VIII OMCC - Panamá 2006

Prueba por equipos
Informe final de actividades

Oscar Bernal

1 Introducción

La prueba por equipos es un evento tradicional en la Olimpiada Matemática de Centroamérica y el Caribe. Su objetivo es integrar a los estudiantes de diferentes delegaciones, generando lazos de amistad en torno a la sana competencia y la matemática. Para esta octava edición de la OMCC, la prueba por equipos tuvo varias etapas desarrollándose en forma simultánea, destinadas a dar fluidez al evento y a exponer la capacidad de decisión de los estudiantes para determinar en qué actividad involucrarse en un momento determinado. Este informe presenta las instrucciones que recibieron los estudiantes (con algunos ajustes que se realizaron sobre la marcha para dar más interés a la actividad), las diferentes etapas de la competencia y una pequeña tabla final de resultados.

2 Instrucciones

La prueba por equipos tendrá una "moneda" de cambio, que será denominada "panacentro". Como primera etapa se entregará a cada equipo un problema elemental, cuya solución debe ser entregada para recibir el primer monto de juego, 200 panacentros. La solución de este problema será revisada por los jueces de la prueba más adelante, en caso de ser incorrecta o imprecisa la solución se podrán decretar penalizaciones de hasta un 20% sobre el total de panacentros reunido por el equipo al final de la prueba.

Con los 200 panacentros obtenidos en la primera etapa, el equipo entra en la segunda etapa, inspirada en un casino con elementos matemáticos, escogiendo una de tres posibles actividades (los equipos pueden cambiar de actividad en cualquier momento de esta etapa):

- *Trabajar* por más panacentros.
- *Jugar* panacentros con otros equipos.
- *Jugar* panacentros en juegos sin competencia directa.

2.1 ¿Cómo trabajar por más panacentros?

Se tendrán dos estaciones de "trabajo" en las que se podrán ganar panacentros adicionales. Cada participante puede pasar máximo una vez por cada estación de trabajo. En estas estaciones, los coordinadores tendrán una lista con 36 problemas cada uno, de diferentes niveles de dificultad (no necesariamente ordenados). El estudiante, al llegar su turno, debe identificarse ante el coordinador, para verificar que no se haya presentado en esa estación de trabajo anteriormente. Una vez confirmado que puede participar, se lanzará un dado regular (cubo con las caras numeradas) que determinará la posible ganancia del estudiante en el problema que se le asignará (si el dado muestra d, la ganancia será igual a $5 \times d$). Una vez asignado el problema, el estudiante dispone de 90 segundos para dar su respuesta, si esta es correcta se le asignarán los panacentros convenidos según el dado, en caso de ser incorrecta se le asignarán 0 panacentros. En cualquiera de los dos casos el derecho del estudiante a pasar por esa estación se considerará utilizado.

2.2 ¿Cómo jugar panacentros con otros equipos?

En la segunda etapa los equipos podrán competir entre sí en mesas de juegos supervisadas por coordinadores de prueba. En estos juegos se enfrentarán dos equipos, que al momento de iniciar deben determinar una cantidad de apuesta común (es decir, la misma cantidad para cada equipo) que será el premio para el ganador al final de este juego particular. En caso de empate el monto en juego se dividirá. Es requisito para entrar a un juego disponer de los panacentros que se pondrán en juego, es decir, ningún equipo puede quedar en deuda en ningún momento. Así mismo, es requisito que los integrantes de cada equipo estén presentes en su totalidad, y deben permanecer desde que inicia la partida hasta que termina, la deserción de uno de ellos implica la victoria inmediata del rival.

Además de los juegos programados inicialmente por los organizadores, los participantes y los coordinadores de prueba podrán crear nuevos juegos durante el desarrollo de la competencia, mientras estos no vayan en detrimento del espíritu olímpico o la integridad y dignidad de los participantes.

2.3 ¿Cómo jugar panacentros en juegos sin competencia directa?

La segunda etapa de la competencia dispone de un juegos sin competencia directa. Durante los primeros 20 minutos de la segunda etapa, en una estación previamente determinada, los equipos podrán consignar una cierta cantidad de sus panacentros indicando, al momento de depositarlas, el equipo al que pertenecen esos panacentros y cuál equipo creen que tendrá la mayor cantidad de panacentros al finalizar esa segunda etapa (se denominará equipo objetivo). Si el equipo consignante acierta el equipo objetivo, el equipo consignante recibirá ocho veces la cantidad de panacentros consignados. Si el equipo objetivo obtiene tiene la segunda cantidad mayor de panacentros, el equipo consignante obtiene cuatro veces la cantidad consignada. Si el equipo objetivo resulta tercero en la cantidad de panacentros, el equipo consignante obtiene el doble de lo consignado. Si el equipo objetivo resulta cuarto, el equipo consignante recupera su dinero. En cualquier otro caso, el equipo consignante pierde los panacentros consignadas.

