 = 123456 \times 1000000 + 123456 =$$
$$= 123456 \times (1000000 + 1) = 123456 \times 1000001$$

Logo, $123456123456 \div 1000001 = 123456$.

2. **(C)** A economia teria sido equivalente a 6 refrigerantes, permitindo a Joãozinho mais um cinema e mais um refrigerante. Logo o ingresso do cinema é 5 vezes o valor do refrigerante.

3. **(C) Solução 1**: $\dfrac{50^{50}}{25^{25}} = \dfrac{(2 \times 5^2)^{50}}{(5^2)^{25}} = \dfrac{2^{50} \times 5^{100}}{5^{50}} = 2^{50} \times 5^{50} = (2^2 \times 5^2)^{25} = 100^{25}$

Solução 2: $\dfrac{50^{50}}{25^{25}} = \dfrac{(2 \times 25)^{50}}{25^{25}} = \dfrac{2^{50} \times 25^{50}}{25^{25}} = 2^{25} \times 2^{25} \times 25^{25} = 100^{25}$

4. **(A)** A quantidade utilizada de palitos é mínima quando o número de palitos de 7 cm utilizado é o maior possível. Dividindo 200 por 7 obtemos $200 = 28 \times 7 + 4$. Como $200 = 26 \times 7 + 18 = 26 \times 7 + 3 \times 6$, usando 26 palitos de 7 cm e 3 palitos de 6cm obtemos o que queríamos. Logo, o número mínimo de palitos é 26+3=29.

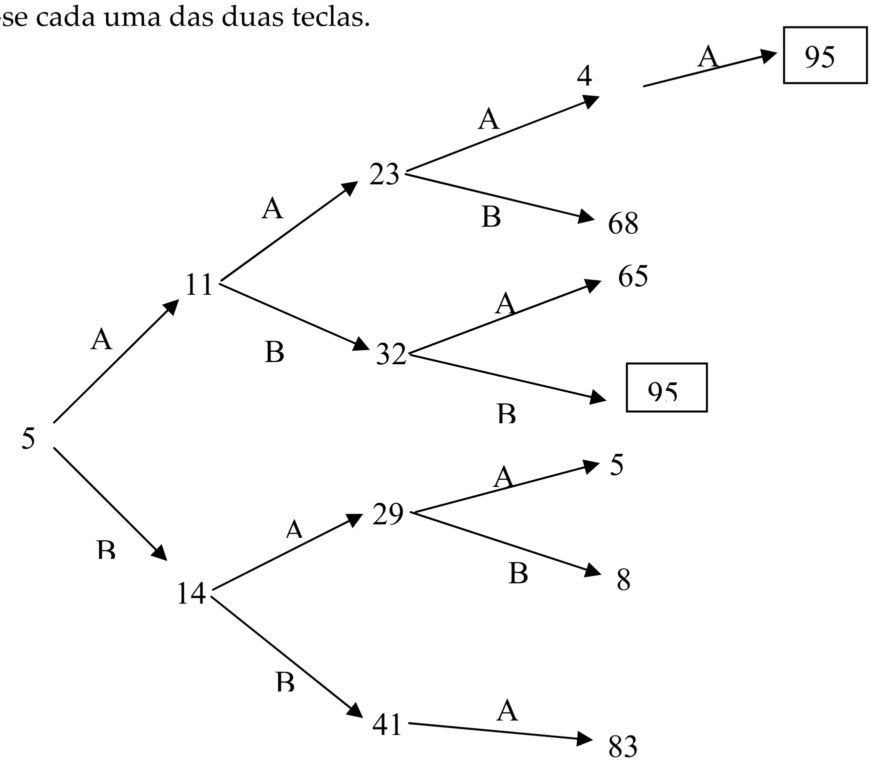
Comentário: Observe que a solução equivale a encontrar números inteiros x e y tais que. $200 = \underbrace{7y}_{\text{múltiplo de 7}} + \underbrace{6x}_{\text{múltiplo de 6}}$ *e y* seja o maior possível, onde y = número de palitos de *7cm* e x = número de palitos de 6*cm*.

5. **(D)**

Solução 1: Usando a fatoração $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:
$(x-37)^2 - 13^2 = 0 \Leftrightarrow (x-37-13)(x-37+13) = 0 \Leftrightarrow (x-50)(x-24) = 0$.
Logo, as raízes são 24 e 50.

Solução 2: Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados:
$(x-37)^2 = 13^2 \Leftrightarrow x - 37 = 13$ ou $x - 37 = -13$. Assim, $x = 50$ ou $x = 24$.

6. **(D)** O diagrama a seguir mostra os resultados que podem ser obtidos a partir do número 5 apertando-se cada uma das duas teclas.

