VIII Olimpíada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Panamá, 2006

Primer Día

Soluciones

Problema 1

Se consideran los enteros positivos

$$S_d = 1 + d + d^2 + \cdots + d^{2006},$$

con $d = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Halle la última cifra del número

$$S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_9.$$

Solución

Denotaremos por $\mathcal{U}(S_d)$ a la última cifra del número S_d, se obtiene inmediatamente que $\mathcal{U}(S_0) = \mathcal{U}(1) = 1$ y $\mathcal{U}(S_1) = \mathcal{U}(1 + 2006) = 7$. Para calcular los restantes $\mathcal{U}(S_d)$ observamos que para todo $k \in \mathbb{N}$, es

$$\mathcal{U}(d^{4k} + d^{4k+1} + d^{4k+2} + d^{4k+3}) = 0$$

excepto para $d = 6$. En este caso es

$$\mathcal{U}(6^{5k} + 6^{5k+1} + 6^{5k+2} + 6^{5k+3} + 6^{5k+4}) = 0.$$

Explícitamente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(S_2) &= \mathcal{U}\left[1 + (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \cdots + (2^{2001} + \ldots + 2^{2004}) + 2^{2005} + 2^{2006}\right] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 2 + 4) = 7 \\
\mathcal{U}(S_3) &= \mathcal{U}\left[1 + (3 + 3^2 + 3^3 + 3^4) + \cdots + (3^{2001} + \ldots + 3^{2004}) + 3^{2005} + 3^{2006}\right] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 3 + 9) = 3, \\
\mathcal{U}(S_4) &= \mathcal{U}\left[1 + (4 + 4^2 + 4^3 + 4^4) + \cdots + (4^{2001} + \ldots + 4^{2004}) + 4^{2005} + 4^{2006}\right] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 4 + 6) = 1, \\
\mathcal{U}(S_5) &= \mathcal{U}\left[1 + (5 + 5^2 + 5^3 + 5^4) + \cdots + (5^{2001} + \ldots + 5^{2004}) + 5^{2005} + 5^{2006}\right] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 5 + 5) = 1, \\
\mathcal{U}(S_6) &= \mathcal{U}\left[1 + (6 + 6^2 + 6^3 + 6^4 + 6^5) + \cdots + (6^{2001} + \ldots + 6^{2004} + 6^{2005}) + 6^{2006}\right] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 0 + 6) = 7, \\
\mathcal{U}(S_7) &= \mathcal{U}\left[1 + (7 + 7^2 + 7^3 + 7^4) + \cdots + (7^{2001} + \ldots + 7^{2004}) + 7^{2005} + 7^{2006}\right] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 7 + 9) = 7, \\
\mathcal{U}(S_8) &= \mathcal{U}\left[1 + (8 + 8^2 + 8^3 + 8^4) + \cdots + (8^{2001} + \ldots + 8^{2004}) + 8^{2005} + 8^{2006}\right] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 8 + 4) = 3, \\
\mathcal{U}(S_9) &= \mathcal{U}\left[1 + (9 + 9^2 + 9^3 + 9^4) + \cdots + (9^{2001} + \ldots + 9^{2004}) + 9^{2005} + 9^{2006}\right] \\
&= \mathcal{U}(1 + 0 + \cdots + 0 + 9 + 1) = 1.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathcal{U}(S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_9) = \mathcal{U}(1 + 7 + 7 + 3 + 1 + 1 + 7 + 7 + 3 + 1) = 8$$

y hemos terminado.

2 Sean Γ y Γ' dos circunferencias de igual radio con centros O y O' respectivamente. Γ y Γ' se cortan en dos puntos y A es uno de ellos. Se escoge un punto B cualquiera en Γ. Sea C el otro punto de corte de la recta $\overleftrightarrow{AB}$ con Γ' y D un punto en Γ' tal que $OBDO'$ es un paralelogramo. Demuestre que la longitud de $\overline{CD}$ es constante, es decir, no depende de la elección de B.