Es permitido que un equipo sea a la vez consignante y objetivo, no es permitido que un equipo haga consignaciones con dos o más objetivos diferentes.

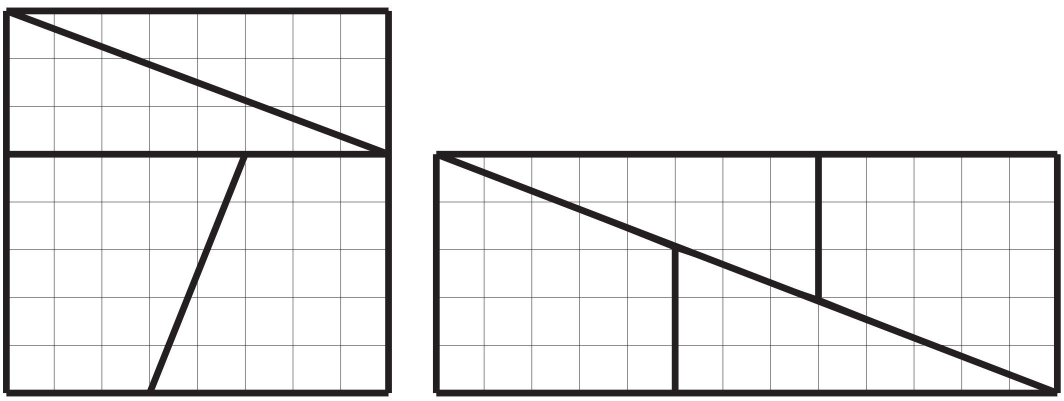
Al finalizar la segunda etapa, se reciben las cantidades de panacentros de los equipos, se cuentan en presencia de todos, se determinan los pagos a las consignaciones realizadas y se procede a iniciar la tercera y última etapa de la competencia.

En la tercera etapa de la competencia los equipos tendrán que resolver una prueba con algunos problemas matemáticos, que tendrán su máximo pago en panacentros indicado en el enunciado. Las pruebas serán calificadas por los jueces y en términos de los resultados obtenidos se asignarán panacentros proporcionalmente a los valores anunciados. Finalmente estos panacentros serán añadidas al acumulado de la segunda etapa y ese será el acumulado total del equipo, sobre el que se aplicarán las penalizaciones correspondientes a la primera etapa. El resultado obtenido en ese momento será entonces declarado definitivo y se tomará como base para declarar los ganadores de la prueba por equipos de la VIII OMCC - Panamá 2006.

3 Los panacentros

4 Primera etapa

La figura que se muestra consiste de un cuadrado de lado 8 (área 64) dividido en cuatro secciones, que se han reagrupado formando un rectángulo de base 13 y altura 5 (área 65). ¿Cuál es el error en la figura para que las dos áreas así obtenidas sean diferentes? Justifique detalladamente.



5 Segunda etapa

5.1 Estaciones de trabajo

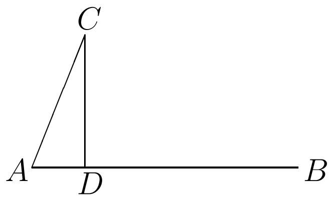
Cada una de las estaciones de trabajo recibió una copia de la siguiente lista de problemas, previamente recortados para entregar a cada participante un único problema al momento de presentarse a la mesa, así como la guía de respuestas

Problemas

1. ¿Cuál es el residuo de 21! al dividirse entre 23?

2. ¿Cuál es la raíz cuadrada de 1002001?

3. En la figura (no está a escala), $AB = 14$, $AC = 13$, $CD = 12$, $\measuredangle CDA = 90°$. ¿Cuánto mide BC?



4. Es conocido que 2000! termina en 499 ceros. ¿En cuántos ceros termina 2006!?

5. Un entero positivo se llama *libre de cuadrados* si ningún cuadrado perfecto mayor que 1 lo divide exactamente. ¿Si n es un número libre de cuadrados menor que 8!, cuál es la mayor cantidad de divisores que puede tener n?

6. n es un número ntero positivo y la suma de los números desde 1 hasta n (incluyéndolos) es un número primo. ¿Cuántos n cumplen esa condición?

7. a, b son enteros positivos y $ab = 2006$. El menor valor posible para $|a - b|$ es:

8. ¿Cuál es el menor n entero positivo para el que se cumple $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > 2.5$?

