VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Panamá, 2006

Primer Día

1 de agosto

Problema 1

Se consideran los enteros positivos

$$S_d = 1 + d + d^2 + \cdots + d^{2006},$$

con $d = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Halle la última cifra del número

$$S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_9.$$

Problema 2

Sean Γ y Γ' dos circunferencias de igual radio con centros O y O' respectivamente. Γ y Γ' se cortan en dos puntos y A es uno de ellos. Se escoge un punto B cualquiera en Γ. Sea C el otro punto de corte de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con Γ' y D un punto en Γ' tal que $OBDO'$ es un paralelogramo. Demuestre que la longitud de $\overline{CD}$ es constante, es decir, no depende de la elección de B.

Problema 3

Para cada número natural n, se define $f(n) = \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$. Pruebe que para cada $k \geq 1$, la ecuación

$$f(f(n)) - f(n) = k$$

tiene exactamente $2k - 1$ soluciones.

Nota: Si x es un número real, el símbolo $[x]$ denota al mayor entero que es menor o igual a x. Por ejemplo: $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $[-0{,}4] = -1$, $\left[\sqrt{2}\right] = 1$.

Duración: 4 horas y 30 minutos.
Cada problema recibe un máximo de 7 puntos.

VIII Olimpiada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Panamá, 2006

Segundo Día

2 de agosto

Problema 4

El producto de varios números enteros mayores que 0 y distintos entre sí, es múltiplo de $(2006)^2$. Determine el menor valor que puede tomar la suma de esos números.

Problema 5

El país Olimpia está formado por n islas. La isla más poblada es Panacentro y todas las islas tienen diferente número de habitantes. Se desea construir puentes entre islas que puedan transitarse en ambas direcciones de manera que cada pareja no esté unida por más de un puente. Es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

- Siempre es posible llegar desde Panacentro hasta cualquiera otra isla usando los puentes.
- Si se hace un recorrido desde Panacentro hasta cualquier otra isla utilizando cada puente no más de una vez, el número de habitantes de las islas visitadas es cada vez menor.

Determine el número de maneras de construir los puentes.

Problema 6

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea I el punto de intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Sean E, H, F y G puntos sobre los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente, tales que $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ se cortan en I. Sea M el punto de intersección de $\overline{EG}$ y $\overline{AC}$ y sea N el punto de intersección de $\overline{HF}$ y $\overline{AC}$. Demuestre que

$$\frac{AM}{IM} \cdot \frac{IN}{CN} = \frac{IA}{IC}$$

Duración: 4 horas y 30 minutos.

Cada problema recibe un máximo de 7 puntos.