Solución

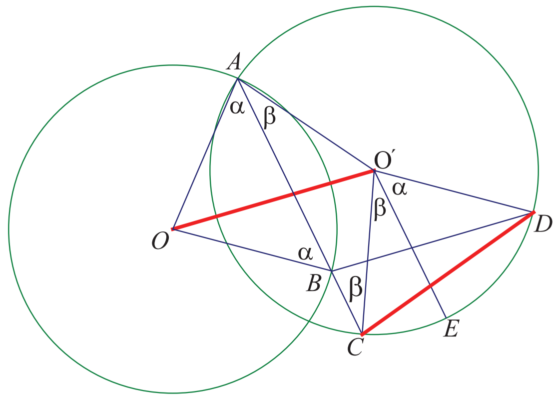
Como los triángulos OAB y $O'AC$ son isósceles, se tiene que $\text{m}\angle OAB = \alpha = \text{m}\angle OBA$ y $\text{m}\angle O'AC = \beta = \text{m}\angle O'CA$.

Se construye un punto E tal que $\overline{AC}$ sea paralelo a $\overline{O'E}$, así $\text{m}\angle ACO' = \text{m}\angle CO'E = \beta$ por ser alternos internos, y $\text{m}\angle OBA = \text{m}\angle EO'D = \alpha$ porque $\overline{OB}$ es paralelo a $\overline{O'D}$ y $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{O'E}$.

De allí que

$$\text{m}\angle OAO' = \alpha + \beta = \text{m}\angle CO'D,$$

y dado que Γ y Γ' son circunferencias de radios iguales se concluye que el triángulo OAO' es congruente con el triángulo $CO'D$ y por lo tanto $\overline{CD}$ tiene la misma longitud que $\overline{OO'}$, la cual es constante independientemente de la ubicación de B.



Problema 3

Para cada número natural n, se define $f(n) = \left[n + \sqrt{n} + \frac{1}{2}\right]$. Pruebe que para cada $k \geq 1$, la ecuación

$$f(f(n)) - f(n) = k$$

tiene exactamente $2k - 1$ soluciones.

Nota: Si x es un número real, el símbolo $[x]$ denota al mayor entero que es menor o igual a x. Por ejemplo: $\left[\frac{5}{2}\right] = 2$, $[-0{,}4] = -1$, $\left[\sqrt{2}\right] = 1$.

Solución

Consideremos la función $g(n) = f(f(n)) - f(n)$. De la definición de f se tiene que $g(n) = \left\lfloor \sqrt{f(n)} + \frac{1}{2} \right\rfloor$. Se trata entonces de resolver la ecuación:

$$g(n) = \left\lfloor \sqrt{f(n)} + \frac{1}{2} \right\rfloor = k, \quad \text{para} \quad k \geq 1.$$

Observemos lo siguiente:

1) f es estrictamente creciente
2) g es creciente
3) $g(k^2) = k$
4) $g(k^2 + 1) = k + 1$.

Veamos el caso k=1.

Obviamente, $n = 1$ es solución de la ecuación $g(n) = 1$, pues

$$f(f(1)) - f(1) = f(2) - 2 = 3 - 2 = 1$$

Además $g(2) = f(f(2)) - f(2) = f(3) - 3 = 5 - 3 = 2$, por lo que $g(n) \geq 2$ para $n \geq 2$. Así, la única solución es $n = 1$ y esto prueba el resultado en el caso $k = 1$.

Suponemos de aquí en adelante que $k \geq 2$, y tomamos n tal que:

$$k^2 - 2k + 2 \leq n \leq k^2.$$

Hay exactamente $2k - 1$ de tales n.

Como g es creciente
$$k = g(k^2 - 2k + 2) \le g(n) \le g(k^2) = k.$$
Por lo tanto, $g(n) = k$. Hemos encontrado $2k - 1$ soluciones de la ecuación. Para demostrar que no hay más soluciones, se observa que

- $$m \le k^2 - 2k + 1 \text{ implica que } g(m) \le g(k^2 - 2k + 1) = k - 1$$

- $$k^2 + 1 \le m \text{ implica que } k + 1 = g(k^2 + 1) \le g(m)$$

Demostración de las afirmaciones 1 - 4.

Prueba de 1.

Sea $n \ge 1$, entonces:

$$f(n+1) - f(n) = n + 1 + \left\lfloor \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor - n - \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor = 1 + \left\lfloor \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

Como $\sqrt{n+1} + \frac{1}{2} > \sqrt{n} + \frac{1}{2}$, se tiene que $\left\lfloor \sqrt{n+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor \ge 0$.

Por lo tanto $f(n+1) - f(n) > 0$. Así f es estrictamente creciente.

Prueba de 2.