9. ¿Cuál es la mayor potencia de dos que se puede escribir con exactamente siete dígitos?

10. ¿Cuántos números se pueden escribir en más de una forma como producto de tres enteros positivos que sumen 36?

11. En una fiesta hay 10 niñas y 15 niños. Cada pieza de baile la bailan tantas parejas niña-niño como sea posible. ¿Cuántas piezas se pueden bailar sin que la misma pareja baile dos veces?

12. En Panacentro los números telefónicos tienen cinco dígitos y cumplen lo siguiente:

    - El primer dígito es 2, 3, 4, 5, 6 ó 7.
    - Todos los dígitos deben ser diferentes.

    ¿Cuál es la mayor cantidad de líneas telefónicas que pueden ser instaladas?

13. En una hoja de papel se ubican n puntos de forma que no hay tres de ellos en una misma recta. Al trazar todos los segmentos que unan dos de lo puntos José se da cuenta que hay menos de 100 segmentos. ¿Cuál es la mayor cantidad de puntos que pueden haberse pintado en la hoja?

14. Un cultivo de bacterias nicia con una sola bacteria. Acada hora la bacteria se divide en cuatro nuevas bacterias, una de las cuales es aislada en refrigeración mientras las otras tres permanecen en el cultivo para seguir multiplicándose. Cada vez que un bacteria se divide (cada hora) es en cuatro partes, una de las cuales se refrigera. ¿Cuánto tiempo pasará para tener más de 1000 bacterias en refrigeración?

15. El producto de dos enteros positivos diferentes es 225. ¿Cuál es el menor valor que puede tener su suma?

16. Una olimpiada de matemáticas tiene 36 participantes. El 50% de los participantes obtiene medalla, mientras que $\frac{7}{9}$ del total de los participantes obtiene medalla o mención. ¿Cuántas menciones se otorgan?

17. Durante unos días de feria, 5 amigos iban a cenar juntos, pero cada vez que iban siempre uno de ellos no asistía. Todos fueron al menos una vez más que Pedro, que solamente asistió 5 veces, y al menos una vez menos que Ana, quien fue 8 veces. Encontrar el numero de veces días de feria.

18. ¿Cuántos números naturales n de 5 cifras hay tales que $9|n$, $n = \overline{abcde}$ y $\overline{ace} - \overline{bde} = 760$?

19. ¿Cuántos números entre 10 y 2006 (incluyéndolos) cumplen que al suprimir la cifra de las unidades el número obtenido divide al original?

20. Determinar el mayor número entero positivo b tal que exista a entero positivo con $3 \cdot 2^a + 1 = b^2$.

21. Julián y Luciano tienen casillas postales en el mismo correo. En ese correo hay 100 casillas en cada fila, y las casillas están numeradas en forma consecutiva, en la primera fila de 1 a 100, en la segunda fila de 101 a 200, en la tercera fila de 201 a 300, etc.

    El número de la fila de la casilla de Julián es igual al número de la casilla de Luciano. Además, la suma de los números de las casillas de Julián y Luciano es 3000. Hallar el número de la casilla de Julián.

22. En el pizarrón hay escritos cuatro enteros positivos. Si se seleccionan tres de ellos, se calcula el promedio y se le suma el cuarto número se obtienen los números 89, 95, 101 y 117. Hallar la suma de los cuatro números del pizarrón.

23. Se consideran los puntos del plano $P = (x, y)$ con sus dos coordenadas enteras. Diremos que P es visible desde $O = (0, 0)$ si el segmento OP no contiene otros puntos de coordenadas enteras además de O y P. Determinar cuántos puntos Q de la forma $Q = (x, 2000)$ con x entero, $1 \leq x \leq 2006$, son visibles desde O.

24. Pedrito midió el largo del terreno de su tío con pasos de 54cm. Después midió el tío con pasos de 72cm. Quedaron marcadas en total 61 pisadas, pero a veces la misma marca correspondía a dos pisadas, una de Pedrito y otra del tío. ¿Cuál es el largo del terreno en centímetros?

25. ¿De cuántas maneras se puede llegar de la esquina inferior izquierda a la esquina superior derecha de un tablero de 3×3 moviéndose sobre la cuadrícula, si no está permitido pasar dos veces por el mismo lugar ni moverse hacia la izquierda?

26. Un segmento AB tiene longitud 12. Se construye un punto C tal que ABC es equilátero y un semicírculo S de diámetro AB tal que S y el triángulo ABC comparten una parte de su área. Determinar el valor, en unidades cuadradas, de la porción de área que está encerrada por el círculo o por el triángulo pero no por los dos.

