V Olimpíada Matemática Centroamericana y del Caribe.

Costa Rica, 27 de Agosto de 2003.
Segundo día

Problema 4. Sean S_1 y S_2 dos circunferencias que se intersectan en dos puntos distintos P y Q. Sean ℓ_1 y ℓ_2 dos rectas paralelas, tales que:

i. ℓ_1 pasa por el punto P e intersecta a S_1 en un punto A_1 distinto de P y a S_2 en un punto A_2 distinto de P.

ii. ℓ_2 pasa por el punto Q e intersecta a S_1 en un punto B_1 distinto de Q y a S_2 en un punto B_2 distinto de Q.

Demostrar que los triángulos A_1QA_2 y B_1PB_2 tienen igual perímetro.

Problema 5. Un tablero cuadrado de 8cm de lado se divide en 64 casillas cuadradas de 1cm de lado cada una. Cada casilla se puede pintar de blanco o de negro. Encontrar el número total de maneras de colorear el tablero de modo tal que cada cuadrado de 2cm de lado formado por cuatro casillas con un vértice común, contenga dos casillas blancas y dos negras.

Problema 6. Digamos que un entero positivo es *tico* si la suma de sus dígitos (en base 10) es múltiplo de 2003.

i. Demostrar que existe un entero positivo N tal que sus primeros 2003 múltiplos, $N, 2N, 3N, \cdots, 2003N$, son todos *ticos*.

ii. ¿Existe algún entero positivo N tal que todos sus múltiplos sean *ticos*?

Tiempo: 4 horas 30 minutos.
Cada Problema vale 7 puntos.