Sea $n \ge 1$, entonces:

$$g(n+1) - g(n) = \left\lfloor \sqrt{f(n+1)} + \frac{1}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{f(n)} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

Como f es estrictamente creciente:

$$\sqrt{f(n+1)} + \frac{1}{2} > \sqrt{f(n)} + \frac{1}{2},$$

por lo tanto:
$$\left\lfloor \sqrt{f(n+1)} + \frac{1}{2} \right\rfloor \ge \left\lfloor \sqrt{f(n)} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$
Esto prueba que g es creciente.

Prueba de 3.

Como $f(k^2) = k(k+1)$, se tiene que

$$g(k^2) = \left\lfloor \sqrt{f(k^2)} + \frac{1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{k(k+1)} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

De las desigualdades:
$$k < \sqrt{k(k+1)} + \frac{1}{2} < k + 1,$$

se tiene $g(k^2) = k$. Esto prueba (3).

Prueba de 4.

Como $k^2 < k^2 + 1 < (k+1)^2$, y g es creciente:

$$k = g(k^2) \leq g(k^2 + 1) \leq g((k+1)^2) = k + 1.$$

Probemos que $g(k^2 + 1) > k$. Supongamos que $g(k^2 + 1) = k$, entonces

$$\left\lfloor \sqrt{f(k^2+1)} + \frac{1}{2} \right\rfloor = k,$$

por lo tanto

$$k \leq \sqrt{f(k^2+1)} + \frac{1}{2} < k + 1$$

lo que implica que:

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < f(k^2+1) < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Según la definición de f

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < k^2 + 1 + \left\lfloor \sqrt{k^2+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Estas últimas desigualdades se pueden reescribir como:

$$-k - \frac{5}{4} < \left\lfloor \sqrt{k^2+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor < k - \frac{3}{4},$$

por lo tanto

$$\left\lfloor \sqrt{k^2+1} + \frac{1}{2} \right\rfloor < k,$$

lo que implica que

$$\sqrt{k^2+1} + \frac{1}{2} < k.$$

Esta desigualdad es imposible.

Por lo tanto, $g(k^2 + 1) = k + 1$.

VIII Olimpíada Matemática de Centroamérica y El Caribe

Panamá, 2006

Segundo Día

Soluciones

Problema 4

El producto de varios números enteros mayores que 0 y distintos entre sí, es múltiplo de $(2006)^2$. Determine el menor valor que puede tomar la suma de esos números.

Solución

Primero notamos que $2006 = 2 \times 17 \times 59$, entonces $2006^2 = 2^2 \times 17^2 \times 59^2$.

A cada conjunto que cumple las condiciones del enunciado y tal que la suma de sus elementos es ese menor valor, lo llamaremos un *conjunto mínimo*.

Primero veremos que cada *conjunto mínimo* tiene 6 o menos elementos.

Consideremos un conjunto mínimo cualquiera. Marcamos algunos de sus elementos siguiendo los siguientes pasos:

(a) Primero marcamos o bien dos elementos múltiplos de 2, o un elemento múltiplo de 4 (esto tiene que existir ya que el producto es múltiplo de 2006^2).

(b) Luego marcamos o bien dos elementos múltiplos de 17, o un elementos múltiplo de 17^2 (esto tiene que existir por la misma razón anterior).

(c) Finalmente marcamos o bien dos elementos múltiplos de 59, o un elemento múltiplo de 59^2.

Nótese que los elementos marcados satisfacen que su producto es múltiplo de 2006^2, y no se marcaron más de 6 elementos. Además, la suma de los elementos marcados es menor o igual a la suma de todos los elementos del conjunto. Dado que este conjunto es un *conjunto mínimo*, necesariamente se tienen que haber marcado todos sus elementos, por lo que el conjunto no tiene más de 6 elementos.

Ahora veremos que ninguno de los elementos de un *conjunto mínimo* es múltiplo de 17^2:

Supongamos que un conjunto mínimo es de la forma $\{17^2k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (con k un entero positivo). Consideremos las parejas de números:

$$17k, 15 \times 17k$$

$$2 \times 17k, 14 \times 17k$$

$$3 \times 17k, 13 \times 17k$$

$$4 \times 17k, 12 \times 17k$$

$$\vdots$$

$$7 \times 17k, 9 \times 17k$$

En total hay 7 parejas, y no hay más de 6 elementos en el conjunto $\{17^2k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, por lo que una de las parejas satisface que ninguno de sus dos elementos está en ese conjunto. Sea $a17k, (16 - a)17k$ esa pareja. Consideremos entonces el nuevo conjunto $\{a17k, (16-a)17k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. El nuevo conjunto satisface que el producto de sus elementos es múltiplo del producto de los elementos del conjunto original, y por lo tanto es múltiplo de 2006^2. Además, la suma de los elementos de este nuevo conjunto es

$$16 \times 17k + \sum_{i=1}^{n} a_i < 17^2k + \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Por lo tanto el conjunto original no puede ser un conjunto mínimo, lo cual contradice lo asumido inicialmente.