27. Sean $p = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \cdots \cdot 2003$ el producto de todos los números primos menores que 2006 y $q = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot 2005$ el producto de todos los números impares hasta 2006. Hallar la cifra de las decenas de $p \cdot q$.

28. Hallar las dos últimas cifras (decenas y unidades) del número 2006^{2006}.

29. Paladino tiene n tarjetas numeradas de 1 a n y las divide en dos grupos ($n > 1$). Una división es *perfecta* si por lo menos uno de los grupos contiene dos tarjetas tales que la suma de los números de esas tarjetas es igual al cuadrado de un número natural. ¿Cuál es el menor valor de n para el cual todas las divisiones de las n tarjetas en dos grupos son perfectas?

30. Dado un hexágono regular de área 18, se forman todos los triángulos cuyos vértices son vértices del hexágono. Calcular la suma de las áreas de todos esos triángulos.

31. Hallar el menor número formado exclusivamente por dígitos 3 y 7, con al menos un dígito de cada clase, tal que tanto el número como la suma de sus dígitos sean divisibles por 3 y por 7.

32. La lotería matemática sortea un número de 10 dígitos, y los ganadores son todos los números que coinciden con el sorteado en exactamente 9 posiciones y además son múltiplos de 7. Si el número sorteado es el 1234567890, determinar cuántos números ganadores hay.

33. Ariel, Bernardo y Claudio resuelven cada uno exactamente 60 problemas de una lista de 100. Todos los problemas fueron resueltos por al menos uno de los tres. Diremos que un problema es fácil si los tres los resolvieron y que es difícil si sólo uno de los tres lo resolvió. Si d es la cantidad de problemas difíciles y f es la cantidad de problemas fáciles, hallar $d - f$.

34. Encontrar el menor número tal que su dígito de las unidades es 6 y al pasar ese 6 al otro extremo del número se obtiene como resultado cuatro veces el número original.

35. Un reloj despertador digital da la hora en hora militar (es decir, de las 00:00 a las 23:59). Las cifras están compuestas por barras, como es normal en estos relojes. ¿Cuál es la mayor cantidad de barras que estarán iluminadas simultáneamente?

36. En un tablero de tamaño 10×10 se escribe un número entero positivo en cada casilla de forma ue la diferencia entre los números que ocupan dos casillas vecinas (casillas que comparten lado) nunca es mayor que 1. ¿Cuál es la mayor diferencia que se puede obtener entre dos números del tablero?

5.2 Juegos programados

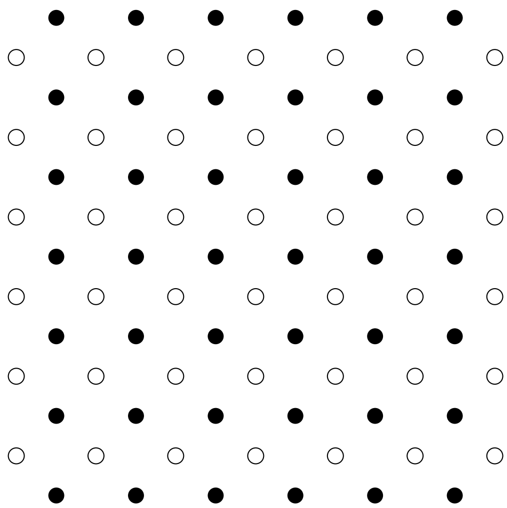
Se presentan tres juegos con esencia matemática que fueron programados para la competencia y supervisados por guías de la olimpiada.

5.2.1 Laberinto fantasma

Este juego se desarrolla en un tablero en el cual aparecen marcas blancas y negras. Cada uno de los equipos tomará uno de estos colores como propio, y el objetivo del juego será construir un camino que una los lados opuestos del tablero que tienen el color del equipo.

Una jugada consiste en unir dos puntos del color del equipo que se encuentren a distancia mínima con una línea, teniendo en cuenta que las líneas no se pueden intersectar. El equipo a quien corresponden los puntos blancos buscará completar en camino entre el extremo izquierdo y derecho del tablero, mientras que el equipo negro tendrá que completar un camino de arriba a abajo con las líneas que hace en cada jugada. El primer equipo en completar el camino es el ganador.