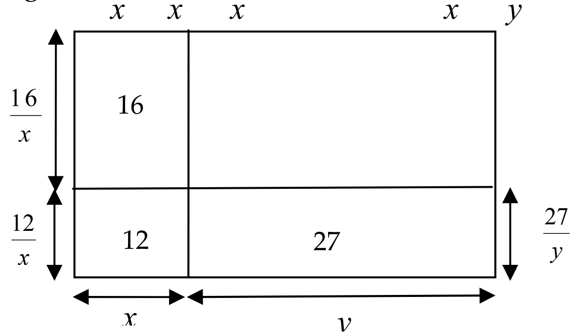


7. **(E)** Seja y um dos números do quadrado mágico, conforme a figura. De acordo com a regra de quadrado mágico temos $\underbrace{26+14+y}_{\text{soma dos números da diagonal que contém } y} = \underbrace{y+x+13}_{\text{soma dos números da coluna que contém } y}$. Segue que $26+14=x+13$, donde $x=27$.

		y
1	14	**x**
26		13

8. **(E) Solução 1:** Sejam x e y lados dos retângulos de áreas 12 e 27 respectivamente como indicado na figura. Logo, os outros lados desses retângulos são 12/x (retângulo de área 12), 16/x (retângulo de área 16) e 27/y (retângulo de área 27), como indicado na figura. Assim, o comprimento do retângulo ABCD é x+y e sua largura $\frac{16}{x}+\frac{12}{x}=\frac{28}{x}$. Claramente $\frac{12}{x}=\frac{27}{y}$.

Temos: $\frac{12}{x}=\frac{27}{y} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{27}{12} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{9}{4}$



A área de um retângulo é o produto do comprimento pela largura. Logo, a área de ABCD é $A=(x+y)\times\frac{28}{x}=28+\frac{28y}{x}=28+28\frac{y}{x}$. Logo, $A=28+28\times\frac{9}{4}=28+7\times 9=91$.

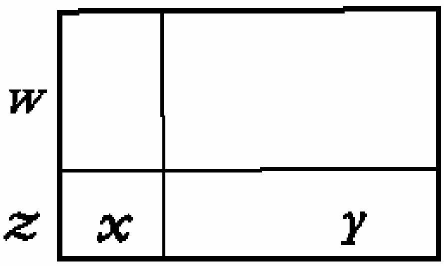
Solução 2: $xz = 12$

$yz = 27$

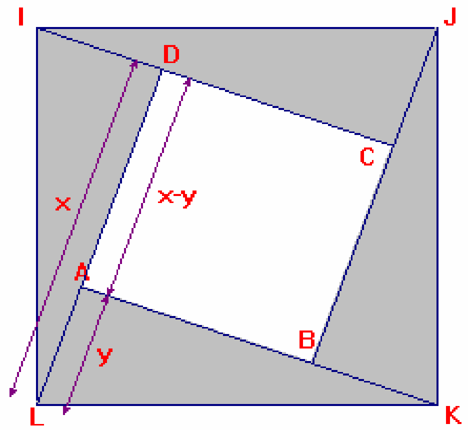
$xw = 16$

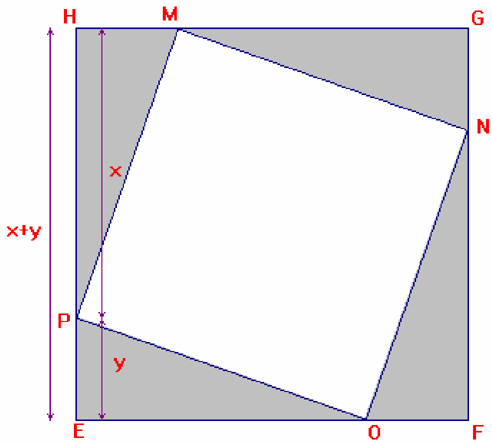
$xyzw = 27 \times 16$

$yw = \frac{27 \times 16}{xz} = \frac{27 \times 16}{12} = 91$



9. **Solução 1**: Sejam x e y o maior e o menor catetos, respectivamente, do triângulo retângulo. Como o lado do quadrado $ABCD$ mede $3cm$, temos $x - y = 3$. Por outro lado, como o lado de $EFGH$ mede $9cm$, temos $x + y = 9$. Resolvendo o sistema, encontramos $x = 6$ e $y = 3$. Logo, o lado do quadrado *IJKL*, que é a hipotenusa do triângulo retângulo, mede $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}\,cm$.





Solução 2: Os quadrados *IJKL* e *MNOP* têm como lados as hipotenusas dos triângulos retângulos dados, logo têm a mesma área. Superpondo-se as duas figuras e fazendo esses dois quadrados coincidirem, encontramos 8 triângulos e concluímos que

$8 \times \text{área do triângulo} = \text{área de } EFGH - \text{área de } ABCD = 9^2 - 3^2 = 72\ cm^2$. Logo a área de cada triângulo é 9 cm^2. Da figura temos

$$\text{área de } IJKL = 4 \times \text{área do triângulo} + \text{área de } ABCD = 4 \times 9 + 9 = 45.$$

Logo, o lado do quadrado IJKL é $\sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ cm.