Usando el mismo argumento, pero con las parejas

$$59k, 15 \times 59k$$

$$2 \times 59k, 14 \times 59k$$

$$3 \times 59k, 13 \times 59k$$

$$4 \times 59k, 12 \times 59k$$

$$\vdots$$

$$7 \times 59k, 9 \times 59k$$

se tiene que ningún conjunto mínimo tiene un elemento múltiplo de 59^2.

Ahora veremos que ningún conjunto mínimo tiene un elemento múltiplo de 17×59:

Supongamos que algún conjunto mínimo es de la forma $\{17 \times 59k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ (con k un entero positivo). Consideremos las parejas de números:

$$17k, 59k$$

$$2 \times 17k, 2 \times 59k$$

$$3 \times 17k, 3 \times 59k$$

$$\vdots$$

$$7 \times 17k, 7 \times 59k$$

En total son 7 parejas, y el conjunto $\{17 \times 59k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ no tiene más de 6 elementos, por lo que alguna de las parejas satisface que ninguno de sus dos elementos está en $\{17 \times 59k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Sea $a \times 17k, a \times 59k$ dicha pareja. Consideramos entonces el nuevo conjunto

$$\{a17k, a59k, a_1, a_2, \ldots, a_n\}.$$

El producto de los elementos del nuevo conjunto también es múltiplo de 2006^2, y la suma de sus elementos es

$$a(17+59)k+\sum_{i=1}^{n} a_i = a76k+\sum_{i=1}^{n} a_i \leq 7\times 76k+\sum_{i=1}^{n} a_i < 17\times 59k+\sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Entonces el conjunto original no podría ser un conjunto mínimo, lo cual contradice la suposición inicial.

Tenemos entonces que las siguientes afirmaciones son ciertas para cada conjunto mínimo S:

(a) Ningún elemento de S es múltiplo de 17^2.

(b) Ningún elemento de S es múltiplo de 59^2.

(c) Ningún elemento de S es múltiplo de 17×59.

Entonces el conjunto S debe ser de la forma:

$$\{17x_1, 17x_2, \ldots, 17x_p, 59y_1, 59y_2, \ldots, 59y_q, z_1, z_2, \ldots, z_r\}$$

(r podría ser 0), donde ninguno de los números $x_1, x_2, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots, y_q, z_1, z_2, \ldots, z_r$ es múltiplo de 17, ni de 59.

Se tiene además que $p \geq 2$ y $q \geq 2$ (para que el producto sea divisible entre 17^2 y 59^2). Por otro lado, como los x_i's son distintos, se tiene que $x_1+x_2 \geq 1+2$ y de la misma manera $y_1+y_2 \geq 1+2$. Finalmente se tiene:

$$\begin{aligned}\sum(S) &= 17(x_1+x_2+\cdots+x_p)+59(y_1+y_2+\cdots+y_q)+z_1+z_2+\cdots+z_r\\ &\geq 17(x_1+x_2)+59(y_1+y_2) \geq 17\times 3+59\times 3 = 228.\end{aligned}$$

Basta entonces con dar un ejemplo de un conjunto tal que el producto de sus elementos es múltiplo de 2006^2 y tal que la suma de sus elementos es 228:

$$\{17, 2\times 17, 59, 2\times 59\}.$$

Problema 5

El país Olimpia está formado por n islas. La isla más poblada es Panacentro y todas las islas tienen diferente número de habitantes. Se desea construir puentes entre islas que puedan transitarse en ambas direcciones de manera que cada pareja no esté unida por más de un puente. Es necesario que se cumplan las siguientes condiciones:

- Siempre es posible llegar desde Panacentro hasta cualquiera otra isla usando los puentes.
- Si se hace un recorrido desde Panacentro hasta cualquier otra isla utilizando cada puente no más de una vez, el número de habitantes de las islas visitadas es cada vez menor.

Determine el número de maneras de construir los puentes.