Tablero de juego



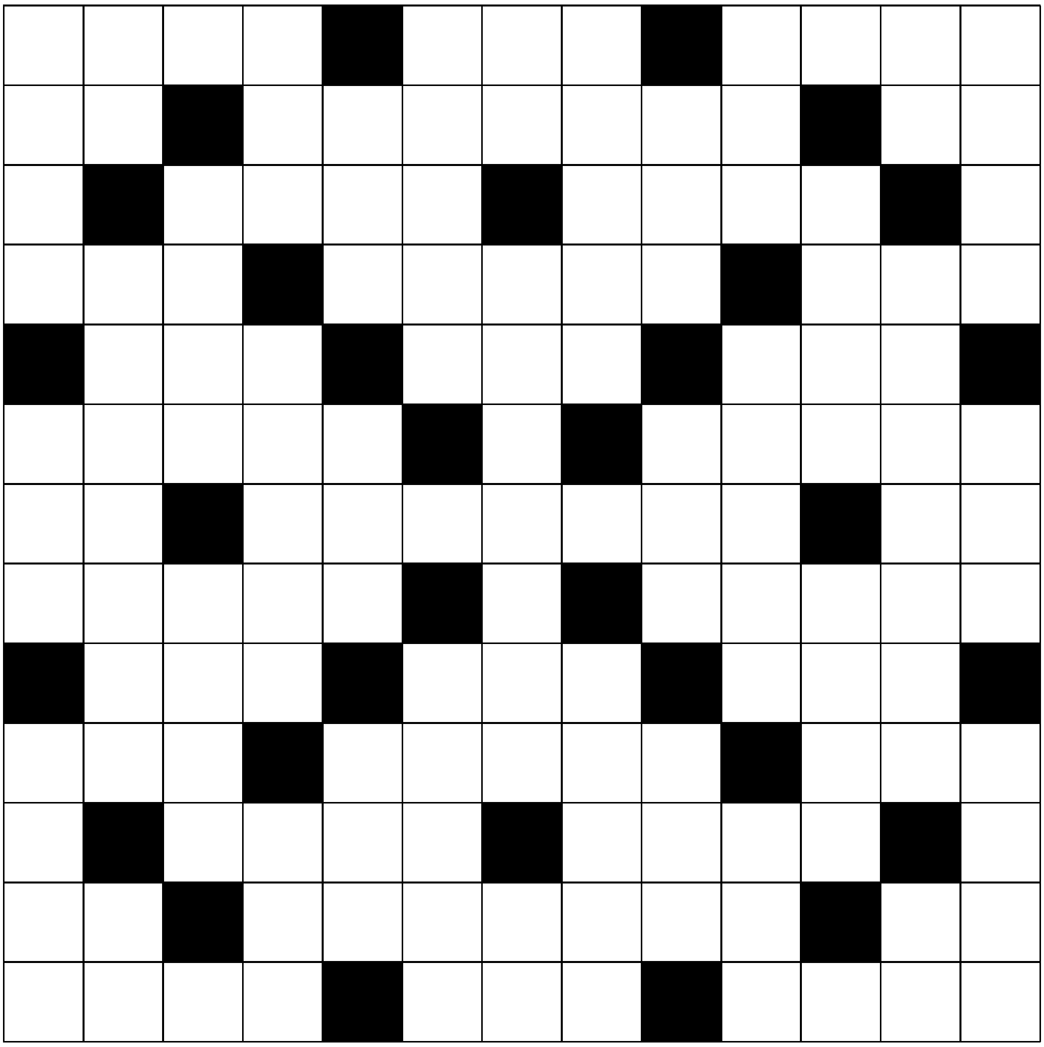
5.2.2 Escape frustrado

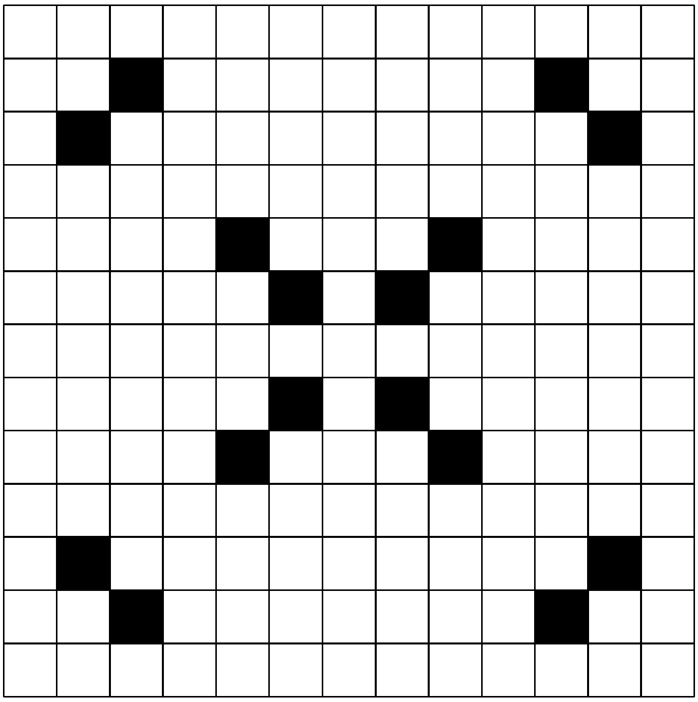
El juego consiste en un tablero de 13×13 con algunas casillas prohibidas, similar a un 'mapa' de crucigrama. Los movimientos permitidos son únicamente a la derecha o abajo, de la longitud deseada (correspondiente a una cantidad entera y positiva de casillas) mientras esa longitud de movimiento no saque a la ficha de juego fuera del tablero ni sea necesario pasar por encima de una de las casillas prohibidas.

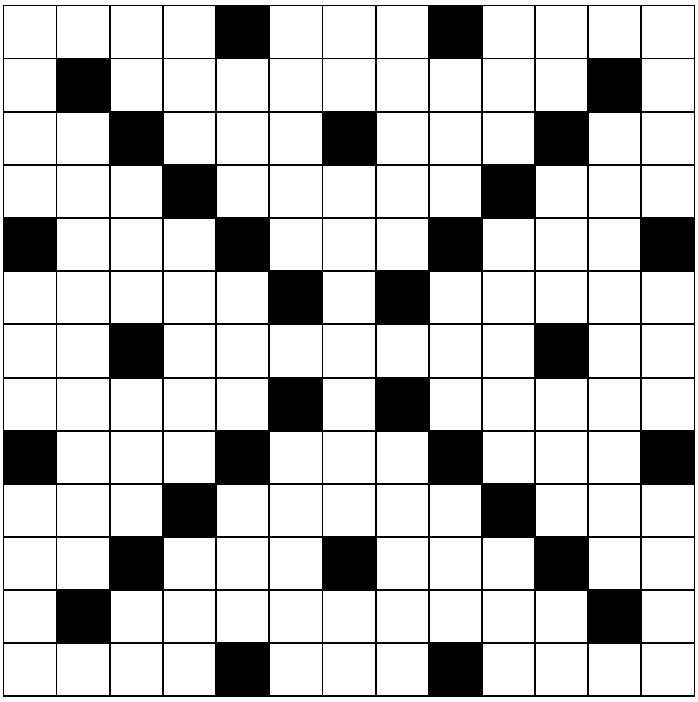
El equipo que inicia recibe la ficha en la casilla superior izquierda del tablero y después de hacer su movimiento cede el turno al equipo rival, que realizará una jugada y devolvera el turno al equipo que inició.

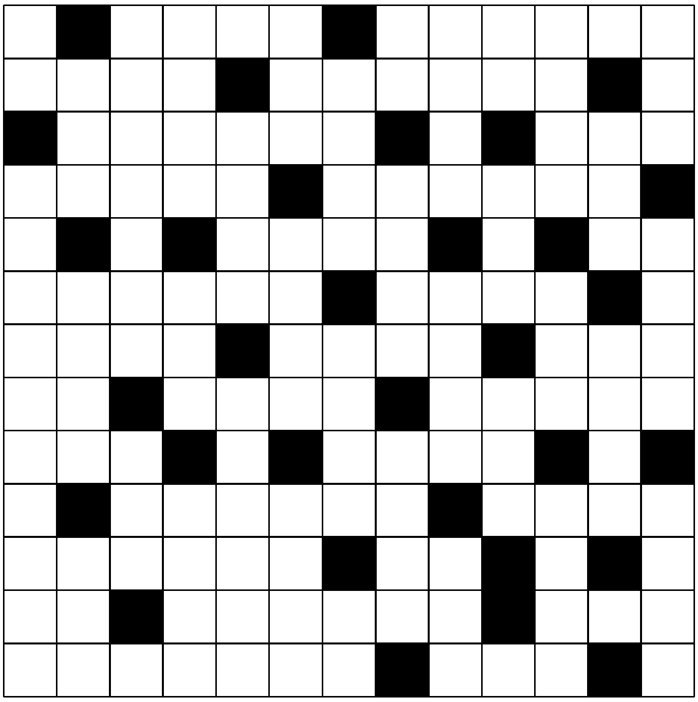
El ganador del juego se determina por la última jugada posible (es decir, cuando no sea posible hacer movimiento alguno). El equipo que encierra la ficha, es decir, el equipo que realiza la última jugada e imposibilita que la ficha continúe su movimiento, se declara perdedor de la partida.