Solución

Nótese que la red de puentes de Olimpia no puede contener ciclos. Para demostrar esto, supóngase que las islas X y Y pertenecen a un ciclo (ciclo simple, sin repetición de puentes) y que el número de habitantes de X es mayor al número de habitantes de Y. Para cada isla Z en el ciclo, diferente de X y Y, se debe cumplir que el número de habitantes de Z es menor que el de X y mayor que el de Y.

Además, existe un recorrido que va de Z a Y pasando por X que no repite los puentes (tómense las dos componentes del ciclo al cortar en Z y en Y y de estas tómese la que contiene X) por lo que este recorrido va de una isla a otra con menor cantidad de habitantes pasando por una tercera isla que tiene más habitantes que las dos primeras, contradiciendo la conformación de los puentes.

Sean $I_1,\ I_2,\ \ldots,\ I_n$ las islas de Olimpia y $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$ sus respectivas poblaciones, de forma que $p_i > p_j$ si y solamente si $i > j$. En esta forma, la primera isla en el orden, I_1, debe ser justamente Panacentro. Ahora, I_2 debe estar directamente unida a I_1, ya que de I_1 es posible llegar a I_2 y en ese camino no deberían encontrarse islas de menor cantidad de habitantes. Para I_3, es posible unirla con un puente directamente a I_1 o directamente a I_2, pero no a las dos, ya que se formaría un ciclo. Se tienen entonces 2 posibilidades. Para I_4, se le puede unir directamente con I_1, I_2 o I_3, para obtener 3 posibilidades. Siguiendo el proceso, hasta llegar a I_n para la que existen $n-1$ posibilidades (unir directamente con cualquiera de las islas anteriores) se tiene que el total de opciones para conformar los puentes de Olimpia está dado por

$$1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times (n-1) = (n-1)!.$$

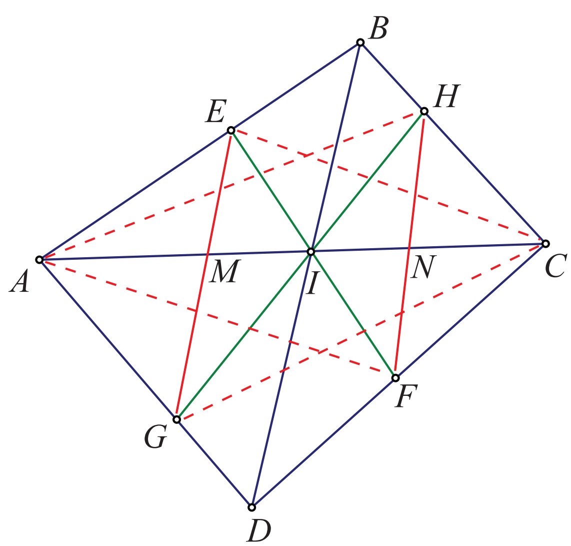
Problema 6

Sea $ABCD$ un cuadrilátero convexo. Sea I el punto de intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Sean E, H, F y G puntos sobre los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ respectivamente, tales que $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$ se cortan en I. Sea M el punto de intersección de $\overline{EG}$ y $\overline{AC}$ y sea N el punto de intersección de $\overline{HF}$ y $\overline{AC}$. Demuestre que

$$\frac{AM}{IM} \cdot \frac{IN}{CN} = \frac{IA}{IC}$$

Solución

Ver la figura. Note que podemos determinar doce pares de triángulos, ya sea con lados en común o con ángulos comunes o bien con dos ángulos congruentes, uno por cada triángulo del par.



Estableciendo relaciones entre áreas y lados obtenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{AM}{IM}\cdot\frac{IN}{CN} &= \frac{[AEG]}{[IEG]}\cdot\frac{[IFH]}{[CHF]}\\
&= \frac{[IFH]}{[IEG]}\cdot\frac{[CBD]}{[CHF]}\cdot\frac{[ABD]}{[CBD]}\cdot\frac{[AEG]}{[ABD]}\\
&= \frac{IF\cdot IH}{IE\cdot IG}\cdot\frac{CD\cdot CB}{CF\cdot CH}\cdot\frac{IA}{IC}\cdot\frac{AE\cdot AG}{AB\cdot AD}\\
&= \frac{[FAC]}{[EAC]}\cdot\frac{[HAC]}{[GAC]}\cdot\frac{[DAC]}{[FAC]}\cdot\frac{[BAC]}{[HAC]}\cdot\frac{IA}{IC}\cdot\frac{[EAC]}{[BAC]}\cdot\frac{[GAC]}{[DAC]}\\
&= \frac{IA}{IC}
\end{aligned}
$$