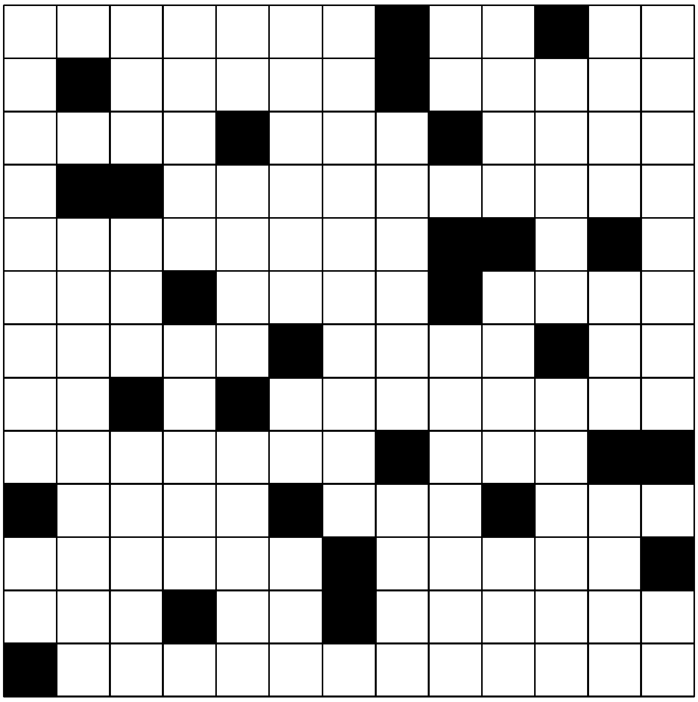
Algunos tableros











5.2.3 Control de territorio

El juego consiste en ubicar marcas las casillas de un tablero de 10×10 bajo las siguientes condiciones:

- Se designará el equipo encargado de hacer la primera jugada a través de un sorteo.
- Cada equipo colocará una marca en su turno y seguidamente cederá el turno al equipo contrario.

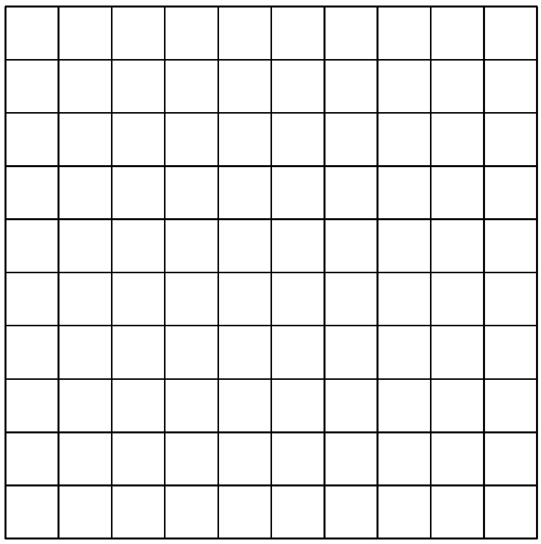
- Cada marca ocupará una casilla y esa casilla se considerará a partir de ese momento ocupada y no utilizable nuevamente.

- Las casillas con marcas de un mismo equipo forman bloques, tales que entre dos casillas de un mismo bloque hay un camino formado por casillas vecinas del mismo bloque (dos casillas del tablero son vecinas si tienen un lado común).

- Un bloque está encerrado si no es posible agregar mas casillas a él, es decir, si todas las casillas vecinas a alguna casilla del bloque están ocupadas.

- El equipo ganador en un tablero será aquel que logre encerrar un bloque del equipo rival. Si en una misma jugada un equipo logra encerrar y ser encerrado, por haber realizado la última jugada se considerará ganador.

Tablero de juego



5.3 Juegos no programados

Los estudiantes y los guías generaron algunos juegos diferentes a los programados durante la segunda etapa. Entre estos juegos se destacan “memoria”, en el que se deben encontrar parejas de cartas iguales de una cierta cantidad dispuesta sobre la mesa. También se hicieron algunas apuestas entre equipos sobre los resultados de juegos en los que participaban otros equipos.

6 Tercera etapa

1. [40 panacentros] Demostrar que si un tablero de $n \times n$ se puede cubrir con fichas rectangulares de tamaño $a \times 1$ completamente, sin superposición ni partes que sobresalgan, a es un divisor de n.

   Contribución de José Antonio Gómez, México

2. [60 panacentros] Sea $1 = x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n < \cdots$ una sucesión de enteros positivos, tal que para todo entero positivo n se cumple que $x_{n+1} \leq 2n$. Demostrar que para todo entero positivo k existen dos índices $i < j$ tales que

$$k = x_j - x_i.$$

Contribución de Rafael Sánchez, Venezuela

3. [300 panacentros] Una cierta Sociedad Secreta de Matemática tenía cuatro salones de reuniones y un curioso sistema de organización. Cada salón tenía un número (del 1 al 4) que lo identificaba y un par ordenado de signos; salón 1 $(+, +)$, salón 2 $(-, +)$, salón 3 $(-, -)$ y salón 4 $(+, -)$. La Sociedad celebraba n reuniones al año. Anualmente el presidente entregaba a cada uno de los miembros (¡qué eran buenos matemáticos!) una lista L de $2n$ enteros positivos distintos y otra lista S de n números donde el $i-$ésimo número indicaba el número del salón donde se celebraría la $i-$ésima reunión. Para asistir a una reunión los miembros debían presentar una distribución D de n pares (x_i, y_i), donde x_i, y_i son números distintos tomados de L (posiblemente multiplicados por -1 si quien presenta la distribución así lo desea) tal que el signo de $\sum_{i=1}^{k} x_i$ y el signo de $\sum_{i=1}^{k} y_i$ coincidan respectivamente con los signos asociados al $k-$ésimo salón de la lista S, para todo $1 \leq k \leq n$. Por supuesto un miembro podría presentar la misma distribución en varias reuniones (lo cual no agradaba al presidente).

   Por ejemplo, para $L = \{7\ 5\ 6\ 1\ 3\ 2\ 4\ 8\}$; $S = \{4\ 1\ 2\ 1\}$ una posible distribución correcta sería $D = \{(+7, -1); (-5, +2); (-4, +3); (+8; +6)\}$

   (a) Hallar una posible distribución D si $L = \{3\ 7\ 17\ 9\ 40\ 11\ 15\ 22\ 28\ 36\ 50\ 30\}$; $S = \{1\ 4\ 2\ 1\ 2\ 3\}$

   (b) Hallar al menos dos posibles distribuciones D si $L = \{2006\ 2006^2\ 2006^3\ \ldots\ 2006^{2006}\}$; $S = \{1\ 3\ 1\ 3\ 1\ \ldots\ 1\}$ (con 1003 términos).

   (c) Suponga que la lista S tiene la forma $\{1\ 3\ 1\ 3\ 1\ \ldots\}$ o $\{2\ 4\ 2\ 4\ 2\ \ldots\}$. Demostrar que el problema es tiene solución para cualquier lista L dada.

   (d) Un día el presidente anunció que otorgaría un premio especial para aquel miembro que presentara n distribuciones $D1$, $D2$, $\ldots$, D_n diferentes (una en cada reunión) a lo largo del año. Algunos miembros protestaron diciendo que tal tarea no podía cumplirse (y por tanto nadie recibiría el premio). Ante este reclamo el presidente exigió una demostración rigurosa del hecho. Decidir si es posible o no ganar el premio. Justificar.

   (e) Dada una lista L de $2n$ enteros positivos distintos y otra lista S de n elementos tomados del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, probar que siempre es posible hallar por lo menos una distribución D que cumpla las condiciones del problema.

Contribución de Enech García, Cuba

7 Resultados finales

Número de equipo	Integrantes	Puntaje
7	CRC02, CUB01, DOM03, PAN02	1268
5	COL01, CUB02, NIC01, PRC02	615
9	CRC03, CUB03, GUA02, VEN01	500
4	GUA03, NIC03, PAN03, SAL03	485
3	COL03, HON03, PRC03, SAL02	410
1	CRC01, HON02, MEX03, SAL01	340
2	COL02, GUA01, PAN01, PRC01	275
8	DOM02, HON01, MEX01, VEN02	275
6	DOM01, MEX02, NIC02, VEN03	264

8 Agradecimientos

No sería justo terminar este informe sin dar un agradecimiento muy especial a las personas que colaboraron en la organización y el desarrollo de esta prueba por equipos.

Trabajaron arduamente en la organización Pedro Marrone y Rogelio Rojas, miembros del comité organizador local, quienes facilitaron el proceso de elaboración del material requerido para dar fluidez a la prueba. Enech García (Cuba), José Antonio Gómez (México) y Rafael Sánchez (Venezuela) aportaron su conocimiento y dedicación a la preselección de los problemas que hicieron parte tanto de la primera como de la tercera etapa. Joselito Wong (Panamá) aportó un gran esfuerzo para encontrar en muy poco tiempo algunos de los problemas que se utilizaron en las estaciones de trabajo. El equipo de guías nombrado para la olimpiada realizó el trabajo de ontrol y coordinación de las actividades de la prueba por equipos, aportando su creatividad y ánimo al mejor desempeño de los estudiantes.

A ellos y a todos aquellos que trabajaron indirectamente para conseguir el éxito de esta actividad, un sincero agradecimiento.